





ANALYTISCHE GEOMETRIE

DER

HÖHEREN EBENEN CURVEN

VON

GEORGE SALMON.

DEUTSCH BEARBEITET

VON

Dr. WILHELM FIEDLER,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNICUM ZU ZÜRICH.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1873.

Vorwort.

Die deutsche Ausgabe des „Treatise on the higher plane curves“ von George Salmon, die ich hiermit dem mathematischen Publikum übergebe, ist eine Uebersetzung nach der 2. Ausg. des Originals, welche vor Kurzem veröffentlicht worden ist, deren allmähligem Fortschreiten ich aber durch die Zusendung der Probebogen genau folgen konnte. Sie weicht von der Originalausgabe wesentlich nur ab durch die Weglassung eines Abschnittes von Kapitel VIII über die linearen Transformationen, welche Theorie ihren Platz in der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte (Kap. XXII, Art. 375 f.) behalten soll, durch vermehrte Literaturnachweisungen und einige mit denselben verbundene Zusätze. Im Text ist ausser Art. 22, 23 nur wenig hinzugefügt worden.

Einige Mittheilungen über die Entstehung der Originalausgabe gebe ich mit den Worten des Verfassers wieder. „Die erste Ausgabe dieses Buches ist seit mehreren Jahren vergriffen und ich hatte ehedem selbst die Idee einer Neuausgabe desselben aufgegeben. Als zu einer Zeit geschrieben, wo die neuere Algebra noch in ihrer Kindheit war, forderte das Buch ausgedehnte Veränderungen, um auf den gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft gebracht zu werden, und da ich die Vollendung einer neuen Ausgabe vor meiner Ernennung zu dem Amte, welches ich jetzt bekleide, versäumt hatte, so hielt ich für unmöglich sie nunmehr zu erzielen, wo andere Verpflichtungen mir nicht Muse dazu liessen, mich mit den neuen mathematischen Entdeckungen bekannt zu

machen oder auch nur im Gedächtniss zu bewahren, was ich früher gewusst hatte. Als aber Jahre vergingen und das meinige noch immer das einzige englische Werk blieb, welches einen systematischen Abriss der neueren Curventheorie zu geben versucht, begann ich zu erwägen, ob ein Wiederabdruck nicht möglich wäre mit Unterstützung eines jungen Mathematikers, der competent wäre zur Bearbeitung zusätzlicher Abschnitte, die die späteren Fortschritte der Wissenschaft darstellen würden; indem ich Professor Cayley's Rath hierüber suchte, ward ich ebenso hoch als angenehm durch sein Anerbieten überrascht, mir selbst die gewünschte Hilfe zu gewähren. Es ist unnöthig zu sagen mit welcher Freude ich einen Vorschlag ergriff, der den Werth meines Buches so sehr zu erhöhen versprach und bei dem ich nur das Bedenken fühlte, dass die Zeit und Arbeit, welche Professor Cayley dem Werke eines Andern widme, für einige Zeit wenigstens die mathematische Welt eines bessern Werkes von ihm selbst über den nämlichen Gegenstand berauben werde." Das war gegen Ende des Jahres 1869.

„Mein ursprünglicher Plan für die Theilung der Arbeit ging dahin, dass Professor Cayley gewisse neue Abschnitte oder Kapitel beitragen möge, für welche die ganze Verantwortlichkeit ihm zufiele, während ich mich mit der Revision der älteren Theile des Buches begnügen wollte. Aber ich sah ein, dass es nicht möglich sein würde, dem Buche in diesem Wege die Einheit zu geben, die es haben sollte; und in Folge dessen ist unsere beiderseitige Arbeit in einer Weise verschmolzen worden, die es schwer macht unsere respectiven Antheile zu trennen. Professor Cayley hat sorgfältig das Ganze durchgegangen und es giebt kaum eine Seite in demselben, welche nicht in irgend einer Weise durch seine Bemerkungen beeinflusst worden ist; andererseits habe ich von seinen Beiträgen viele ganz neu geschrieben, entweder um sie dem Ganzen besser einzufügen oder weil ich glaubte, irgend eine Vereinfachung in seinen Methoden oder eine Hinzufügung zu seinen Resultaten machen zu können."

In den Literaturnachweisungen der deutschen Ausgabe sind genau nach den Angaben des Verfassers die Abschnitte resp. Artikel bezeichnet, welche ohne Veränderung oder doch mit nur unbedeutenden Abweichungen von Professor Cayley entnommen sind. Seine treue Mitarbeit wird sicher überall dankbar gewürdigt werden, sie ist ein neues Zeugniss jener ächten Gelehrten-Freundschaft, die seit so vielen Jahren schon so oft bei wichtigen Anlässen der Wissenschaft zu Gute kam.

Das Kapitel über die Anwendungen der Integralrechnung auf die Theorie der Curven, welches die erste Ausgabe enthielt, ist weggefallen, weil es einerseits unumgänglich gewesen wäre, dasselbe durch einen Abriss der Anwendungen zu erweitern, welche der allzu früh dahingeschiedene Clebsch in Fortsetzung der Untersuchungen von Riemann von den elliptischen und Abel'schen Integralen auf die Curventheorie gemacht hat; während es anderseits doch unmöglich erschien, diese Gegenstände anders als im Zusammenhange eines eigenen Werkes über den Integral-Calcul entsprechend zu behandeln.

Dagegen stellt mein verehrter Freund ein Kapitel über die Anwendung der symbolischen Methoden auf die ternären Formen, welches man vermissen kann, für eine neue Ausgabe seiner Lessons on the modern higher algebra in Aussicht.

Indem ich das Buch ohne wesentliche Veränderungen dem deutschen Publikum darbiete, folge ich der Ueberzeugung, dass es in seiner gegenwärtigen Gestalt vorzüglich geeignet ist, der mathematischen Arbeit auf seinem Gebiete frische Kräfte zu gewinnen durch Verbreitung der Kenntniss ihrer bisherigen Hauptresultate und ihrer wahrhaft fruchtbaren Methoden. Ich verhehle auch nicht die lebhafte Genugthuung, die ich selbst über die so glücklich gelungene Vervollständigung des Werkes über die Analytische Geometrie empfinde, welches die Salmon'schen Lehrbücher bilden und an dessen deutsche Bearbeitung ich so lange zumeist die Arbeit meiner Musestunden gewendet habe; ich hoffe noch immer damit ein nützliches Werk zu thun und werde nicht darin ermüden.

Diese deutsche Ausgabe der Theorie der höheren ebenen Curven schliesst sich der soeben auch zur Veröffentlichung gelangenden 3. Auflage der „Kegelschnitte“ an und die neue Auflage der Geometrie des Raumes wird ihr bald nachfolgen.

Schliesslich ist es mir Bedürfniss, Herrn Dr. Noether auch an diesem Orte für die Freundlichkeit zu danken, mit der er meinem Wunsche nach einer übersichtlichen Darstellung der Resultate entsprach, welche er in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Brill in selbständiger Entwickelung und Verwerthung einer Theorie gewonnen hat, die als von Herrn Sylvester herrührend einen wichtigen Bestandtheil dieses Buches bildet; man findet diese Uebersicht am Ende der Zusätze.

Hirslanden bei Zürich, August 1873.

Dr. Wilh. Fiedler.

Inhaltsverzeichniss.

I. Kapitel.

Von den Coordinaten.

II. Kapitel.

Von den allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Curven.

I. Abschnitt. Ueber die Anzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung.

II. Abschnitt. Ueber die Natur der vielfachen Punkte und Tangenten der Curven.

III. Abschnitt. Von der graphischen Darstellung der Curven.

IV. Abschnitt. Pole und Polaren.

V. Abschnitt. Allgemeine Theorie der vielfachen Punkte und Tangenten.

VI. Abschnitt. Reciproke Curven.

III. Kapitel.

Theorie der Enveloppen.

IV. Kapitel.

Metrische Eigenschaften der Curven.

V. Kapitel.

Curven dritter Ordnung.

I. Abschnitt. Durchschnitt mit anderen Curven.

II. Abschnitt. Pole und Polaren.

III. Abschnitt. Classification der Curven dritter Ordnung.

VII. Kapitel.

Transcendente Curven.

VIII. Kapitel

Transformation der Curven.

IX. Kapitel.

Allgemeine Theorie der Curven.

Erstes Kapitel.

Von den Coordinaten.

1. Es giebt in der Ebene eine besondere gerade Linie, die Linie im Unendlichen oder die unendlich ferne Gerade derselben und in dieser Linie zwei besondere nicht reelle Punkte, die Kreispunkte im Unendlichen der Ebene. Ein geometrischer Satz hat entweder keine Beziehung auf diese Linie und zu diesen Punkten und ist dann descriptiv oder projectivisch, oder er steht in Beziehung zu ihnen und ist dann metrisch. (Vergl. „Kegelschnitte", Kap. XXII.)

2. Die zur Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene dienenden Coordinaten sind rechtwinklige oder schiefe Parallel-Coordinaten (Cartesische) oder trimetrische (projectivische) Coordinaten; die letztern umfassen als einen Specialfall die erstern. („Kegelschnitte" Art. 68.) Im Allgemeinen kann man sagen, dass die Cartesischen und insbesondere die rechtwinkligen Coordinaten vorzugsweise geeignet sind für die Untersuchung der metrischen Eigenschaften, die trimetrischen Coordinaten dagegen ebenso für die der descriptiven oder projectivischen Eigenschaften. Es ist aber auch für die Untersuchungen der ersten Art oft von Vortheil, die Bezeichnung der trimetrischen Coordinaten zu gebrauchen, da dann die Gleichung der Curve homogen in x, y, z erscheint, wo x, y die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten sind und z die Einheit vertritt.

3. Die trimetrischen Coordinaten eines Punktes sind als die senkrechten Entfernungen p, q, r desselben von drei

gegebenen Geraden definiert worden („Kegelschnitte“ Art. 62.), die ein Dreieck bilden; sie genügen daher, wenn a, b, c die Längenzahlen der Seiten desselben und $\triangle$ seine Flächenzahl bedeuten und wenn p, q, r für jeden im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt als positiv angesehen werden, der Relation

$$ap + bq + cr = 2\triangle. \quad \text{(„Kegelschnitte“ Art. 63.)}$$

Mittelst derselben kann eine ursprünglich nicht homogene Gleichung homogen gemacht werden und es wird vorausgesetzt, dass dies geschehen sei und also die benutzten Gleichungen immer homogen sind.

4. Es ist von Vortheil, eine etwas allgemeinere Definition der trimetrischen Coordinaten x, y, z oder x_1, x_2, x_3 zu benutzen, indem man ohne ihre absolute Grösse zu fixieren sie als proportional zu gegebenen Vielfachen αp, βq, γr der ursprünglichen trimetrischen Coordinaten annimmt. Auf Grund der Bemerkung, dass die in einer gegebenen Richtung gemessene Entfernung eines Punktes von einer Geraden ein bestimmtes Vielfaches ihrer senkrechten Entfernung ist, kann diese Definition mit gleicher Allgemeinheit in folgenden Formen gegeben werden.

Die trimetrischen Coordinaten eines Punktes in der Ebene sind proportional

zu gegebenen Vielfachen der senkrechten Entfernungen —

zu gegebenen Vielfachen der in gegebenen Richtungen gemessenen Entfernungen —

zu gegebenen Vielfachen der in einer und derselben Richtung gemessenen Entfernungen —

zu den in gegebenen Richtungen gemessenen Entfernungen

des Punktes von drei festen geraden Linien.

Die drei gegebenen Geraden, die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sollen die Coordinatenaxen oder einfach die Axen und das von ihnen gebildete Dreieck das Fundamentaldreieck oder einfach das Dreieck heissen. Und es ist zu bemerken, dass zwischen den Grössen x_1, x_2, x_3, insofern ihre absoluten Werthe unbestimmt bleiben, keine identische Relation stattfinden kann, so wie dass die von uns zu benutzenden Gleichungen als wesentlich homogen Relationen zwischen den gegenseitigen Verhältnissen der Coordinaten ausdrücken.

5. Wenn es auch im **Allgemeinen** nicht von Vortheil ist, so können wir doch die absoluten Grössen der Coordinaten fixieren, indem wir x_1, x_2, x_3 respective gleich αp, βq, γr setzen; dann sind die Coordinaten eines Punktes durch die Relation verbunden

$$\frac{a x_1}{\alpha} + \frac{b x_2}{\beta} + \frac{c x_3}{\gamma} = 2 \Delta,$$

die daher dienen kann, die absoluten Grössen der Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes zu bestimmen, nachdem ihre Verhältnisse bekannt sind.

6. Von der Entfernung eines Punktes von einer Geraden gilt natürlich, dass sie das Zeichen wechselt, wenn der Punkt von der einen Seite der Linie auf die andere geht. Die Festsetzung der positiven und negativen Seite ist für jede der drei Linien willkürlich, aber es ist im Allgemeinen zweckmässig, sie so zu wählen, dass für jeden Punkt im Innern des Dreiecks die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ oder falls sie in absoluter Grösse bestimmt wären die Coordinaten x_1, x_2, x_3 selbst positiv sind.

7. Wenn wir annehmen, dass die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gegebene Linien sind, so hängen die Werthe der Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ von denen der impliciten Constanten α, β, γ ab und sind somit nicht vollständig bestimmt; sie können vielmehr so bestimmt werden, dass $x_1 : x_2 : x_3$ für einen gegebenen Punkt gegebene Werthe erhalten. So vollendet z. B. die Annahme, dass für den gegebenen Punkt von den senkrechten Abständen p_1, q_1, r_1 jene Verhältnisse die gegebenen Werthe $x_1' : x_2' : x_3'$ haben, die Bestimmung der Coordinaten, weil

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{x_1'}{p_1} p : \frac{x_2'}{q_1} q : \frac{x_3'}{r_1} r,$$

ist. Ebenso können wir unsere Coordinaten so wählen, dass eine gegebene lineare Gleichung $A x_1 + B x_2 + C x_3 = 0$ eine gegebene Gerade darstellt; denn wenn $ap + bq + cr = 0$ die Gleichung der gegebenen Linie in Function der Coordinaten p, q, r ist, so haben wir

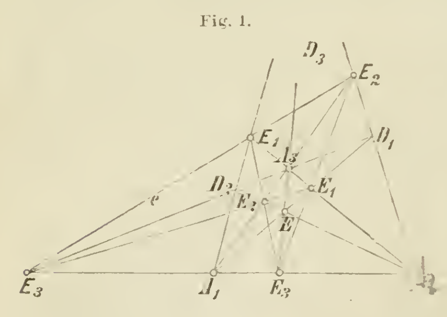
$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{a}{A} p : \frac{b}{B} q : \frac{c}{C} r.$$

Von den eben geschriebenen Gleichungen wird jedoch selten in ihrer allgemeinen Form Gebrauch gemacht, man denkt vielmehr insbesondere vortheilhaft die Coordinaten so fixiert, dass der Punkt $(1:1:1)$ ein gegebener Punkt der Figur oder die gerade Linie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ eine gegebene Linie der Figur ist.

8. Wir können von dem Punkte y_i sprechen in der Meinung, dass es derjenige Punkt sei, für dessen Coordinaten die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ gleich seien den Verhältnissen $y_1 : y_2 : y_3$; wenn wir von den Coordinaten eines Punktes sagen, sie seien gleich y_1, y_2, y_3 oder es seien x_1, x_3, x_3 respective gleich y_1, y_2, y_3, so hat das denselben Sinn; die absoluten Grössen sind unbestimmt. So hätten wir in (7) statt vom Punkte $(1:1:1)$ sprechen können von dem Punkte $(1, 1, 1)$.

9. Der Punkt $(1, 1, 1)$ und die Gerade $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ oder allgemeiner der Punkt (y_1, y_2, y_3) und die Gerade $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0$ stehen in einer einfachen geometrischen Beziehung zum Fundamentaldreieck: Wenn E der bezeichnete Punkt ist, so ist die Gerade die Linie $E_1\ E_2\ E_3$, welche die Durchschnittspunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks $A_1\ A_2\ A_3$ mit den entsprechenden Seiten desjenigen Dreiecks $E_1\ E_2\ E_3$ verbindet, welches die Schnittpunkte der Verbindungslinien von E mit den Ecken des Fundamentaldreiecks mit den Gegenseiten desselben bilden; oder umgekehrt, wenn $E_1\ E_2\ E_3$ die bezeichnete Gerade ist, so erhalten wir den Punkt E, indem wir ihre Schnittpunkte $E_1\ E_2\ E_3$ in den Seiten des Fundamentaldreiecks mit den respectiven Gegenecken desselben verbinden und von den Ecken D_1, D_2, D_3 des so entstehenden neuen Dreiecks nach den entsprechenden Ecken des Fundamentaldreiecks die geraden Linien ziehen. Die Gerade $E_1\ E_2\ E_3$ und der Punkt E sind durch die Ecken und Seiten des Dreiecks harmonisch getrennt, die erste ist die

Fig. 1.



harmonisch zugeordnete Gerade oder Harmonikale des Letzteren oder sie sind in einem später erst zu erläuternden Sinne Pole und Polare in Bezug auf das Dreieck, welches als eine Curve dritter Ordnung angesehen werden darf. Wenn von beiden eines gegeben ist, der Punkt E oder die Gerade $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3$, so ist das andere bestimmt und es ist gleichbedeutend ob man annimmt, der Punkt (1, 1, 1) sei ein gegebener Punkt oder die Linie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ sei eine gegebene Gerade.

10. Wenn wir die Gerade $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ als eine gegebene Linie betrachten, so sind vier gerade Linien gegeben und wenn man setzt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ d. h. wenn man x_4 als Zeichen für $-x_1 - x_2 - x_3$ wählt, so sind die Coordinaten so bestimmt, dass $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ gegebene Gerade repräsentieren.

11. Die Coordinaten können so gewählt werden, dass der Punkt (1, 1, 1) der Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks oder dass die Gerade $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade seiner Ebene ist. In Rücksicht auf die Gleichung $ap + bq + cr = 2\triangle$ kommt diess auf die Annahme hinaus, dass

$$x_1 : x_2 : x_3 = ap : bq : cr$$

sei, d. h. wenn wir den Punkt mit den drei Ecken des Dreiecks verbinden, so dass dasselbe dadurch in drei Dreiecke zerfällt, so sind die Coordinaten x_1, x_2, x_3 den Flächenzahlen dieser es zusammensetzenden Dreiecke gleich oder in andern Worten, sie sind proportional den durch die bezüglichen Höhen des Dreiecks dividierten Abständen des Punktes von seinen Seiten. Und wenn wir annehmen, dass

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ respective} = \frac{ap}{2\triangle},\ \frac{bq}{2\triangle},\ \frac{cr}{2\triangle}$$

seien, d. h. gleich den Quotienten der Flächenzahlen der componirenden Dreiecke und des Fundamentaldreiecks, so wird die identische Relation der Coordinaten, durch welche ihre absolute Grösse bestimmt wird, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

12. Wenn insbesondere das Fundamentaldreieck gleichseitig ist und die x_i als proportional zu den normalen Abständen von den Seiten gelten, so ist der Punkt (1, 1, 1) der Mittelpunkt des Dreiecks und $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ die un-

endlich ferne Gerade seiner Ebene, und wenn man in Festsetzung der absoluten Grösse die x_1, x_2, x_3 den normalen Entfernungen gleich und die Höhe des Dreiecks als Einheit nimmt, so sind die Coordinaten des Mittelpunktes $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und die identische Relation zwischen den Coordinaten ist wie in (11) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

13. In dem eben bezeichneten Falle des gleichseitigen Fundamentaldreiecks und der unendlich fernen Geraden als $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ sind die Coordinaten der Kreispunkte im Unendlichen

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \omega : \omega^2 \quad \text{und} \quad = 1 : \omega^2 : \omega$$

für ω als eine imaginäre Cubicwurzel der Einheit. Denn für X, Y als rechtwinklige Cartesische Coordinaten mit dem Anfangspunkt in der Ecke ($x = 0$, $y = 0$) des Fundamentaldreiecks und der Axe der x in der Seite $x_1 = 0$ desselben ist

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ respective } = Y,\ \frac{X\sqrt{3} - Y}{2},\ \frac{2 - X\sqrt{3} - Y}{2}$$

und da für die Kreispunkte im Unendlichen X und Y unendlich gross sind mit $X \pm iY = 0$ ($i = \sqrt{-1}$ wie üblich), so erhält man

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2} : \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

also für $\omega = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ und somit $\omega^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \omega : \omega^2 \text{ oder } = 1 : \omega^2 : \omega.$$

14. Wenn eine der Axen, sagen wir die der x_3, die unendlich ferne Gerade der Ebene ist, so ist die Entfernung r als eine unendlich grosse Constante zu betrachten, und γr ist daher eine Constante, welche endlich gemacht und ohne Verlust der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden kann; wir haben also $x_1 : x_2 : x_3 = \alpha p : \beta q : 1$ und die Coefficienten α, β können so bestimmt werden, dass αp, βq die in der Richtung der jedesmaligen andern Geraden gemessenen Abstände des Punktes von der Geraden $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ darstellen, so dass man für X, Y als die Cartesischen Coordinaten des Punktes die Relation hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = Y : X : 1.$$

Mit andern Worten und indem man zugleich die absoluten Grössen fixiert, x_1, x_2 und $x_3 = 1$ sind die Cartesischen Coordinaten des Punktes in Bezug auf zwei beliebige Axen der Coordinaten.

15. Im Vorhergehenden haben wir nur die unendlich ferne Gerade, nicht aber die imaginären Kreispunkte der Ebene zum Fundamentaldreieck in Beziehung gesetzt; in Folge dessen sind die resultierenden Cartesischen Coordinaten im Allgemeinen schiefwinklig. Sie werden aber rectangulär, indem man die Linien $x = 0$, $y = 0$ als zwei zu den Kreispunkten harmonische Gerade oder als rechtwinklig zu einander annimmt. Die Schnittpunkte der Geraden $x = 0$, $y = 0$ mit der unendlich fernen Geraden oder ihre Richtungen bilden mit den Kreispunkten oder die nach den letzteren gehenden Strahlen mit jenen Geraden eine harmonische Gruppe.

16. Zuweilen ist es zweckmässig, die imaginären Coordinaten $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$, $z = 1$ zu gebrauchen, die wir Kreis-Coordinaten nennen wollen.

17. Die vorher betrachteten Coordinaten sind Punkt-Coordinaten, jede Gruppe der x_i bestimmt einen Punkt in der Ebene des Dreiecks. Zur Bestimmung der Lage einer geraden Linie dienen in analoger Weise die Linien-Coordinaten oder Tangential-Coordinaten. Wenn in einem System trimetrischer Punkt-Coordinaten x_1, x_2, x_3 die gerade Linie durch die Gleichung $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ dargestellt ist, so giebt es ein entsprechendes System von Linien-Coordinaten, in welchem ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten der fraglichen Linie sind. Wir bemerken, dass nach dieser Definition nur die Verhältnisse der ξ_1, ξ_2, ξ_3 bestimmt sind, während ihre absoluten Grössen unbestimmt bleiben, ganz ebenso wie für die Punkt-Coordinaten nach ihrer allgemeinsten Auffassung.

18. Eine lineare Gleichung $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$ zwischen den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, welche eine gerade Linie bestimmen, verbindet die ganze Schaar der Geraden, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen. Dieselben gehen alle durch den Punkt, dessen Coordinaten im entsprechenden System der Punkt-Coordinaten (x_i) durch (a, b, c) bezeichnet sind; denn die lineare Gleichung $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$ drückt aus,

dass die Gleichung in Punkt-Coordinaten $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ befriedigt wird, indem man darin für x_1, x_2, x_3 respective a, b, c substituiert. In den Linien-Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 repräsentiert also die Gleichung $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$ einen Punkt, und zwar denjenigen Punkt, dessen Coordinaten in dem entsprechenden System von Punkt-Coordinaten a, b, c sind. Und allgemein stellt eine homogene Gleichung in den Linien-Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 diejenige Curve dar, welche die Enveloppe aller der geraden Linien $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ ist, für welche die Coefficienten ξ_1, ξ_2, ξ_3 der fraglichen Gleichung genügen. Man sagt, diese Gleichung sei die Tangentialgleichung der Enveloppe oder ihre Gleichung in Linien-Coordinaten. Mit anderen Worten, die Gleichung einer Curve in Linien-Coordinaten ist die Gleichung zwischen ξ_1, ξ_2, ξ_3, welche ausdrückt, dass die gerade Linie

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

eine Tangente der Curve ist.

19. Im Vorhergehenden sind die Linien-Coordinaten ξ_i definiert worden mittelst des entsprechenden Systems von Punkt-Coordinaten x_i und es ist die Bedeutung der Verhältnisse ξ_1, ξ_2, ξ_3 dadurch allerdings vollständig bestimmt. Nur um die Analogie zwischen beiden Arten von Coordinaten vollständiger zu begründen, ist es wünschenswerth, eine unabhängige quantitative Definition der Linien-Coordinaten zu geben. Man kann sagen, dass die trimetrischen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 einer Linie gegebenen Vielfachen der Entfernungen proportional sind, welche von drei festen Punkten aus (die ein Dreieck bilden) in vorgeschriebenen Richtungen bis zur gedachten Linie gemessen werden. Denken wir nämlich sie beispielsweise den senkrechten Entfernungen der Linie von den drei festen Punkten gleich und beziehen wir die Figur auf Cartesische Coordinaten, so dass die Coordinaten der drei Punkte respective sind (α, β), (α', β'), (α'', β'') und die Gleichung der Geraden $AX + BY + C = 0$, so gelten die Relationen

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = A\alpha + B\beta + C : A\alpha' + B\beta' + C : A\alpha'' + B\beta'' + C$$

oder die Gleichung der Linie ist

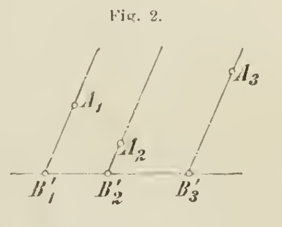
$$\begin{vmatrix} 0, & X, & Y, & 1 \\ \xi_1, & \alpha, & \beta, & 1 \\ \xi_2, & \alpha', & \beta', & 1 \\ \xi_3, & \alpha'', & \beta'', & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und die Coefficienten von ξ_1, ξ_2, ξ_3 in derselben sind somit gegebene lineare Functionen von X, Y, 1; indem wir dieselben durch x_1, x_2, x_3 respective bezeichnen, haben wir ein System trimetrischer Coordinaten gebildet, die Gleichung wird in $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ übergeführt und die neue Definition stimmt mit der vorher gegebenen überein.

Ebenso wie in § 7. können wir die Linien-Coordinaten so bestimmen, dass die gerade Linie (1, 1, 1) eine gegebene Linie der Figur ist oder der Punkt $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ ein gegebener Punkt derselben.

20. Einige specielle Fälle sind bemerkenswerth: 1) Wenn α, β, γ die in gegebener Richtung gemessenen Entfernungen der veränderlichen Geraden von den Punkten A_1, A_2, A_3 sind, nämlich $\alpha = A_1 B_1'$, $\beta = A_2 B_2'$, $\gamma = A_3 B_3'$, so können die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 diesen Entfernungen proportional angenommen werden, d. h. $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \alpha : \beta : \gamma$. Setzen wir dann den Punkt A_3 in der gegebenen Richtung, d. h. in $B_3' A_3$ unendlich fern voraus, so hat γ einen unendlichen als Constante zu betrachtenden Werth und indem man

Fig. 2.



$\xi_1 : \xi_2 : \frac{\xi_3}{\gamma} = \alpha : \beta : 1$ schreibt, kann man statt der ursprünglichen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Grössen $\xi_1, \xi_2 \frac{\xi_3}{\gamma}$ als Coordinaten nehmen, d. h. α, β, 1. Man hat so ein System von zwei Coordinaten α, β gebildet, welche den in einer gegebenen Richtung gemessenen Entfernungen der Linie von zwei festen Punkten respective gleich sind.

2) In der umstehenden Figur ist:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{A_1 A_2'}{A_3 A_2'}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{A_2 A_1'}{A_3 A_1'},$$

oder was dasselbe ist

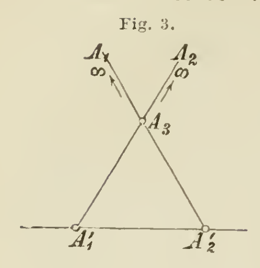


Fig. 3.

$$\frac{\alpha}{A_1A_2'} : \frac{\beta}{A_2A_1'} : \gamma = \frac{1}{A_3A_2'} : \frac{1}{A_3A_1'} : 1.$$

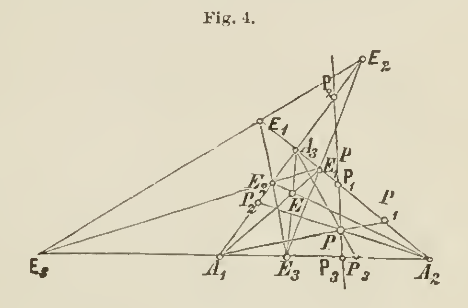
Denken wir also die Punkte A_1 A_2 als die Richtungen der Geraden $A_2'A_3$, $A_1'A_3$ respective, so dass A_1A_2', A_2A_1' unendlich grosse als Constanten zu betrachtende Werthe haben, so können wir statt der zu α, β, γ proportionalen Coordinaten die zu $\frac{\alpha}{A_1A_2'}$, $\frac{\beta}{A_2A_1'}$, γ proportionalen nehmen und somit auch die Grössen $\frac{1}{A_3A_2'}$, $\frac{1}{A_3A_1'}$, 1; wir haben so ein System von zwei Coordinaten, welche die Reciproken der in zwei gegebenen Richtungen gemessenen Entfernungen der Linie von einem festen Punkte sind.

21. Die Theorie der Linien-Coordinaten ist, ganz abgesehen von der Ausdehnung ihres Gebrauchs von der höchsten Wichtigkeit; denn sie zeigt, dass mit dem in Punkt-Coordinaten geführten Beweis irgend eines descriptiven Theorems durch die einfache Anwendung der Theorie der reciproken Polaren oder auf Grund der die Geometrie beherrschenden Dualität das correlative Theorem bewiesen wird, oder vielmehr, dass durch die nämliche Entwickelung gleichzeitig und gleichmässig zwei Theoreme bewiesen werden, wenn wir die x_i als Punkt-Coordinaten und wenn wir sie als Linien-Coordinaten interpretieren. Jeder Schritt des Beweises hat in diesem Sinne zwei Bedeutungen, den beiden Interpretationen und Sätzen entsprechend. Und ganz ebenso ist der Beweis eines Theorems in Linien-Coordinaten zugleich der Beweis des correlativen Theorems; mit dem einzigen Unterschiede, dass der Uebergang dabei von der weniger bekannten Theorie der Linien-Coordinaten zu der vertrauteren der Punkt-Coordinaten geschieht. Wenn man die ursprünglichen Linien-Coordinaten ξ_i als die Punkt-Coordinaten des Pols der betrachteten Linie in Bezug auf den Kegelschnitt $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ ansieht, so liegt darin ein Mittel, den Uebergang zu erläutern.

22. Die allgemeinen projectivischen Coordinaten x_i und ξ_i

der Art. 4. u. 19. lassen eine modificierte Auffassung zu, welche ihre constructive Verwendung sehr einfach gestaltet, ihre Specialfälle erhellt und ihre Reciprocität in allgemeinster Weise darlegt. Die x_i geben die Bestimmung aller Punkte P der Ebene durch vier feste Punkte A_1, A_2, A_3, E, von denen keine drei in einer Geraden liegen; die ξ_i die Bestimmung aller Geraden p der Ebene durch vier feste Gerade a_1, a_2, a_3, e, von denen keine drei durch einen Punkt gehen. Bezeichnen wir dann durch e_i und p_i die in gleichen Richtungen gemessenen Abstände von E respective P bis zu den Fundamentallinien $A_j A_k$ und durch ε_i, π_i die in zwei bestimmten Richtungen gemessenen Längen von den Fundamentalpunkten $a_j a_k$ bis zu den Geraden e und p, so gelten nach Art. 4., 19. die Beziehungen

Fig. 4.



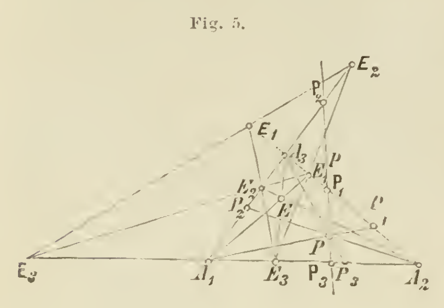
$$\frac{x_i}{x_k} = \frac{p_i : e_i}{p_k : e_k} = \frac{e_k}{e_i} : \frac{p_k}{p_i} = (A_j \, A_i \, A_k \, E \, P),$$

$$\frac{\xi_i}{\xi_k} = \frac{\pi_i : \varepsilon_i}{\pi_k : \varepsilon_k} = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} : \frac{\pi_k}{\pi_i} = (a_j \cdot a_i \, a_k \, e \, p),$$

wo (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 293 Beisp. 2) mit $(A_j . A_i A_k E P)$ das Doppelverhältniss des Büschels der vier Geraden $A_j A_i$, $A_j A_k$, $A_j E$, $A_j P$ und mit $(a_j \cdot a_i a_k e p)$ das der Reihe der vier Punkte $a_j a_i$, etc. bezeichnet sind. Die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ oder $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ führen bei gegebenen Fundamental-Elementen zur Construction des zugehörigen Punktes P respective der zugehörigen Geraden p durch die zweimalige Construction des vierten Strahls respective Punktes zu drei gegebenen Strahlen eines Büschels oder Punkten einer Geraden bei gegebenem Doppelverhältniss, oder die Construction eines Strahls oder Punktes nach gegebenem Theilungsverhältniss. (Art. 294. a. a. O.) Für ein anderes System von Fundamental-Elementen liefern dieselben Coordinatenverhältnisse andre Punkte und Gerade, die ein zum ersten projectivisches (collineares) System bilden.

Verbindet man die Fundamentalpunkte A_i mit den Fundamentallinien a_i als ihren Gegenseiten zu einem Dreieck, und nimmt man überdiess die Gerade e als Polare des Punktes E in Bezug auf das Dreieck (Art. 9.) an, so dass die $(A_i\, A_k\, \mathsf{E}_j\, E_j) = -1$ sind, so wird immer, wenn die Gerade p den Punkt P enthält, zwischen ihren Coordinaten ξ_i und seinen Coordinaten x_i die Relation

Fig. 5.



$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

erfüllt, weil z. B. $-\xi_2\, x_2 : \xi_3\, x_3 = (A_2\, A_3\, \mathbf{P}_1\, P_1)$ und $-\xi_1\, x_1 : \xi_3\, x_3 = (A_3\, A_1\, \mathbf{P}_2\, P_2) = (A_3\, P_1\, \mathbf{P}_1\, A_2)$ sind*). Diess ist für die ξ_i als Constanten, nämlich als Coordinaten einer Geraden, die Gleichung derselben und für die x_i als Constanten, nämlich als die Coordinaten eines Punktes, die Gleichung dieses Punktes [1]). Die vorher bezeichnete Construction ist also auch die Construction des Punktes und der Geraden aus ihren respectiven Gleichungen.

Wird eine der Seiten a_i des Fundamentaldreiecks als unendlich ferne Gerade gedacht und zugleich $A_i\, E_j = A_i\, E_k$ gemacht, also auch $A_i\, \mathsf{E}_j = A_i\, \mathsf{E}_k = -A_i\, E_j$, so erhält man die Cartesischen Punkt- und die Plücker'schen Linien-Coordinaten für schiefwinklige Axen.

23. Es erscheint von Werth, die allgemeinen Gesetze der Transformation der Coordinaten so zu geben, dass sie für alle Fälle eine leichte Anwendung gestatten. Dieselben lassen sich, als bezüglich auf congruente Systeme in sich deckender Lage, an die Betrachtung projectivisch collinearer Systeme also an die lineare Substitution (vergl. „Kegelschnitte" Art. 375 f., 83):

$$\mu\, x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3\,, \qquad \varrho\, \xi_{1k} = a_{k} \xi_1' + a_{2k} \xi_2' + a_{3k} \xi_3'$$

anschliessen, die nach dem Vorigen ihre vollständige geometrische Deutung erhalten [1]). Sei das eine der beiden Sy-

*) Ist e unabhängig von E, so erhält jene Relation die Form $k_1\, \xi_1\, x_1 + k_2\, \xi_2\, x_2 + k_3\, \xi_3\, x_3 = 0$.

steme auf die Fundamental-Elemente $A_1\ A_2\ A_3\ E\ e$ bezogen, denen im andern die Elemente $A_1'\ A_2'\ A_3'\ E'\ e'$ entsprechen und das andere auf die Elemente $A_1^{*\prime} A_2^{*\prime} A_3^{*\prime}\ E^{*\prime}\ e^{*\prime}$ bezogen, denen im ersten die $A_1^* A_2^* A_3^*\ E^*\ e^*$ entsprechen; dann erhält man für die entsprechenden A_k' der Fundamental-Punkte A_k des ersten im zweiten oder Bildsystem die Gleichungen

$\frac{\mu e_k}{h_k} x_i' = a_{ik}$ für e_k und h_k als die gleichgerichteten

Abstände von E und A_i von der Seite a_i;

und für den dem Einheitspunkt E des ersten Systems entsprechenden Punkt E' des zweiten

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \mu x_i.$$

Und umgekehrt für die entsprechenden a_i^* der Fundamentallinien $a_i^{*\prime}$ des zweiten im ersten Systeme

$$\frac{\varrho \varepsilon_i'}{h_{ki}'} \xi_k = a_{ik} \quad \text{und} \quad a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} = \varrho \xi_k$$

für die der Einheitgeraden $e^{*\prime}$ des zweiten Systems entsprechende Gerade e^* im ersten System.

Da nun im Falle der Transformation die A_i, E, e mit den A_i', E', e' und die $A_i^{*\prime}$, $E^{*\prime}$, $e^{*\prime}$ mit den A_i^*, E^*, e^* respective zusammen fallen, so erhalten die Coefficienten a_{ik} der die Coordinatentransformation ausdrückenden linearen Substitution, durch welche die neuen Punktcoordinaten als Functionen der alten und die alten Liniencoordinaten als Functionen der neuen ausgedrückt werden (oder umgekehrt mit Wechsel der Worte alt und neu) die folgenden Bedeutungen: Es ist $a_{ik} = \frac{\mu e_k}{h_k} x_i' = \frac{\varrho \varepsilon_{ki}'}{h_i'} \xi_k$; die Substitutionscoefficienten derselben Vertikalreihe sind den drei neuen Coordinaten der Fundamentalpunkte des alten Systems und die Substitutionscoefficienten derselben Horizontalreihe den drei alten Coordinaten der Fundamentallinien des neuen Systems proportional. Es ist auch

$$a_{ik} : a_{jk} = x_i' : x_j', \quad a_{ik} : a_{il} = \xi_k : \xi_l,$$

unmittelbar an die Construction anschliessend. Und es ist

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \mu x_i', \quad a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} = \varrho \xi_k,$$

die Coefficientensummen nach horizontalen Reihen sind proportional den neuen Coordinaten des Einheitpunktes im alten

und die nach verticalen Reihen den alten Coordinaten der Einheitlinie im neuen System.

Sind z. B. die Coordinaten x_i' Cartesische Punktcoordinaten mit $x_1' = 1$, $x_2' = x$, $x_3' = y$, und haben die Fundamentalpunkte A_i eines Systems projectivischer Coordinaten die Cartesischen Coordinaten $x^{(i)}$ und $y^{(i)}$, ferner der Einheitspunkt E desselben die Coordinaten $x^{(e)}$ und $y^{(e)}$, so hat man die Gleichungen

$$a_{1i} : a_{2i} : a_{3i} = 1 : y^{(i)} : x^{(i)} \text{ für } i = 1,\ 2,\ 3$$

und dazu

$$\mu = a_{11} + a_{12} + a_{13}\,,\ \mu y^{(e)} = a_{21} + a_{22} + a_{23}\,,\ \mu x^{(e)} = a_{31} + a_{32} + a_{33}.$$

Daraus ergiebt sich die Gruppe der allgemeinen Lösungen für diesen Uebergang

$$a_{11} = \mu \frac{\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ y^{(e)}, & y^{(2)}, & y^{(3)} \\ x^{(e)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ y^{(1)}, & y^{(2)}, & y^{(3)} \\ x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \end{vmatrix}}\,,\quad a_{12} = \mu \frac{\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ y^{(1)}, & y^{(e)}, & y^{(3)} \\ x^{(1)}, & x^{(e)}, & x^{(3)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ y^{(1)}, & y^{(2)}, & y^{(3)} \\ x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \end{vmatrix}}\,,$$

$$a_{13} = \mu \frac{\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ y^{(1)}, & y^{(2)}, & y^{(e)} \\ x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(e)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1 \\ y^{(1)}, & y^{(2)}, & y^{(3)} \\ x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(3)} \end{vmatrix}}\,;$$

$$a_{21} = a_{11} \cdot y^{(1)},\quad a_{22} = a_{12} \cdot y^{(2)},\quad a_{23} = a_{13} \cdot y^{(3)};$$
$$a_{31} = a_{11} \cdot x^{(1)},\quad a_{32} = a_{12} \cdot x^{(2)},\quad a_{33} = a_{13} \cdot x^{(3)}.$$

Man erkennt die Gleichungen der Transformationen rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten in andere rechtwinklige Cartesische leicht als den speciellsten Fall der Anwendung dieser allgemeinen Gesetze.

Die blosse Veränderung des Einheitpunktes bei festgehaltenen Fundamentalpunkten ergiebt sich so oder auch unmittelbar nach den Definitionen des Art. 22. als äquivalent der Multiplication der ursprünglichen Coordinaten mit Constanten von leicht angebbarem geometrischem Sinn.

Zweites Kapitel.

Von den allgemeinen Eigenschaften der Curven vom n^{ten} Grade.

I. Abschnitt.

Ueber die Anzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung.

24. Der erste Schritt zur Kenntniss der allgemeinen Eigenschaften der Curve n^{ten} Grades wird mit der Untersuchung der Anzahl der Glieder in ihrer Gleichung gethan. Sie setzt in den Stand durch einfache Zählung der Anzahl unabhängiger Constanten in einer vorgelegten Gleichung n^{ten} Grades zu erkennen, ob dieselbe eine der Formen ist, in welche jede Gleichung n^{ten} Grades übergeführt werden kann oder nicht.

Beispielsweise enthält die allgemeine Gleichung zweiten Grades fünf unabhängige Constanten; wenn daher eine andere Gleichung vom zweiten Grade gegeben ist, welche fünf Constanten enthält, so wie

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(ax+by+c)^2,$$
$$\{(x-\alpha)^2+(y-\beta^2)\}^{\frac{1}{2}}+\{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2\}^{\frac{1}{2}}=c,$$

so können wir dieselbe entwickeln und wie in Art. 90. der „Kegelschn." mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades identificieren, um dadurch eine hinreichende Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung von α, β, ... in Function der Coefficienten der allgemeinen Gleichung zu erhalten. Damit ist dann bewiesen, dass eine Gleichung zweiten Grades im Allgemeinen auf jede der beiden obigen Formen gebracht werden kann und ein Beweis für die Eigenschaften der Brennpunkte und Directrixen wäre dadurch gewonnen. Die Gleichung

$$(ax+by+c)^2=(a'x+b'y+c')\,(a''x+b''y+c'')$$

enthält sieben unabhängige Constanten und das Problem, dieselben in Function der Coefficienten der allgemeinen Gleichung zweiten Grades auszudrücken, ist somit unbestimmt, wie diess geometrisch evident ist, weil die Gleichung in diese

Form gebracht werden kann, indem man irgend zwei Tangenten des Kegelschnitts durch

$$a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{und} \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

und ihre Berührungssehne durch

$$ax + by + c = 0$$

repräsentiert denkt.

Die Gleichungen

$$(ax + by)^2 = cx + dy + e, \quad (ax + by + 1)(a'x + b'y + 1) = 0$$

enthalten nur je vier unabhängige Constanten und müssen daher eine andere Bedingung einschliessen, d. h. die allgemeine Gleichung kann nicht in eine dieser Formen übergeführt werden, wenn nicht eine weitere Bedingung erfüllt ist; wie es geometrisch daraus erhellt, dass die erste Gleichung eine Parabel und die zweite ein Paar von geraden Linien darstellt. Die allgemeine Gleichung des Kreises

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

die nur drei ersichtliche Constanten enthält, muss zwei Bedingungen einschliessen oder die allgemeine Gleichung kann nur bei Erfüllung von zwei Bedingungen auf diese Form gebracht werden. Die Gleichung

$$S - kS' = 0,$$

die nur eine Constante zeigt und in welchen S und S' zwei gegebenen Functionen vom zweiten Grade in den Coordinaten darstellen, muss vier Bedingungen einschliessen, wie bekannt ist, weil der durch diese Gleichung dargestellte Kegelschnitt durch vier feste Punkte geht oder vier feste Tangenten besitzt, je nachdem wir die Veränderlichen als Coordinaten eines Punktes oder als solche einer Geraden voraussetzen.

25. Einige Vorsicht ist bei Anwendung dieser Principien unentbehrlich. So scheint die Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = ax + by + c$$

fünf Constanten zu enthalten und daher zu den Formen zu gehören, in welche die allgemeine Gleichung zweiten Grades übergeführt werden kann; da aber die Entwicklung zeigt, dass die Constanten nicht in die höchsten Glieder der Gleichung eintreten, und dass also nur drei Gleichungen zur Bestimmung derselben entstehen, so müssen wir schliessen,

dass die Gleichung eines Kegelschnitts nur dann in diese Form gebracht werden kann, wenn derselbe zweien bestimmten Bedingungen genügt. Ebenso ist die Gleichung

$$aS_1 + bS_2 + cS_3 + dS_4 + eS_5 + fS_6 = 0,$$

wo $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ etc. sechs Kegelschnitte darstellen, eine Form, in welche die Gleichung jedes Kegelschnitts gebracht werden kann. Setzen wir aber voraus, dass drei der Gleichungen dieser Kegelschnitte durch eine Relation von der Form $S_3 = kS_1 + lS_2$ verbunden sind, so zeigt die Substitution dieses Werthes, dass die Gleichung nur vier unabhängige Constanten enthält und dass also die Gleichung eines beliebigen Kegelschnitts nicht ohne Erfüllung einer Bedingung in diese Form gebracht werden kann.

26. Nach diesem Versuch, dem Leser eine Idee von der Art des Vortheils zu geben, welchen die Kenntniss der Zahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades gewähren kann, schreiten wir zur Untersuchung dieses Problems vor. Die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades zwischen zwei Variabeln kann geschrieben werden

$$\begin{array}{c} A \\ + Bx + Cy \\ + Dx^2 + Exy + Fy^2 \\ + \cdots \\ \cdots\cdots \\ + Px^n + Qx^{n-1}y + \cdots \quad + Rxy^{n-1} + Sy^n = 0. \end{array}$$

Die Zahl ihrer Glieder ist offenbar die Summe der Reihe $1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1)$ und ist daher $= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, wie früher „Kegelsch." Art. 91. bewiesen wurde.

Wir werden die allgemeine Gleichung oft in der abgekürzten Form

$$u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots \quad + u^{(n)} = 0$$

anwenden, wo $u^{(p)}$ die Vereinigung der Glieder darstellt, welche in x und y vom Grade p sind, also $u^{(o)}$ das absolute Glied, $u^{(n)}$ die Glieder vom höchsten Grade.

Die Gleichung in projectivischen Coordinaten kann ganz analog in der Form

$$u^{(o)} x_1^{\,n} + u^{(1)} x_1^{\,n-1} + u^{(2)} x_1^{\,n-2} + \cdots + u^{(n-1)} x_1 + u^{(n)} = 0$$

geschrieben werden, wenn wir unter $u^{(p)}$ eine vollständige

homogene Function p^{ten} Grades in x_2, x_3 verstehen, deren Glieder in der Gleichung sämmtlich den Factor x_1^{n-p} enthalten, nach Aussonderung desselben. Man kann sie daher auch in der symbolischen Form einer n^{ten} Potenz des linearen Trinoms schreiben, nämlich $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = 0$, indem man bei den Gliedern der Entwickelung wie $a_1^{n-p} a_2^p x_1^{n-p} x_2^p$ das Coefficientenproduct nicht als solches, sondern als einen neuen Coefficienten fasst, den man durch $a_{11..122..2}$ bezeichnen kann, wenn hier die Anzahl der Indices 1 und 2 respective $(n - p)$ und p ist. Die Zahl der Glieder ist offenbar in jedem Falle dieselbe wie im vorhergehend Erörterten.

27. Die Zahl der zur Bestimmung einer Curve n^{ter} Ordnung nothwendigen Bedingungen ist offenbar um Eins kleiner als die Zahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung; sie ist also gleich $\frac{1}{2} n (n + 3)$. Denn die Gleichung repräsentiert noch dieselbe Curve, wenn wir sie mit irgend einer Constanten multiplicieren oder dividieren; wir können sie also durch A dividieren und die Curve wird bestimmt sein, wenn die $\frac{1}{2} n (n + 3)$ Grössen $B : A$, $C : A$, etc. bestimmt worden sind. So ist eine Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen bestimmt, wenn $\frac{1}{2} n (n + 3)$ ihrer Punkte bestimmt sind; denn die Coordinaten jedes Punktes, durch welchen die Curve geht, liefern durch Substitution in die allgemeine Gleichung eine lineare Relation zwischen den Coefficienten, wir erhalten also $\frac{1}{2} n (n + 3)$ Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung derselben Zahl unbekannter Grössen; diese Bestimmung ist ein Problem, welches im Allgemeinen nur e i n e Lösung zulässt. So lernen wir, dass eine Curve dritter Ordnung im Allgemeinen durch neun, eine der vierten durch vierzehn Punkte, und dass im Allgemeinen durch $\frac{1}{2} n (n + 3)$ Punkte eine und nur eine Curve n^{ter} Ordnung beschrieben werden kann.

28. Wenn wir sagen, dass $\frac{1}{2} n (n + 3)$ Punkte eine Curve n^{ter} Ordnung bestimmen, so darf diess nicht dahin verstanden werden, dass stets eine e i g e n t l i c h e Curve n^{ter} Ordnung durch diese Punkte gehe. Denn wir haben nur bewiesen, dass eine Gleichung n^{ten} Grades existiert, die durch die gegebenen Punkte befriedigt wird; aber diese Gleichung kann das Product von zwei oder mehreren Gleichungen geringerer Grade sein. So

bestimmen fünf Punkte im Allgemeinen einen Kegelschnitt; wenn aber drei von ihnen in einer geraden Linie liegen, so ist der Kegelschnitt eine uneigentliche Curve zweiter Ordnung, aus dieser geraden Linie und der Verbindungslinie der beiden andern Punkte gebildet. Und allgemein ist klar, dass durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte eine eigentliche Curve n^{ter} Ordnung nicht beschrieben werden kann, wenn mehr als np von ihnen auf einer Curve p^{ter} Ordnung liegen, — natürlich für $p < n$; denn wir würden sonst die Absurdität haben, dass zwei Curven von den Ordnungen n und p sich in mehr als np Punkten schneiden könnten. (Vergl. „Kegelsch." Art. 246.) Das durch eine solche Gruppe von Punkten gehende System n^{ter} Ordnung besteht vielmehr aus der Curve p^{ter} Ordnung in Verbindung mit einer Curve von der Ordnung $(n-p)$ durch die übrigen Punkte. Wir können auch eine obere Grenze feststellen für die Zahl der Punkte, welche unter den bestimmenden Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung auf einer Curve von der Ordnung p liegen können. Diese Zahl kann nicht grösser sein als $np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$. Denn wenn wir annehmen, dass ein weiterer Punkt, d. h. dass $np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2) + 1$ Punkte auf einer Curve p^{ter} Ordnung lägen, so ergiebt die Subtraction dieser Zahl von $\frac{1}{2}n(n+3)$ für die Zahl der übrigen Punkte $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$, und es kann daher durch dieselben eine Curve der Ordnung $(n-p)$ beschrieben werden. Sie bildet mit der Curve p^{ter} Ordnung zusammen ein System von der Ordnung n, das durch die gegebenen Punkte geht; und es ergiebt sich aus dem letzten Artikel, dass es im Allgemeinen unmöglich ist, ein anderes System derselben Ordnung durch sie zu bestimmen.

29. Es giebt jedoch Fälle, in denen die Lösung des Art. 27. hinfällig wird, wie wir an einem einfachen Beispiel zeigen wollen. Die Zahl der zur Bestimmung einer Curve dritter Ordnung erforderlichen Punkte ist neun, aber neun Punkte bestimmen nicht in jedem Falle eine einzige Curve dritter Ordnung, weil ja zwei Curven dritter Ordnung sich auch in neun Punkten durchschneiden, so dass durch diese neun Punkte sicherlich zwei und wie wir gleich sehen werden unendlich viele Curven dritter Ordnung gehen. Die Erklärung ist folgende: Wenn wir m lineare Gleichungen zwischen

m Unbekannten auflösen, so erhalten wir die Lösung im Allgemeinen in der Form eines Bruches; wir erhalten z. B. $B:A = B_1:A_1$, $C:A = C_1:A_1$, etc. Nun kann es geschehen, dass die gegebenen Werthe der Coordinaten der $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte das gleichzeitige Verschwinden von Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche herbeiführen; in diesem Falle sind die gegebenen Punkte offenbar unzureichend zur Bestimmung der Curve und es kann durch sie eine unendliche Menge von Curven n^{ter} Ordnung gelegt werden. Der geometrische Grund des Vorkommens solcher Fälle fordert weitere Erläuterung. Beginnen wir der Einfachheit wegen mit dem Beispiel der Curven dritter Ordnung. Seien $U = 0$, $V = 0$ die Gleichungen von zwei solchen Curven, beide durch acht gegebene Punkte gehend; so ist die Gleichung jeder Curve dritter Ordnung, die durch diese Punkte geht, von der Form $U - kV = 0$. Denn diese Gleichung bezeichnet nach ihrer Form eine Curve dritter Ordnung durch die acht gegebenen Punkte und sie enthält eine willkürliche Constante k, welche so bestimmt werden kann, dass die Curve durch irgend einen neunten Punkt geht; man erhält nämlich $k = U' : V'$, wenn U' und V' die Resultate der Substitution der Coordinaten des neunten Punktes in U und V sind. Diess giebt in jedem Falle einen bestimmten Werth für k, den einen ausgenommen, wo der fragliche neunte Punkt gleichzeitig den beiden Curven $U = 0$ und $V = 0$ angehört, die sich ja wirklich in noch einem neunten Punkte schneiden müssen. Für die Coordinaten dieses Punktes nimmt k den Werth $0 : 0$ an; auch zeigt ja die Form der Gleichung $U - kV = 0$ das Nämliche, dass in der That jede Curve, welche sie darstellt, durch alle Durchschnittspunkte der Curven $U = 0$ und $V = 0$ hindurch gehen muss. Wir erhalten also den wichtigen Satz: Alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht feste Punkte gehen, enthalten noch einen neunten festen Punkt. Und wir erkennen, dass neun Punkte nicht immer hinreichend sind, um eine Curve dritter Ordnung zu bestimmen; denn wir können durch die neun Durchschnittspunkte von zwei solchen Curven und durch einen beliebigen zehnten Punkt eine solche Curve beschreiben.

30. Dasselbe Raisonnement bleibt auf Curven jeder Ord-

nung anwendbar. Wenn die Zahl gegebener Punkte um Eins kleiner ist als die zur Bestimmung der Curven n^{ter} Ordnung nothwendige Zahl, also $\left\{\frac{1}{2}n(n+3)-1\right\}$, so ist $U-kV=0$ für $U=0$ und $V=0$ als zwei bestimmte durch diese Punkte gehende Curven n^{ter} Ordnung die allgemeinste Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, welche durch diese Punkte geht; denn die Gleichung enthält eine willkürliche Constante, der wir einen solchen Werth beilegen können, dass die besagte Curve durch einen beliebigen ausserdem gegebenen Punkt geht und somit vollständig bestimmt ist. Die Form der Gleichung zeigt aber, dass die Curve durch alle die n^2 Punkte hindurch geht, welche den Curven $U=0$, $V=0$ gemeinschaftlich sind und daher nicht nur durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ gegebene feste Punkte, sondern noch durch $n^2-\frac{1}{2}n(n+3)+1$ andere feste Punkte. Also: A l l e C u r v e n n^{ter} O r d n u n g, w e l c h e d u r c h $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ f e s t e P u n k t e g e h e n, e n t h a l t e n a u s s e r d i e s e n n o c h $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ a n d e r e f e s t e P u n k t e. Man nennt das System ein B ü s c h e l von C u r v e n n^{ter} O r d n u n g und die gemeinschaftlichen n^2 Punkte seine Grundpunkte.

31. Eine nützliche Folgerung aus dem vorhergehenden Satze lautet: W e n n v o n d e n n^2 S c h n i t t p u n k t e n v o n z w e i C u r v e n n^{ter} O r d n u n g np a u f e i n e r C u r v e p^{ter} O r d- n u n g l i e g e n $(p<n)$, s o l i e g e n d i e ü b r i g e n $n(n-p)$ a u f e i n e r C u r v e d e r O r d n u n g $(n-p)$. Wenn wir eine Curve $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung durch $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$ dieser übrigen Punkte legen, so bildet diese mit der Curve p^{ter} Ordnung zusammen eine Curve der Ordnung n, welche durch $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)+np$ Punkte geht; und weil diese Zahl $\left\{=\frac{1}{2}n(n+3)-1+\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\right\}$ nicht kleiner sein kann als $\frac{1}{2}n(n+3)-1$, so muss diese Curve alle die übrigen Punkte enthalten; weil endlich von denselben keiner auf der Curve p^{ter} Ordnung liegen kann, so liegen sie nothwendig alle auf der Curve $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung, der Behauptung entsprechend.

Es ist hier Vortheil gezogen von dem Umstande, dass die die Schnittpunkte von Curven n^{ter} Ordnung betreffenden Sätze keineswegs blos von eigentlichen Curven dieser Ord-

nung gelten, nach der Natur des Beweises in Art. 30, der auch dann bestehen bleibt, wenn U oder V in Factoren zerlegbar sind. Als ein Beispiel zu dem Satze dieses Artikels fügen wir den Satz bei: Wenn ein Polygon von $2n$ Seiten einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so liegen die $n(n-2)$ Punkte, in denen die ungeradzahligen Seiten die nicht anstossenden geradzahligen Seiten desselben durchschneiden, in einer Curve von der Ordnung $(n-2)$. Denn das Product aller ungeradzahligen Seiten bildet ein System n^{ter} Ordnung und das Product der geradzahligen Seiten ein anderes System n^{ter} Ordnung; beide Systeme schneiden sich in n^2 Punkten, nämlich, weil jede ungeradzahlige Seite zwei anliegende und $(n-2)$ nicht anliegende geradzahlige Seiten schneidet, in den $2n$ Ecken des Polygons und den $n(n-2)$ Punkten, von welchen unser Satz spricht. Weil aber nach der Voraussetzung die $2n$ Ecken in einem Kegelschnitt liegen, so sind nach dem Hauptsatz dieses Artikels die übrigen $n(n-2)$ Punkte in einer Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten.

32. Der Pascal'sche Satz ist ein specieller Fall $(n=3)$ des oben gegebenen; es mag aber zur Klarstellung des Princips der vorigen Entwickelungen von Vortheil sein, seinen Beweis in der hier einschlagenden Form auszudrücken. Bezeichnen wir die Gleichungen der Seiten des Sechsecks in ihrer natürlichen Folge mittelst der sechs ersten Buchstaben des Alphabets, $A=0$, $B=0$, . . ., $F=0$, so ist $ACE-kBDF=0$ die Gleichung eines Systems von Curven dritter Ordnung, welche durch die Punkte $A=0$, $B=0$; $B=0$, $C=0$; $C=0$, $D=0$; $D=0$, $E=0$; $E=0$, $F=0$; $F=0$, $A=0$ und überdiess durch $A=0$, $D=0$; $B=0$, $E=0$; $C=0$, $F=0$ hindurch gehen. Wenn die ersten sechs Punkte auf einem Kegelschnitt $S=0$ liegen, so gilt für diejenige Curve des Systems, welche durch die Bedingung bestimmt ist, dass sie noch einen siebenten Punkt des Kegelschnitts $S=0$ enthalte, die Bedingung

$$ACE-k'BDF=SL$$

für $L=0$ als eine in den Coordinaten lineare Gleichung. Sie kann keine eigentliche Curve dritter Ordnung sein, weil eine solche Curve nicht mehr als sechs Punkte mit einem

Kegelschnitt $S = 0$ gemeinsam haben kann, die gerade Linie $S = 0$ wird daher die übrigen drei Punkte $A = D = 0$, $B = E = 0$, $C = F = 0$ enthalten müssen. Wir fügen hinzu, dass gerade dieser Beweis des Pascal'schen Satzes am leichtesten zu den Sätzen von Steiner und Kirkmann über die vollständige Figur desselben führt. (Vergl. „Kegelschn." Art. 286.). Sei

$$12.\ 34.\ 56 - 45.\ 61.\ 23 = SL,$$

d. h. mit 12 die linke Seite der Gleichung der Verbindungslinie der ersten und zweiten Ecke, etc. und mit $L = 0$ die Gleichung der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseiten 12, 45; 23, 56; 34, 61 bezeichnet, und sei ebenso $12.\ 34.\ 56 - 36.\ 25.\ 14 = SM$, so ist offenbar

$$45.\ 61.\ 23 - 36.\ 25.\ 14 = S(M - L),$$

d. h. die Pascal'sche Linie der letzteren Gleichung geht durch den Durchschnittspunkt der Pascal'schen Linien, welche den beiden vorigen Gleichungen entsprechen.

Wir wollen aber bemerken, dass der Satz des Art. 31. in dem fraglichen Falle $n = 3$ ein specieller Fall des Satzes von Art. 30. ist, weil das System der drei ungeradzahligen Seiten eine der Curven dritter Ordnung, und das der geradzahligen die andere von den Curven dritter Ordnung $U = 0$, $V = 0$ des Art. 30. ist; daher können wir den Pascal'schen Satz direct aus diesem herleiten: Wir betrachten den Kegelschnitt durch die sechs Ecken und die gerade Verbindungslinie von zweien der drei Gegenseitenpaare als eine Curve dritter Ordnung durch acht von jenen neun Punkten und sehen damit, dass sie auch durch den neunten Punkt gehen muss, d. h. die gerade Linie geht auch durch den Durchschnittspunkt des dritten Paares der Gegenseiten.

33. Es ist bewiesen worden, dass obwohl zwei Curven n^{ter} Ordnung sich in n^2 Punkten durchschneiden, doch n^2 willkürlich gewählte Punkte nicht die gemeinschaftlichen Punkte von zwei solchen Curven sein können, dass vielmehr aus $n^2 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gegebenen unter ihnen die übrigen bestimmt sind. Ein ähnlicher Fall gilt in Bezug auf die np Durchschnittspunkte von zwei Curven von der n^{ten} und p^{ten} Ordnung. Obgleich z. B. eine Curve dritter Ordnung eine

von der vierten in zwölf Punkten schneidet, so ist es doch im Allgemeinen unmöglich, durch zwölf auf einer Curve dritter Ordnung willkürlich gewählte Punkte eine eigentliche Curve vierter Ordnung zu legen. Das System vierter Ordnung durch diese zwölf und durch zwei willkürlich angenommene andere Punkte ist im Allgemeinen nichts anderes als die Curve dritter Ordnung und die diese zwei letztern Punkte verbindende Gerade. Und allgemein, jede Curve n^{ter} Ordnung, welche durch $np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Punkte einer Curve p^{ter} Ordnung $(p < n)$ geht, schneidet diese Curve in $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ andern festen Punkten. Denn wir sahen in Art. 31., dass

$$np - \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) + \tfrac{1}{2}(n-p)(n-p+3) = \tfrac{1}{2}n(n+3) - 1$$

ist; daher geht nach Art. 30. jedes System n^{ter} Ordnung, das durch die gegebenen Punkte und $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$ andere beschrieben wird, durch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ andere feste Punkte ~~Punkte~~. Ein System der n^{ten} Ordnung, welches durch diese Punkte geht, bildet aber die gegebene Curve p^{ter} Ordnung zusammen mit einer Curve der Ordnung $(n-p)$ durch die hinzugefügten andern Punkte; die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ neuen Punkte müssen daher theils auf der einen, theils auf der andern von diesen Curven liegen. Und es ist offenbar, dass diese Punkte so zwischen ihnen vertheilt sein müssen, dass dadurch die Totalzahl der Punkte im ersten Falle zu np, im zweiten zu $n(n-p)$ gemacht wird. Damit ist die Wahrheit des angezeigten Satzes bewiesen.

34. Eine fernere Erweiterung dieses Satzes ist durch Cayley gegeben worden: Jede Curve von der Ordnung r (für $r > m$ oder $r > n$, $r \leq m+n-3$), welche durch alle bis auf $\frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$ von den mn Durchschnittspunkten zweier Curven von den Ordnungen m und n hindurchgeht, enthält auch alle diese übrigen Schnittpunkte. Damit der Geist des allgemeinen Beweises deutlicher werde, schicken wir ein besonderes Beispiel voraus. Jede Curve fünfter Ordnung, welche durch fünfzehn von den Durchschnittspunkten zweier Curven vierter Ordnung geht, enthält auch den letzten Durchschnittspunkt derselben. Denn wenn wir zwei willkürliche Punkte

auf jeder der Curven vierter Ordnung annehmen, so machen diese vier mit den fünfzehn gegebenen Punkten zusammen neunzehn Punkte, und wenn verschiedene Curven fünfter Ordnung durch dieselben gehen, so haben dieselben alle nach Art. 30. sechs andere feste Punkte gemein. Aber jede der beiden Curven vierter Ordnung bildet zusammen mit der geraden Linie durch die beiden willkürlich gewählten Punkte der andern Curve ein durch die neunzehn Punkte gehendes System fünfter Ordnung. Daher liegen alle Durchschnittspunkte der gegebenen Curven vierter Ordnung in jeder Curve fünfter Ordnung durch die Punkte. Im allgemeinen Falle nehmen wir $\frac{1}{2}(r-m)(r-m+3)$ willkürliche Punkte in der Curve n^{ter} Ordnung an, und legen durch dieselben eine Curve von der Ordnung $(r-m)$; wir nehmen ferner $\frac{1}{2}(r-n)(r-n+3)$ Punkte in der Curve m^{ter} Ordnung an und legen durch sie eine Curve von der Ordnung $(r-n)$; wir nehmen endlich so viele der mn Durchschnittspunkte beider Curven als mit den willkürlichen Punkten zusammen $\frac{1}{2}r(r+3)-1$ ausmachen. Dann sind, weil die Curven $(r-m)^{\text{ter}}$ und m^{ter} Ordnung ein und die Curven $(r-n)^{\text{ter}}$ und n^{ter} Ordnung ein anderes System r^{ter} Ordnung durch die Punkte bilden, die Durchschnitte dieser beiden Systeme allen Curven r^{ter} Ordnung gemein, welche durch die Punkte gehen. Aber es ist

$$\frac{1}{2}r(r+3)-1-\frac{1}{2}(r-m)(r-m+3)-\frac{1}{2}(r-n)(r-n+3)$$
$$=mn-\frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2),$$

wie man leicht bestätigt. Daraus ergiebt sich die Wahrheit des Satzes.

Damit der Beweis aber anwendbar bleibe, muss r wenigstens gleich der grössesten der beiden Zahlen m oder n und $(r-m)<n$ sein, weil es sonst nicht möglich sein würde, durch die angenommenen Punkte der Curve n^{ter} Ordnung eine von der $(r-m)^{\text{ten}}$ Ordnung zu beschreiben, die die Curve n^{ter} Ordnung selbst nicht als einen Theil enthielte; und weil der Satz für $r=m+n-1$ oder $r=m+n-2$ inhaltslos ist, so gilt er unter der Bedingung $r \leqq m+n-3$.[2])

II. Abschnitt.

Ueber die Natur der vielfachen Punkte und Tangenten der Curven.

35. Um auf dem einfachsten Wege in die Lehre von den mit den Curven verbundenen singulären Punkten und Geraden einzudringen, wollen wir zuerst durch Beispiele die Natur dieser Punkte und Linien erläutern, und alsdann allgemeine Gesetze begründen, nach welchen ihre Existenz im Allgemeinen entdeckt werden kann.

Wir wenden die in Art. 26. gegebene Cartesische Gleichung an. Wenn wir dieselbe durch die Substitution von $\varrho\ \cos\theta$, $\varrho\ \sin\theta$ respective für x und y — oder für schiefwinklige Axen event. $m\varrho$ und $n\varrho$ wie in „Kegelschn." Art. 95. — zu Polarcoordinaten transformieren, erhalten wir eine Gleichung n^{ten} Grades in ϱ, deren Wurzeln die vom Coordinatenanfang aus gemessenen Entfernungen der n Punkte sind, wo die Curve durch eine denselben enthaltende Gerade geschnitten wird, die den Winkel θ mit der Axe der x macht.

36. Wenn in der allgemeinen Gleichung das absolute Glied A gleich Null ist, so ist der Coordinatenanfang ein Punkt der Curve, weil die Werthe $x = 0$, $y = 0$ die Gleichung befriedigen. Dasselbe ergiebt sich aus der in Polarcoordinaten geschriebenen Gleichung

$$(B\cos\theta + C\sin\theta)\,\varrho + (D\cos^2\theta + E\cos\theta\sin\theta + F\sin^2\theta)\,\varrho^2 + \cdots = 0;$$

weil sie durch ϱ theilbar ist, so ist $\varrho = 0$ eine der Wurzeln, unabhängig von dem Werthe von θ und es fällt also einer der n Punkte, in denen eine beliebige Gerade aus dem Anfangspunkt die Curve schneidet, mit diesem selbst zusammen. Die andern $(n - 1)$ Punkte sind im Allgemeinen vom Anfangspunkt verschieden; es giebt aber einen Werth von θ, für welchen ein zweiter von diesen Punkten mit ihm zusammenfällt, nämlich derjenige, für welchen $B\cos\theta + C\sin\theta = 0$ ist. Dann ist die Gleichung

$$(D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta)\,\varrho^2 + \cdots = 0$$

durch ϱ^2 theilbar und es sind daher zwei ihrer Wurzeln $\varrho = 0$.

Die diesem Werthe von θ entsprechende Gerade schneidet die Curve in zwei im Anfangspunkt zusammenfallenden Punkten oder ist die Tangente der Curve im Anfangspunkt. Weil eine lineare Gleichung zur Bestimmung von $\tan\theta$ dient, so existiert für einen gegebenen Punkt der Curve im Allgemeinen nur eine Tangente; ihre Gleichung ist

$$\varrho\,(B\cos\theta + C\sin\theta) = 0 \text{ oder } Bx + Cy = 0.$$

Wenn also für den Anfangspunkt als einen Punkt der Curve ihre Gleichung durch $u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots = 0$ dargestellt ist, so repräsentiert $u^{(1)} = 0$ die Tangente derselben im Anfangspunkt.

Für $B = 0$ ist die Axe der x diese Tangente, für $C = 0$ die Axe der y.

37. Wenn wir aber voraussetzen, dass die Coefficienten A, B, C sämmtlich gleich Null sind, so verschwindet der Coefficient von ϱ unabhängig von θ und also für jedes θ. Dann schneidet jede gerade Linie durch den Anfangspunkt die Curve in zwei mit ihm zusammen fallenden Punkten; derselbe wird dann ein Doppelpunkt der Curve genannt. Genau wie im letzten Artikel erkennen wir dann weiter, dass es in diesem Falle zwei durch den Anfangspunkt gehende Gerade giebt, welche die Curve in drei zusammen fallenden Punkten schneiden. Denn für die Werthe von θ, die den Coefficienten von ϱ^2 gleich Null machen, d. h. der Gleichung $D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta = 0$ genügen, wird die Polargleichung der Curve durch ϱ^3 theilbar und enthält also die Wurzel $\varrho = 0$ dreifach. Und da $\tan\theta$ durch eine quadratische Gleichung bestimmt wird, so schliessen wir, dass durch einen Doppelpunkt zwei gerade Linien gehen, von denen jede die Curve in drei zusammen fallenden Punkten schneidet, und deren Gleichung ist

$$\varrho^2\,(D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta) = 0$$

oder

$$Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0.$$

Obwohl also in gewissem Sinne jede durch einen Doppelpunkt gehende Grade als Tangente der Curve in ihm zu betrachten ist, nämlich als eine Gerade, die in ihm mit der Curve zwei zusammen fallende Punkte gemein hat, so giebt

es doch unter allen diesen Geraden zwei, deren Berührung mit der Curve eine innigere ist, als die aller übrigen; es ist daher gebräuchlich zu sagen, dass in einem Doppelpunkt an die Curve zwei Tangenten gezogen werden können. Wenn die Gleichung der Curve für den Anfangspunkt der Coordinaten als Doppelpunkt in der Form $u^{(2)} + u^{(3)} + \cdots = 0$ geschrieben wird, so ist $u^{(2)} = 0$ die Gleichung dieses Tangentenpaares.

38. Es ist nothwendig, drei Arten von Doppelpunkten zu unterscheiden, je nachdem nämlich die durch $u^{(2)} = 0$ repräsentierten geraden Linien reell und verschieden, nicht reell oder zusammenfallend sind.

I. Im ersten Falle sind die Tangenten beide reell, der Doppelpunkt erscheint so, wie die Figur ihn zeigt; er gehört zwei Aesten der Curve an, von denen jeder in ihm seine eigene Tangente hat. Die quadratische Gleichung $u^{(2)} = 0$ bestimmt die Richtungen dieser beiden Tangenten. Einen solchen Doppelpunkt nennen wir einen Knotenpunkt. Wir erhalten eine einfache Erläuterung eines solchen Doppelpunkts, wenn die gegebene Gleichung das Product zweier Gleichungen von geringeren Graden ist; $U = PQ$. Dann repräsentiert $U = 0$ die beiden durch $P = 0$ und $Q = 0$ dargestellten Curven von den Ordnungen p und q. Wenn wir aber dieselben in ihrer Vereinigung als ein System von der Ordnung $n = p + q$ betrachten, so haben wir diese Curve als mit pq Doppelpunkten in den gemeinsamen Punkten der Curven $P = 0$ und $Q = 0$ zu betrachten und in jedem reellen unter diesen Schnittpunkten hat die Curve $PQ = 0$ zwei reelle Tangenten, nämlich die Tangenten von $P = 0$ und $Q = 0$.

Fig. 6.

II. Die Gleichung $u^{(2)} = 0$ habe ihre beiden Wurzeln nicht reell. In diesem Falle ist dem Anfangspunkt der Coordinaten kein reeller Punkt benachbart; wir nennen denselben dann einen conjugierten oder isolierten Punkt. Seine Coordinaten genügen der Gleichung der Curve, aber er erscheint nicht als in der Curve liegend. Und die Existenz solcher Punkte kann in der That nur dadurch evident gemacht werden, dass man zeigt, es gebe Punkte,

für welche keine der durch sie gehenden Geraden die Curve in mehr als $(n-2)$ Punkten schneiden kann.

III. Die Gleichung $u^{(2)}=0$ kann ein vollständiges Quadrat $v_1^2=0$ sein. Dann fallen die Tangenten im Doppelpunkt zusammen und die Curve hat die in der Figur angezeigte Form. Solche Punkte werden Spitzen genannt; oft auch Rückkehrpunkte oder stationäre Punkte, weil die Vorstellung der Curve als einer durch die Bewegung eines Punktes entstandenen Bahn für jede Spitze die Annahme fordert, dass die Bewegung in dem einen Sinne der bezüglichen Tangente zum Stillstand komme, um dann im entgegengesetzten Sinne derselben wieder zu beginnen. Punkte dieser Art können nicht, wie etwa nach dem Beispiel unter I. erwartet werden möchte, durch die Vorstellung einer in zwei sich berührende Theile $P=0$, $Q=0$ zerfallenden Curve $U=0$ erläutert werden; obwohl jeder solche Berührungspunkt ein Doppelpunkt mit zusammen fallenden Tangenten ist, so muss doch ein solcher Punkt zu den Singularitäten einer höheren Ordnung als die jetzt zu betrachtenden gerechnet werden, weil die ihm entsprechende Tangente die zusammengesetzte Curve in vier aufeinander folgenden Punkten, jede der beiden Theilcurven nämlich in zweien, durchschneidet, während in einer Spitze, wie wir sahen, die Tangente im Allgemeinen die Curve nur in drei aufeinander folgenden Punkten trifft. Damit die Tangente in einer Spitze die Curve in vier aufeinander folgenden Punkten treffe, ist nicht nur erforderlich, dass $u^{(2)}$ ein vollständiges Quadrat v_1^2 sei, sondern auch, dass die Wurzel desselben ein Factor in $u^{(3)}$ ist, so dass die Gleichung nothwendig von der Form $v_1^2+v_1\,v^{(2)}+u^{(4)}+\cdots=0$ sein muss. Solche Punkte entspringen aus der Vereinigung von zwei Doppelpunkten, was auch mit dem vorher erwähnten Beispiel zusammen stimmt; wenn die Curven $P=0$, $Q=0$ sich berühren, so vertritt der Berührungspunkt die Stelle von zwei Durchschnittspunkten derselben, d. h. von zwei Doppelpunkten von $U=0$. Es ist gut, zu bemerken, dass der Knotenpunkt und der isolierte Punkt Formen des Doppelpunktes von gleichem

Fig. 7.

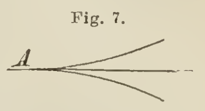
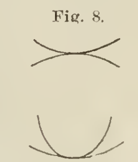


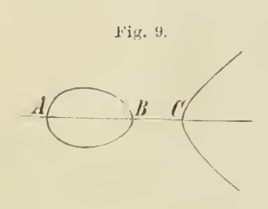
Fig. 8.



Grade der Allgemeinheit sind, nur unterschieden durch die Realität und Nichtrealität ihrer Tangenten; dass dagegen in der Untersuchung selbst die Spitze sich als ein besonderer Fall des Doppelpunktes dargeboten hat; sie ist in Wahrheit eine andere Singularität, wie wir weiterhin erkennen werden.

39. Wir wollen die Sache durch das folgende Beispiel erläutern. Es sei die Curve $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$, mit $a < b < c$ zu betrachten. Sie ist offenbar zu beiden Seiten der Axe der x symmetrisch, weil jedem Werthe von x gleiche und entgegengesetzte Werthe von y entsprechen; und sie schneidet die Axe der x in drei Punkten A, B, C oder respective $x=a$, $x=b$, $x=c$. Für alle x, welche kleiner sind als a, ist y^2 negativ und somit y nicht reell; für Werthe von x zwischen a und b wird y^2 positiv und für solche zwischen b und c negativ, endlich positiv für alle c überschreitenden Werthe von x. Die Curve besteht daher aus einem zwischen A und B liegenden Oval und einem bei C beginnenden und sich unendlich nach der positiven Seite der x fortsetzenden Aste. Setzen wir insbesondere $b = c$, so dass die Gleichung wird

Fig. 9.



$$y^2 = (x - a)(x - b)^2, \text{ mit } b > a,$$

so erscheint der Punkt B mit dem Punkte C vereinigt; mit der Annäherung von B an C schärfen sich das Oval und der unendliche Ast gegen einander zu und bei ihrer endlichen Vereinigung wird B ein Doppelpunkt mit zwei sich in ihm unter einem Winkel schneidenden Theilen, das Oval zur Schleife, die durch den Doppelpunkt hindurch in die beiden Zweige des unendlichen Astes stetig übergeht. Ist aber anderseits $b = a$, so wird die Gleichung $y^2 = (x - a)^2 (x - b)$ mit $a < b$. Das Oval hat sich in einen Punkt A zusammengezogen und die Curve zeigt die beistehende Form. Diess Beispiel reicht aus, um die Analogie zwischen conjugierten Punkten und Knotenpunkten

Fig. 10.

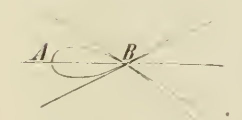
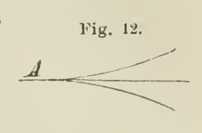


Fig. 11.

A C

zu zeigen. Setzen wir endlich $a = b = c$, so dass die Gleichung $y^2 = (x - a)^3$ ist, so wird der Punkt A zur Spitze (Art. 38., III.) und die entsprechende Tangente schneidet die Curve in drei auf einander folgenden Punkten A, B, C.

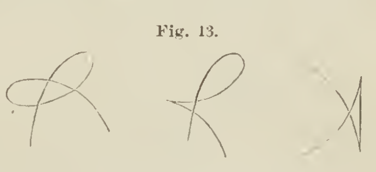
Fig. 12.



40. Wenn in der allgemeinen Gleichung $U = 0$ die Coefficienten A, B, C, D, E, F sämmtlich gleich Null sind, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein dreifacher Punkt, weil jede durch ihn gehende Gerade die Curve in drei zusammen fallenden Punkten schneidet; und man erkennt leicht, wie vorher, dass es in einem dreifachen Punkt drei Tangenten giebt, welche mit der Curve in ihm vier zusammen fallende Punkte gemein haben und dass diese drei Geraden durch die Gleichung $u^{(3)} = 0$ ausgedrückt werden.

Wir können auch wie vorher vier Arten oder Formen des dreifachen Punktes unterscheiden, je nachdem die drei Tangenten a) alle reell und 1) alle drei verschieden sind, oder 2) zwei zusammen fallend, oder 3) alle drei zusammen fallend; oder b) eine reell und die beiden andern nicht reell sind. Wir können den dreifachen Punkt als aus der Vereinigung von drei Doppelpunkten entspringend betrachten, und zwar sind diese in den Fällen a) 1. drei Knotenpunkte, 2. zwei Knotenpunkte und eine Spitze, 3. ein Knotenpunkt und zwei Spitzen — wie es die beistehenden Figuren erläutern, wo wir nur die drei Doppelpunkte in einen dreifachen Punkt vereinigt denken müssen. Der Fall 3) weicht kaum merklich sichtbar von einem gewöhnlichen Punkte der Curve ab; bei gutgezeichneter Figur ist nur eine gewisse Schärfe der Biegung im singulären Punkte zu bemerken. Im Falle b) haben wir ebenso einen reellen Theil, der durch einen conjugierten Punkt hindurchgeht und dem Auge erscheint dieser singuläre Punkt nicht verschieden von irgend einem andern Punkte der Curve.

Fig. 13.



Wir können in gleicher Art die Bedingungen untersuchen, unter welchen der Anfangspunkt der Coordinaten

ein vielfacher Punkt von irgend einem höhern Grade k ist. Die Coefficienten aller Glieder aller Grade unter k werden verschwinden und die Gleichung ist von der Form $u^{(k)} + u^{(k+1)} + \cdots = 0$. Im vielfachen Punkte gehen k Tangenten an die Curve, welche sämmtlich durch die Gleichung $u^{(k)} = 0$ dargestellt werden und die Form, welche die Curve im vielfachen Punkte darbietet, wechselt je nachdem die Wurzeln dieser Gleichung alle reell und ungleich oder zwei oder mehrere von ihnen gleich oder nicht reell sind. Ein vielfacher Punkt von der Ordnung k kann angesehen werden als aus der Vereinigung von $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten hervorgegangen, wie wir an dem Fall von k geraden Linien am einfachsten erläutern, die als ein System mit $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten in ihren Schnittpunkten zu betrachten sind, und die, wenn sie alle durch denselben Punkt gehen, ein System mit $k$fachem Punkt bilden, der die Stelle aller der Doppelpunkte vertritt. Das Princip bleibt dasselbe, wenn die sich durchschneidenden Linien krumme Linien sind. Eine Curve kann durch den Schnitt von k Zweigen mit einander $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkte haben und hat, wenn alle Zweige durch denselben Punkt gehen, an deren Stelle einen $k$fachen Punkt oder einen vielfachen Punkt von der Ordnung k.

41. Wenn ein gegebener Punkt ein Doppelpunkt für eine Curve sein soll, so ist diese Bestimmung drei Bedingungen äquivalent. Denn wenn wir ihn zum Anfangspunkt der Coordinaten wählen, so verschwinden drei Glieder in der Gleichung der Curve (Art. 37.) und die Zahl der verfügbaren Constanten ist um drei geringer als im allgemeinen Fall. Wenn dazu auch die Tangenten der Curve im Doppelpunkt gegeben wären — gleichviel ob als zwei reelle Gerade oder als zwei nicht reelle, wenn sie im letztern Falle als die Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels mit sich trennenden Paaren gegeben sind (vergl. „Kegelsch." Art. 301.) — so ist diess zwei weitern Bedingungen äquivalent, da nun zu $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ auch die Verhältnisse $D : E$, $D : F$ gegeben sind. Die Angabe eines dreifachen Punktes ist sechs Bedingungen äquivalent, weil die sechs niedrigsten Glieder der Gleichung verschwinden, wenn

man ihn zum Anfangspunkt der Coordinaten macht. Und allgemein ist die Festsetzung eines bestimmten Punktes als eines vielfachen Punktes von der Ordnung k äquivalent mit $\frac{1}{2} k (k + 1)$ Bedingungen.

42. Es giebt eine Grenze für die Zahl von Doppelpunkten, welche eine Curve n^{ter} Ordnung enthalten kann, ohne dass sie in Curven von niederen Ordnungen zerfällt. Beispielsweise kann eine Curve dritter Ordnung nicht zwei Doppelpunkte haben, weil die gerade Verbindungslinie von zwei Doppelpunkten die Curve in vier paarweis zusammenfallenden Punkten schneiden würde und nicht mehr als drei Punkte der Curve dritter Ordnung in gerader Linie liegen können, ohne dass dieselbe in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt zerfällt. Eine Curve vierter Ordnung ferner kann nicht vier Doppelpunkte haben; weil, wenn sie so viele Doppelpunkte hätte, ein durch dieselben und einen beliebigen andern Punkt der Curve gelegter Kegelschnitt mit ihr neun *)

---

*) Wenn ein Durchschnittspunkt zweier Curven ein Doppelpunkt in einer derselben ist, so muss er für zwei gezählt werden und die Curven können sich ausser ihm nur noch in $(np - 2)$ Punkten schneiden; ist ein Schnittpunkt ein Doppelpunkt für beide Curven, so zählt er für vier unter den Durchschnittspunkten. Und allgemein, wenn er in der einen Curve vielfach vom Grade k und in der andern vielfach vom Grade l ist, so zählt er für kl Schnittpunkte. So schneidet z. B. ein System von k geraden Linien ein anderes von l geraden Linien in kl Punkten, wenn aber alle Geraden des ersten Systems durch einen und denselben Punkt in einer Geraden des zweiten gehen, so zählt dieser für k Schnittpunkte und es existieren ausser ihm nur noch $k (l - 1)$ andere Schnittpunkte von Linien beider Systeme. Und wenn die geraden Linien beider Systeme sämmtlich durch einen Punkt gehen, so zählt derselbe für kl Schnittpunkte und die Geraden schneiden sich nirgend ausser ihm. Wenn zwei Curven sich in ihrem Schnittpunkt berühren, so zählt der Berührungspunkt als ein Paar Durchschnittspunkte, weil er zwei auf einander folgende gemeinsame Punkte repräsentiert. Wenn der Durchschnittspunkt ein vielfacher Punkt in der einen Curve oder in beiden Curven ist, und wenn eine der Tangenten im vielfachen Punkt beiden Curven gemein ist, so müssen wir zur Zahl der Durchschnittspunkte, denen der vielfache Punkt äquivalent ist, Eins addieren, weil die Curven auch noch den in der Richtung der besagten Tangente nächstbenachbarten Punkt mit einander gemein haben. Es ist ohne Schwierigkeit die Wirkung einer beliebigen Combination von singulären Punkten und ihrer Tangenten zu bestimmen.

Punkte gemeinsam hätte, während doch kein Kegelschnitt, der nicht selbst ein Theil der Curve ist, mit einer Curve vierter Ordnung mehr als 2 . 4 Punkte gemein haben kann. Und allgemein kann eine Curve n^{ter} Ordnung nicht mehr als $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte haben; denn wenn sie einen Doppelpunkt mehr besässe, so würde durch diese $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ und durch $(n-3)$ andere Punkte der Curve eine Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung beschrieben werden können (Art. 27), welche als die Curve n^{ter} Ordnung in

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right\}+(n-3)$$

Punkten durchschneidend angesehen werden müsste, d. h. in $\{n(n-2)+1\}$ Punkten, oder in einem Punkte mehr als möglich ist, so lange die gegebene Curve eine eigentliche Curve n^{ter} Ordnung ist.

Wir bemerken, dass dieser Beweis nur zeigt, dass Curven nicht mehr als eine gewisse Anzahl von Doppelpunkten haben können, aber nicht, was jedoch wirklich der Fall ist, dass sie auch eben so viele besitzen können.

43. Wenn die Curve vielfache Punkte höherer Ordnung hat, so bleibt dasselbe Kriterium anwendbar, wenn wir jeden vielfachen Punkt k^{ter} Ordnung als äquivalent mit $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten rechnen. Aber es giebt Einschränkungen für die Möglichkeit, für eine gewisse Zahl von Doppelpunkten einen vielfachen Punkt von höherer Ordnung zu substituieren. So kann eine Curve fünfter Ordnung sechs Doppelpunkte haben und drei derselben können durch einen dreifachen Punkt ersetzt werden; aber es ist dann unstatthaft, auch die drei andern Doppelpunkte durch einen zweiten dreifachen Punkt zu ersetzen, weil die gerade Verbindungslinie der beiden dreifachen Punkte die Curve in mehr als fünf Punkten schneiden würde. Und allgemeiner, wenn eine Curve n^{ter} Ordnung einen vielfachen Punkt der Ordnung $(n-2)$ hat, so kann sie ausserdem als singuläre Punkte nur Doppelpunkte enthalten und die Zahl derselben kann nach unserm Kriterium nicht grösser sein als $(n-2)$.[3])

44. Wir wollen mit Cayley Defect einer Curve oder auch nach Clebsch Geschlecht derselben die Zahl D nennen, um welche ihre wirkliche Anzahl von Doppelpunkten

von der ihrer Ordnung zukommenden Maximalzahl derselben übertroffen wird; wir bezeichnen damit eine Zahl von grosser Wichtigkeit in der Theorie der Curven. Wenn $D = 0$ ist, d. h. wenn eine Curve die ihrer Ordnung entsprechende Maximalzahl von Doppelpunkten hat, so können die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve als rationale algebraische Functionen eines variabeln Parameters ausgedrückt werden. Denn die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte und $(n-3)$ andere angenommene Punkte in der Curve, d.i. zusammen $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)-1$ Punkte reichen hin, um ein Büschel $U = \lambda V$ von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu bestimmen. Wenn wir zwischen dieser Gleichung des Büschels und der Gleichung der gegebenen Curve die eine der Variabeln eliminieren, so erhalten wir zur Bestimmung der Werthe der andern Coordinate für ihre Durchschnittspunkte eine Gleichung vom Grade $n(n-2)$, in welche λ im n^{ten} Grade eingeht; die Wurzeln dieser Gleichung sind bis auf eine sämmtlich bekannt, denn die Durchschnittspunkte der beiden Curven bestehen aus den zweifach zählenden Doppelpunkten, den $(n-3)$ angenommenen Punkten und nur einem andern Punkt, weil

$$(n-1)(n-2) + (n-3) + 1 = n(n-2)$$

ist. Wenn wir also die so bekannten Factoren durch die Division aus der Gleichung entfernen, so wird die eine unbekannte Wurzel als eine algebraische Function n^{ten} Grades in λ bestimmt.

Und es ist umgekehrt wahr, dass die Curve die Maximalzahl von Doppelpunkten hat, wenn die Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters ausdrückbar sind, so dass die Curve eine Curve vom Geschlecht Null oder nach Cayley eine Unicursal-Curve ist. Wenn die Coordinaten x_1, x_2, x_3 als proportional zu $a_1\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + c_1\lambda^{n-2} + \cdots$, $a_2\lambda^n + b_2\lambda^{n-1} + \cdots$, $a_3\lambda^n + b_3\lambda^{n-1} + \cdots$ respective gegeben sind, so kann die Elimination von λ leicht vollzogen werden. Wir setzen

$$\theta x_1 = a_1\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots, \quad \theta x_2 = a_2\lambda^n + b_2\lambda^{n-1} + \ldots,$$
$$\theta x_3 = a_3\lambda^n + b_3\lambda^{n-1} + \cdots$$

und multiplicieren jede dieser Gleichungen nach einander mit

$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots \lambda^{n-1}$, so dass wir $3n$ Gleichungen erhalten, gerade genug, um alle die Grössen θ, $\theta\lambda, \ldots$; λ, $\lambda^2, \ldots$ linear zu eliminieren. Die Gleichung der Curve erscheint nun in Form einer Determinante $3n^{\text{ter}}$ Ordnung, in welcher nur n Reihen die Variabeln enthalten; sie ist somit vom Grade n in diesen und ihre Gleichung enthält die Coefficienten $a_1, b_1, \ldots$ im Grade $2n$.

Zur bessern Einsicht schreiben wir das Resultat für den Fall $n = 2$ ausführlich her. Wir haben dann die Gleichungen

$$\theta x_1 = a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1, \quad \theta x_2 = a_2\lambda^2 + b_2\lambda + c_2,$$
$$\theta x_3 = a_3\lambda^2 + b_3\lambda + c_3.$$

Die Multiplication jeder von ihnen mit λ und die lineare Elimination von θ, $\theta\lambda$, λ^3, λ^2, λ^1, λ^0 zwischen den so gebildeten sechs Gleichungen giebt als Resultat

$$\begin{vmatrix} x_1, & 0, & a_1, & b_1, & c_1, & 0 \\ x_2, & 0, & a_2, & b_2, & c_2, & 0 \\ x_3, & 0, & a_3, & b_3, & c_3, & 0 \\ 0, & x_1, & 0, & a_1, & b_1, & c_1, \\ 0, & x_2, & 0, & a_2, & b_2, & c_2, \\ 0, & x_3, & 0, & a_3, & b_3, & c_3, \end{vmatrix} = 0.$$

45. Aus Art. 41. folgt, dass drei beliebige Punkte als Doppelpunkte einer Curve vierter Ordnung genommen werden können; sie vertreten neun Bedingungen. Aber man kann nicht auch alle die Tangenten der Curve in diesen Doppelpunkten willkürlich annehmen, weil die Doppelpunkte mit den Tangenten zusammen fünfzehn Bedingungen äquivalent sind, d. h. einer mehr als zur Bestimmung der Curve genügen. Es muss somit irgend eine diese Tangenten verbindende Relation vorhanden sein; wir werden später sehen, dass diese sechs Tangenten den nämlichen Kegelschnitt berühren, so dass durch fünf von ihnen die sechste linear bestimmt ist. Zwanzig Bedingungen bestimmen eine Curve fünfter Ordnung; wir können also ihre sechs Doppelpunkte und für einen derselben das Paar der Tangenten willkürlich annehmen; damit ist aber die Curve vollständig bestimmt, d. h. es sind auch die übrigen Tangentenpaare bestimmt. Sieben und zwanzig Bedingungen bestimmen eine Curve sechster Ordnung; es

könnte daher scheinen, dass eine solche Curve müsse beschrieben werden können, welche neun gegebene Punkte zu Doppelpunkten hat. Diess ist aber nicht der Fall; denn durch die neun gegebenen Punkte geht eine bestimmte Curve dritter Ordnung $U = 0$ und im Allgemeinen ist die einzige Curve sechster Ordnung, welche dieselben neun Punkte zu Doppelpunkten hat, die Curve $U^2 = 0$, d. h. die zweifach gezählte Curve dritter Ordnung. Man kann in diesem Falle selbst nicht acht der neun Doppelpunkte willkürlich annehmen. In analoger Art müssen für Curven höherer Ordnungen, wenn sie die Maximalzahl oder selbst eine geringere Zahl von Doppelpunkten haben, gewisse verbindende Beziehungen zwischen denselben bestehen. Den Fall der Curven vierter Ordnung ausgenommen kennen wir aber keinen Versuch, diese Relationen geometrisch auszudrücken; es ist also noch eine ausgedehnte Classe von Sätzen dieser Art zu entdecken.

46. Das bisher Entwickelte wird hinreichen, um dem Leser von der Natur der vielfachen Punkte der Curven eine Anschauung zu geben. Wir gehen dazu über, zu zeigen, dass eine Curve in gleicher Art vielfache Tangenten haben kann, mit andern Worten, dass gerade Linien existieren können, welche die Curve in zwei oder in mehreren Punkten berühren oder mit der Curve eine Berührung von zweiter oder von höherer Ordnung haben. Was man gewöhnlich die singulären Punkte der Curven nennt, reduciert sich in der That auf die beiden Gruppen der vielfachen Punkte und der Berührungspunkte der vielfachen Tangenten. Da wir die Lehre von den vielfachen Punkten durch die Untersuchung des speciellen Falles begründet haben, in welchem der Anfangspunkt der Coordinaten ein solcher Punkt ist, so ist es passend, die jetzige Entwickelung mit der Untersuchung der Bedingungen zu beginnen, unter welchen die Axe $y = 0$ eine vielfache Tangente ist.

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve werden durch die Substitution $y = 0$ in die Gleichung der Curve bestimmt, d. h. durch die Gleichung

$$A + Bx + Dx^2 + Gx^3 + \cdots + Px^n = 0,$$

welche auf die Form reduciert werden kann

$$P(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots=0,$$

in der $a, b, \ldots$ diejenigen Werthe der Abscisse x sind, welche den Schnittpunkten entsprechen.

Die Axe ist eine Tangente, wenn zwei dieser Punkte zusammen fallen, d. h. wenn zwischen den Wurzeln eine einfache Gleichheit $a=b$ stattfindet; die Gleichung ist dann $P(x-a)^2(x-c)\ldots=0$ und die Axe berührt die Curve im Punkte $y=0$, $x=a$. Für $A=0$, $B=0$ berührt die Curve die Axe $y=0$ im Anfangspunkt der Coordinaten. Wir betrachten dabei nur den Fall eines reellen a, weil für eine reelle Gleichung eine Relation $a=b$ zwischen zwei imaginären Wurzeln eine andere Gleichheit $c=d$ zwischen zwei weitern imaginären Wurzeln nach sich zöge.

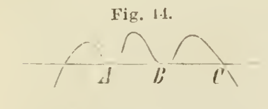
Die Axe ist eine Doppeltangente, wenn unter den Wurzeln zwei Paare von gleichen, $a=c$, $b=d$ sind; die Gleichung ist

$$P(x-a)^2(x-b)^2(x-c)\ldots=0$$

und man hat zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Die Wurzeln a und b sind reell und die Axe ist eine Tangente der Curve in den beiden reellen Punkten $x=a$ und $x=b$. Es ist offenbar, dass eine solche Tangente, welche die Curve in zwei Paaren zusammen fallender Punkte trifft, in Curven nicht auftreten kann, deren Ordnungszahl unter vier ist.

Fig. 14.



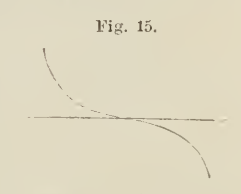
II. Die Wurzeln a und b sind imaginär, so dass die Gleichung ist

$$P(x^2+px+q)^2(x-c)\ldots=0$$

und wir eine Doppeltangente mit zwei nicht reellen Berührungspunkten haben.

Wir können aber ferner zwischen den Wurzeln eine Relation $a=b=c$ und damit eine Gleichung von der Form $P(x-a)^3(x-d)\ldots=0$ haben, wobei a reell ist. Die Axe schneidet dann die Curve in drei aufeinander folgenden Punkten $x=a$; und da für drei aufeinander folgende Punkte

im Allgemeinen die Verbindungslinie des ersten und zweiten Punktes eine Tangente und die des zweiten und dritten die nächstfolgende Tangente ist, so fallen unter der gemachten Voraussetzung zwei aufeinander folgende Tangenten zusammen. Wir dürfen die Axe als eine stationäre Tangente (Wendetangente) bezeichnen, weil unter der Auffassung der Curve als der Enveloppe einer bewegten Geraden in ihr zwei aufeinander folgende Lagen derselben zusammen fallen. Der Berührungspunkt der stationären Tangente wird ein Inflexionspunkt genannt. Für $A=0$, $B=0$, $D=0$ ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein Inflexionspunkt und die Axe $y=0$ die zugehörige Tangente; denn die Gleichung nimmt dann die Form $Px^3(x-c)\ldots=0$ an.


Fig. 15.

47. Der Knotenpunkt und der isolierte Punkt entsprechen genau der Doppeltangente mit reellen und der Doppeltangente mit nicht reellen Berührungspunkten, und ebenso entspricht die Spitze oder der stationäre Punkt genau der stationären Tangente. In der analytischen Darstellung ist die gleiche Correspondenz noch nicht ersichtlich worden; denn wir haben für die Spitze eine einfache Gleichheit als speciellen Fall der ungleichen Werthe, die dem Knotenpunkt und dem isolierten Punkt entsprechen; für die Inflexion aber eine doppelte Gleichheit $a=b=c$, d. i. eine von den zwei Gleichheiten $a=b$, $c=d$, die der Doppeltangente angehören, wesentlich verschiedene Relation. Allein wenn die Untersuchung des Doppelpunktes naturgemäss in Punkt-Coordinaten geführt wurde, so entsprechen der Untersuchung der Doppeltangente ebenso natürlich die Linien-Coordinaten und die analytischen Theorien stimmen überein, sobald wir diese anwenden, die stationäre Tangente zeigt sich als ein specieller Fall der Doppeltangente. Und so wie in dem Vorigen die stationäre Tangente sich als eine von der Doppeltangente verschiedene Singularität gezeigt hat, so würde im Falle der Untersuchung mit Liniencoordinaten die Spitze als eine vom Doppelpunkt verschiedene Singularität erschienen sein. In diesem Sinne wurde in Art. 38. bemerkt, dass die Spitze eine wesentlich verschiedene Singularität sei.

Die Singularitäten der ebenen Curven entsprechen einander daher wie folgt:

Dem Doppelpunkt mit reellen oder nicht reellen Tangenten	die Doppeltangente mit reellen oder nicht reellen Berührungspunkten.
Der Spitze, dem stationären oder Rückkehrpunkt	die stationäre oder Wendetangente.

Die Spitze ist aber unter einem besondern Gesichtspunkte ein besonderer Fall des Doppelpunktes und ebenso ist unter dem reciproken Gesichtspunkt die stationäre Tangente ein besonderer Fall der Doppeltangente. Denken wir die Curve beschrieben durch einen Punkt, der längs einer Geraden fortschreitet, während sich diese gleichzeitig um ihn dreht, so erhellt, dass in der Spitze eine wirkliche Besonderheit der Bewegung stattfindet, indem der Punkt zuerst stillsteht und dann seine Bewegung im umgekehrten Sinne fortsetzt; und ebenso in der Wendetangente, indem die Tangente nach eingetretenem Stillstand sich in umgekehrtem Sinne weiter dreht. Dagegen sieht man, dass im Doppelpunkt und in der Doppeltangente eine solche Besonderheit der Bewegung nicht vorhanden ist, der Punkt im ersten Falle und die gerade Linie im zweiten gehen nur während ihrer Bewegung zweimal durch eine und dieselbe Lage hindurch. Die Spitze und die Wendetangente sind, darf man sagen, in einem strengeren Sinne Singularitäten als der Doppelpunkt und die Doppeltangente.

48. Gewöhnlich liegt die Curve in der Nachbarschaft des Berührungspunktes ganz auf der nämlichen Seite der Tangente, aber in einem Inflexionspunkt durchschneidet sie die Tangente und liegt vor demselben auf der einen und nach demselben auf der andern Seite von ihr. Diess ist ein specieller Fall des allgemeinen Satzes: Zwei Curven, die eine gerade Zahl aufeinander folgender Punkte gemein haben, berühren sich in denselben ohne sich zu schneiden; diejenigen aber, welche eine ungerade Zahl auf einander folgender Punkte gemein haben, durchschneiden sich in der Berührungsstelle. Seien $y = \varphi x$ und $y = \psi x$ die Gleichungen der Curven, welche

sich im Punkte $x = a$ durchschneiden; dann sind nach dem Taylor'schen Satze die Werthe der Ordinaten für beide Curven bei $x = a + h$

$$y' = \varphi + \frac{d\varphi}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\varphi}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$y'' = \psi + \frac{d\psi}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\psi}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots,$$

wenn wir unter φ, ψ, $\frac{d\varphi}{dx}, \ldots$ diejenigen Werthe von φx, ψx, $\frac{d\varphi x}{dx}, \ldots$ verstehen, die dieselben für $x = a$ erhalten. Da nun nach der Voraussetzung $\varphi = \psi$ ist, weil die Curven sich in $x = a$ durchschneiden, so folgt

$$y' - y'' = \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3} - \frac{d^3\psi}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

Nach den Principien der Differentialrechnung stimmt aber für unendlich kleine Werthe von h das Zeichen der Summe dieser Reihe mit dem Zeichen ihres ersten Gliedes überein und wechselt also mit dem Zeichen von h; wenn also im unendlich nahen Punkte $x = a + h$ die Ordinate der Curven $\varphi = 0$ grösser ist als die der Curve $\psi = 0$, so wird sie im Punkte $x = a - h$ kleiner sein als die entsprechende der letzteren, d. h. wenn zwei Curven einen Punkt gemein haben, so ist im Allgemeinen diejenige von ihnen, welche vor dem Punkte über der andern liegt, d. h. die grössern Ordinaten hat, nach dem Punkte unter ihr oder hat die kleineren Ordinaten.

Setzen wir aber $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dx}$, so ist $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d^2\psi}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2}$ das erste Glied der Reihe und dieses wechselt sein Zeichen nicht, wenn h dasselbe wechselt; dieselbe Curve, welche auf der einen Seite des Punktes die obere ist, ist es daher auch auf seiner andern Seite. In diesem Falle sind die Curven offenbar dichter zusammengeschlossen als im vorigen Falle, weil die Differenz ihrer Ordinaten von der ersten Potenz von h nicht mehr abhängt; es ist diess äquivalent mit dem, was wir geometrisch dadurch ausdrücken, dass wir sagen, die Curven haben zwei auf einander folgende Punkte gemein.

Wir erläutern dieselbe Sache noch von anderer Seite. Sind x', y'; x'', y'' die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten von zwei Punkten einer Curve, so ist der Quotient $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Verbindungslinie derselben mit der Axe der x einschliesst; für das Zusammenfallen der Punkte ergiebt sich daraus, dass der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für den gegebenen Punkt die trigonometrische Tangente des Winkels ausdrückt, den die Verbindungslinie des Punktes mit dem nächstfolgenden Punkte, d. h. die Tangente der Curve mit der Axe der x einschliesst. Wenn daher zwei Curven einen Punkt gemein haben und wenn zugleich $\frac{dy}{dx}$ für diesen Punkt in Bezug auf beide Curven denselben Werth hat, so ist auch der nächstfolgende Punkt beiden Curven noch gemein.

49. Wenn die betrachteten Curven drei auf einander folgende Punkte gemein haben, so ist $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2}$ und das erste Glied der für $y' - y''$ entwickelten Reihe ist $\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3} - \frac{d^3\psi}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3}$; da es sein Zeichen mit h wechselt, so durchsetzen sich die Curven in dem gegebenen Punkte. Und allgemein, wenn der Ausdruck von $y' - y''$ mit einer geraden Potenz von h beginnt, so dass er mit h das Zeichen nicht wechselt, so berühren sich die Curven ohne sich zu schneiden; wenn aber derselbe Ausdruck mit einer ungeraden Potenz von h beginnt, so dass er mit h das Zeichen wechselt, so berühren sich die Curven und schneiden sich zugleich in dem betrachteten Punkte. Ein Beispiel hierzu ist aus der Construction des Kreises bekannt, welcher in einem gegebenen Punkte einen Kegelschnitt osculiert; derselbe hat im Allgemeinen drei Punkte mit der Curve gemein und durchsetzt daher dieselbe (vergl. „Kegelschn." Art. 247.); in den Endpunkten der Axen des Kegelschnitts hat aber der osculierende Kreis vier aufeinander folgende Punkte mit der Curve gemein und berührt sie daher ohne sie zu schneiden. Dieselbe Untersuchung bleibt für den Fall gültig, wo eine der Curven eine gerade Linie ist. Die Tangente in einem Inflexionspunkt und allge-

meiner jede Gerade, welche eine ungerade Anzahl aufeinander folgender Punkte mit der Curve gemein hat, durchsetzt die Curve an der betreffenden Stelle; in Bezug auf eine Tangente dagegen, welche eine gerade Zahl aufeinander folgender Punkte mit der Curve gemein hat, liegt die Curve in der Nachbarschaft des Berührungspunktes ganz auf einerlei Seite der Tangente.

50. Die Axe $y = 0$ ist eine dreifache Tangente, wenn die ihre Schnittpunkte mit der Curve bestimmende Gleichung von der Form

$$P(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2(x-d)\ldots = 0$$

ist; eine solche Tangente kann offenbar bei einer Curve von geringerer als der sechsten Ordnung nicht auftreten. Nach der Weise des Art. 40. unterscheiden wir vier Arten von dreifachen Tangenten, je nachdem die Berührungspunkte sämmtlich reell und verschieden sind, oder zwei derselben nicht reell sind, der dritte reell, oder alle drei in einem Punkte vereinigt. Das Letztere findet statt unter Voraussetzung der Gleichungsform $P(x-a)^4(x-b)\ldots = 0$ und die Axe schneidet die Curve in vier aufeinander folgenden Punkten. Man nennt den Berührungspunkt einer solchen Tangente einen Undulationspunkt. In derselben Weise sind vielfache Tangenten höherer Ordnungen und insbesondere auch Undulationspunkte höherer Ordnungen möglich, die letztern da, wo eine gerade Linie mit der Curve mehr als vier auf einander folgende Punkte gemein hat. Cramer nannte die Punkte, in denen die Tangente eine ungerade Zahl aufeinander folgender Punkte mit der Curve gemein hat, Punkte sichtbarer Inflexion und unterschied von ihnen die Undulationspunkte oder Points de Serpentement, welche für das Auge von gewöhnlichen Punkten der Curve nicht wesentlich verschieden sind.

51. Wir haben bisher nur den Fall erläutert, wo der Anfangspunkt der Coordinaten ein vielfacher Punkt oder eine der Axen eine vielfache Tangente ist; die Form der Gleichung kann aber auch die Existenz vielfacher Punkte und Tangenten von allgemeiner Lage anzeigen.

I. Wenn die Gleichung von der Form

$$\alpha\varphi + \beta\psi = 0$$

ist, wo α, β lineare Functionen der Coordinaten und φ, ψ beliebige Functionen derselben sind, so ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ein Punkt der Curve. Die Tangente derselben in diesem Punkte hat die Gleichung $\alpha\varphi' + \beta\psi' = 0$, wenn wir mit φ' und ψ' die Werthe bezeichnen, die die Functionen φ und ψ für den Punkt $\alpha = 0$, $\beta = 0$ annehmen. Denn die $(n-1)$ Punkte, in denen eine beliebige Gerade $\alpha - k\beta = 0$ durch den gedachten Punkt die Curve ferner schneidet, erhalten wir durch Substitution aus einer Gleichung von der Form

$$\beta\left\{k(\varphi' + M\beta + N\beta^2 + \cdots) + (\psi' + M'\beta + N'\beta^2 + \cdots)\right\} = 0;$$

und es muss daher $k\varphi' + \psi' = 0$ sein, damit noch eine zweite Wurzel dieser Gleichung den Werth $\beta = 0$ habe. Die Gleichung der Tangente $\alpha\varphi' + \beta\psi' = 0$ entsteht aus dieser Bedingung durch die Einsetzung des Werthes von k gleich $\frac{\alpha}{\beta}$.

II. Die durch

$$\alpha\beta\gamma\delta\ldots = \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$$

dargestellte Curve geht durch die Punkte $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$; $\alpha = 0$, $\beta_1 = 0$; $\alpha = 0$, $\gamma_1 = 0$; etc. $\beta = 0$, $\beta_1 = 0$; $\beta = 0$, $\gamma_1 = 0$; .... $\gamma = 0$, $\gamma_1 = 0$, ..., etc.

III. Wenn die Gleichung von der Form

$$\alpha\varphi + \beta^2\psi = 0$$

ist, so ist (vergl. „Kegelschn.“ Art. 272.) $\alpha = 0$ die Gleichung der Tangente im Punkte $\alpha = 0$, $\beta = 0$; weil zwei von den Punkten hier zusammenfallen, in denen diese Linie die Curve schneidet. Wenn $t_1 t_2 t_3 \ldots t_n + \beta^2\varphi = 0$ die Form der Gleichung der Curve ist, so sind $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, etc. die Gleichungen ihrer Tangenten in den Punkten, in welchen die Gerade $\beta = 0$ die Curve schneidet. Die Form dieser Gleichung zeigt, dass für alle die Tangenten einer Curve n^{ter} Ordnung, deren Berührungspunkte in einer Geraden liegen, die sämmtlichen übrigen Schnittpunkte mit der Curve in einer Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung $\varphi = 0$ enthalten sind.

IV. Wenn wir für die Gleichungsform

$$\alpha^2 \varphi + \alpha \beta \psi + \beta^2 \chi = 0$$

die Schnittpunkte mit irgend einer den Punkt $\alpha = 0$, $\beta = 0$ enthaltenden Geraden aufsuchen, so ergiebt sich, dass stets zwei derselben mit dem Punkte $\alpha = 0$, $\beta = 0$ zusammen fallen und somit, dass dieser Punkt ein Doppelpunkt der Curve ist. Genau so wie in I. oben und in Art. 37. folgern wir dann, dass die Tangenten der Curve in diesem Doppelpunkt durch die Gleichung

$$\alpha^2 \varphi' + \alpha \beta \psi' + \beta^2 \chi' = 0$$

dargestellt werden, sobald unter φ', ψ', χ' die Werthe verstanden sind, welche die Functionen φ, ψ, χ respective für die Coordinaten des Punktes $\alpha = 0$, $\beta = 0$ erhalten.

V. Ebenso stellt die Gleichung von der Form

$$\alpha^3 \varphi + \alpha^2 \beta \psi + \alpha \beta^2 \chi + \beta^3 \omega = 0$$

eine Curve mit einem dreifachen Punkt in $\alpha = 0$, $\beta = 0$ dar und die drei demselben entsprechenden Tangenten sind unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen durch

$$\alpha^3 \varphi' + \alpha^2 \beta \psi' + \alpha \beta^2 \chi' + \beta^3 \omega' = 0$$

gegeben.

VI. Wenn die Gleichung einer Curve die Form

$$\alpha \varphi + \beta^2 \gamma^2 \psi = 0$$

hat, so ist $\alpha = 0$ die Gleichung einer Doppeltangente derselben; ihre Berührungspunkte liegen in den Geraden $\beta = 0$, $\gamma = 0$ respective.

VII. Eine Gleichung von der Form

$$\alpha \varphi + \beta^3 \psi = 0$$

macht eine Inflexionstangente $\alpha = 0$ ersichtlich, deren Berührungspunkt in $\beta = 0$ gelegen ist.

52. Wir wollen den letzten Artikel zuerst dadurch erläutern, dass wir zeigen, wie die Gleichung der Curve die Natur ihrer unendlich entfernten Punkte zu untersuchen gestattet.

Wir schreiben die allgemeine Gleichung wie in Art. 26. mit $z = 0$ als der unendlich fernen Geraden

$$u^{(n)} + u^{(n-1)} z + u^{(n-2)} z^2 + \cdots = 0,$$

und erhalten somit die n unendlich fernen Punkte der Curve durch die Substitution $z=0$, d. h. aus der Gleichung $u^{(n)}=0$. Lösen wir dieselbe nach $y:x$ auf, so erhalten wir die Asymptoten-Richtungen der Curve als die Richtungen von n Geraden aus dem Coordinaten-Anfang in der Form

$$(y-m_1x)(y-m_2x)(y-m_3x)\ldots(y-m_nx)=0.$$

Eine Curve n^{ter} Ordnung hat im Allgemeinen n Asymptoten, die Tangenten in den n Punkten, in denen die unendlich ferne Gerade $x_1=0$ sie schneidet. Die Gleichungen derselben bestimmen wir wie folgt, nachdem die Gleichung $u^{(n)}=0$ für $y:x$ aufgelöst worden ist. Es ergiebt sich aus III. des letzten Artikels, dass für eine auf die Form $t_1t_2\ldots t_n+z^2\varphi=0$ reducierte Gleichung $t_1=0,\ldots$ die n Asymptoten repräsentieren; die gegebene Gleichung

$$(y-m_1x)(y-m_2x)\cdots+zu^{(n-1)}+z^2u^{(n-2)}+\cdots=0$$

kann aber immer in die Form

$$(y-m_1x+\lambda_1z)(y-m_2x+\lambda_2z)\cdots=z^2\varphi$$

übergeführt werden, da die Glieder vom n^{ten} Grade in x und y für beide Gleichungen dieselben sind und die n Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in der zweiten, so bestimmt werden können, dass die n Glieder vom Grade $(n-1)$ in beiden gleichfalls übereinstimmen. Wir wenden zu grösserer Deutlichkeit die Methode auf ein Beispiel an. Die Gleichung

$$(x+y)(2x+y)(3x+y)+17x^2+11xy+2y^2+12x+10y+36=0$$

werde in die Form

$$(x+y+\lambda_1)(2x+y+\lambda_2)(3x+y+\lambda_3)+Ax+By+C=0$$

gebracht. Dann gelten für die Bestimmung der λ_i die drei Gleichungen

$$6\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3=17,\quad 5\lambda_1+4\lambda_2+3\lambda_3=11,\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2$$

und wir erhalten die gewünschte Form in

$$(x+y+4)(2x+y-3)(3x+y+1)+43x+21y+48=0.$$

Wir bemerken noch, dass die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Identität erfüllen

$$\frac{17x^2+11xy+2y^2}{(x+y)(2x+y)(3x+y)}=\frac{\lambda_1}{x+y}+\frac{\lambda_2}{2x+y}+\frac{\lambda_3}{3x+y}$$

und dass allgemein die Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ durch die Zerlegung des Bruches $u^{(n-1)} : u^{(n)}$ in seine Partialbrüche erhalten werden.

53. Wenn zwei Wurzeln der Gleichung $u^{(n)} = 0$ einander gleich sind $(m_1 = m_2)$; so nimmt die allgemeine Gleichung die Form $(y - m_1 x)^2 \varphi + z\psi = 0$ an, zwei der Schnittpunkte von $z = 0$ mit der Curve fallen zusammen oder die unendlich ferne Gerade berührt die Curve. Wären drei Wurzeln derselben Gleichung einander gleich, so hätte die unendlich ferne Gerade drei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein oder berührte dieselbe in einem Inflexionspunkt. Wenn in der allgemeinen Gleichung der Coefficient von y^n gleich Null ist, so geht die Axe der y durch einen Punkt der Curve im Unendlichen und wir erhalten nur eine Gleichung vom Grade $(n - 1)$ zur Bestimmung ihrer übrigen Schnittpunkte mit der Curve. Wenn auch der Coefficient von y^{n-1} verschwindet, so ist die Axe der y eine Asymptote. Sind zwei Factoren von $u^{(n)}$ einander gleich und ist überdiess einer derselben ein Factor von $u^{(n-1)}$, so hat die Curve einen Doppelpunkt im Unendlichen, denn die Form ihrer Gleichung ist

$$(y - m_1 x)^2 \varphi + (y - m_1 x) z\psi + z^2 \chi = 0.$$

54. Wie die singulären Punkte einer Curve im Allgemeinen gefunden werden können, wollen wir später entwickeln; hier wollen wir eine Auswahl von Beispielen zur Erläuterung der vorigen Artikel vereinigen, in denen die Existenz der singulären Punkte aus der Form der Gleichungen direct erhellt, um dadurch auf die Anwendung allgemeiner Methoden vorzubereiten.[4])

1. $x^4 - ax^2y + by^3 = 0$. 2. $x^4 - 2ax^2y + 2x^2y^2 + ay^3 + y^4 = 0$. In beiden Fällen ist der Anfangspunkt ein dreifacher Punkt; die Tangenten desselben im ersten Falle giebt die Gleichung $ax^2y = by^3$; im zweiten die Gleichung $2x^2y = y^3$. Nach Art. 43. kann keine dieser Curven einen andern vielfachen Punkt haben.

3. $ay^2 - x^3 \pm bx^2 = 0$. Der Anfangspunkt ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten durch die Gleichung $ay^2 \pm bx^2 = 0$ bestimmt sind, für das positive Zeichen also ein conjugierter Punkt.

4. $(x^2 - a^2)^2 = ay^2(2y + 3a)$ oder

$$(x - a)^2 (x + a)^2 = ay^2 (2y + 3a).$$

Hier sind offenbar $x - a = 0$, $y = 0$ und $x + a = 0$, $y = 0$ Doppelpunkte. Um die bezüglichen Tangenten zu erhalten, machen wir zuerst $x = 0$, $y = 0$ in den Factoren von $(x - a)^2$, y^2 und erhalten $4(x - a)^2 = 3y^2$; und in der nämlichen Art für die Tangenten im andern Doppelpunkt $4(x + a)^2 = 3y^2$. Die Curve hat aber einen dritten Doppelpunkt, dessen Existenz aus der äquivalenten Form

$$x^2 (x^2 - 2a^2) = a (2y - a) (y + a)^2$$

ersichtlich wird; es ist der Punkt $x = 0$, $y + a = 0$ und die Tangenten in demselben sind durch $2x^2 = 3 (y + a)^2$ gegeben. Nach Art. 42. ergiebt sich, dass die Curve ausser den bisher nachgewiesenen keine andern singulären Punkte haben kann.

5. $(by - cx)^2 = (x - a)^5$. Der Punkt $by - cx = 0$, $x - a = 0$ ist eine Spitze von der besonderen Art, dass die entsprechende Tangente die Curve in ihm in fünf einander folgenden Punkten schneidet.

6. $x^4 (x + b) = a^3 y^2$. Der Anfangspunkt ist ein Doppelpunkt, dessen Tangente die Curve in vier auf einander folgenden Punkten schneidet; die Curve hat auch einen dreifachen Punkt im Unendlichen, für welchen die unendlich ferne Gerade ihre einzige Tangente ist. Die Gerade $x + b = 0$ berührt die Curve, wo sie die Axe der x schneidet und auch in einem unendlich entfernten Inflexionspunkt.

7. $x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}} + x_3^{\frac{2}{3}} = 0$. Die von den Wurzeln befreite Gleichung wird

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 = 27 x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

und in dieser Form ist die Existenz von sechs Spitzen offenbar, denn jeder der Punkte, wo $x_i = 0$, $x_j^2 + x_k^2 = 0$ schneidet, ist ein Doppelpunkt mit der einzigen Tangente $x_i = 0$; aber diese Spitzen sind sämmtlich nicht reell. Die Curve hat auch vier Doppelpunkte, nämlich die Punkte

$$x_1 \pm x_2 = 0, \; x_1 \pm x_3 = 0;$$

denn setzt man $x_2 \mp x_1 = u$, $x_3 \mp x_1 = v$, also $x_2 = u \pm x_1$, $x_3 = v \pm x_1$, so erhält die Gleichung durch Substitution die Form $u^2\varphi + uv\psi + v^2\chi = 0$. Die Tangenten in den Doppelpunkten werden also durch die Gleichung $u^2 \pm uv + v^2 = 0$ bestimmt und die fraglichen Doppelpunkte sind somit conjugierte Punkte; in der That sind sie die einzigen reellen Punkte der Curve.

III. Abschnitt.

Von der graphischen Darstellung der Curven.

55. Es erscheint zweckmässig, einige Beispiele von der Art zu geben, in welcher die Figur einer Curve aus ihrer Gleichung ermittelt werden kann. Wenn ein bestimmter Werth a von einer der Variabeln x gegeben ist, so kann die aus seiner Substitution in

die Gleichung der Curve entspringende numerische Gleichung für y aufgelöst werden — wenigstens durch Annäherung — und sind damit die Punkte bestimmt, in denen die gerade Linie $x = a$ die Curve schneidet. Durch Wiederholung dieses Verfahrens für verschiedene Werthe von x erhält man eine Anzahl von Punkten der Curve, und durch Verbindung derselben durch einen stetigen Zug eine Idee von der Gestalt derselben. Indem wir die Werthe von x speciell beachten, welche die Werthe von y oder einige derselben imaginär machen, können wir die Existenz von Ovalen erkennen oder bestimmen, ob die Curve in irgend einer Richtung begrenzt ist. Wir haben früher (Art. 52.) gezeigt, wie die Existenz unendlicher Aeste in der Curve zu untersuchen ist und wie ihre Asymptoten zu bestimmen sind; und wir werden im nächsten Kapitel zeigen, wie ihre vielfachen und ihre Inflexionspunkte zu finden sind. Nach Art. 48. giebt der Werth von $\frac{dy}{dx}$ in jedem Punkte die Richtung der Tangente in diesem Punkte an und indem wir die Punkte aufsuchen, für welche $\frac{dy}{dx}$ den Werth Null oder den Werth Unendlich erhält, so sind das diejenigen Punkte, in denen die Curve parallel läuft zur Axe der x oder der y respective.

Wir müssen dabei streben, von allen Vereinfachungen Vortheil zu ziehen, welche die Gleichung der Curve gestattet. Wenn wir z. B. das Büschel der zu einer Asymptote parallelen Geraden betrachten, oder das Büschel der Geraden durch einen schon bekannten Punkt der Curve, so wird die Gleichung, welche die andern Schnittpunkte jeder dieser Geraden mit der Curve bestimmt, von einem um Eins niedrigeren Grade als die Ordnungszahl der Curve ist. Zeigt die Gleichung, dass die Curve einen Doppelpunkt oder einen andern vielfachen Punkt hat, so ist es von Vortheil, das Büschel der durch diesen Punkt gehenden Linien zu benutzen, weil die fragliche Gleichung dann um zwei Dimensionen erniedrigt wird.

Es giebt kaum eine für das Studium nützlichere Uebung als das Zeichnen von Curven, insbesondere solcher Curven, in deren Gleichung ein Parameter oder mehrere Parameter auf-

treten, welche eine Reihe verschiedener Werthe zulassen. Im Fall eines einzigen Parameters kann derselbe als eine in der dritten Dimension des Raumes gemessene Ordinate z betrachtet werden, so dass die Aufgabe der Zeichnung der Curven als die der Darstellung einer Reihe von Parallelschnitten einer krummen Fläche angesehen werden kann.

Einige Beispiele müssen hinreichen [5]).

1. $x^4 - ax^2y + by^3 = 0$. (Beisp. 1., Art. 54.) Da der Anfangspunkt der Coordinaten ein dreifacher Punkt ist, so betrachten wir das durch ihn gehende Strahlenbüschel, d. h. wir setzen $y = mx$ und erhalten $x = m(a - bm^2)$, eine Function, welche für von 0 bis $\pm\infty$ wachsende m von 0 für $m = 0$ zu einem Maximalwerth bei $a - 3bm^2 = 0$ ansteigt, um dann abzunehmen und für $a - bm^2 = 0$ zu verschwinden, und die mit weiter wachsendem m stets wachsende negative Werthe erhält. Die Curve ist in Bezug auf die Axe der y offenbar symmetrisch. Die Figur stellt sie also dar.

Fig. 16.



2. $(x^2 - a^2)^2 = ay^2(3a + 2y)$. (Beisp. 4., Art. 54.) Es ist

$$x^2 = a^2 \pm \sqrt{\{ay^2(3a + 2y)\}}.$$

Fig. 17.



Die Curve ist also zur Axe der y symmetrisch und hat auf jeder Seite derselben zwei den beiden Zeichen der Wurzel entsprechende Aeste, für welche, soweit sie reell sind, die Linien $x = \pm a$ Symmetrieaxen für die Richtung der x sind. Beide Aeste schneiden sich für $y = 0$ und geben daher in den Punkten $x = \pm a$ zwei Doppelpunkte der Curve. Mit positivem wachsenden y wächst die Wurzel unbegrenzt, es wachsen also auch die dem einen Aste jeder Seite entsprechenden Werthe der x ohne Ende; indess die dem andern Aste jeder Seite entsprechenden abnehmen und den Werth Null erreichen für $a^4 = 3a^2y^2 + 2ay^3$, nämlich für $2y = a$ als die einzige positive Wurzel dieser Gleichung; über den Werth $y = \frac{1}{2}a$ erhebt sich die Ordinate dieses Astes nicht auf der positiven Seite. Für negative Werthe von y erreicht die Wurzel ihren Maximalwerth bei $y + a = 0$. Das eine Paar der Aeste schneidet sich in einem Doppelpunkt in $y = -a$, das andere erreicht den Maximalwerth seiner Abscisse für dieselbe Ordinate. Den Werth $3a + 2y = 0$ kann keine überschreiten. Die Figur giebt also die Curve richtig an.

Diese Curve kann als Beispiel der Behandlung in projectivischen Coordinaten dienen. Wenn man die Doppelpunkte als die Fundamentalpunkte — den in der Axe der y als A_2 — und den Schwerpunkt des

von ihnen gebildeten Dreiecks als Einheitpunkt wählt, so geben die Schlussformeln des Art. 23. für die zum Uebergang von den Cartesischen zu projectivischen Coordinaten dienenden Transformationen die folgenden Ausdrücke:

$$x = \frac{a\,(x_3 - x_1)}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad y = \frac{-\,a x_2}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Durch dieselben geht die Gleichung der Curve über in

$$16 x_1^2 x_3^2 + 16 x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_3) + x_2^2 (x_1^2 + x_3^2 + 10 x_1 x_3) = 0.$$

Aus derselben bildet man (Art. 51.) die Gleichungen der Tangentenpaare in den Doppelpunkten

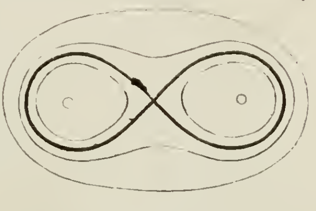
$$x_2^2 + 16 x_2 x_3 + 16 x_3^2 = 0,$$
$$x_1^2 + 10 x_1 x_3 + x_3^2 = 0,$$
$$16 x_1^2 + 16 x_1 x_2 + x_2^2 = 0.$$

Für jeden Strahl $x_1 = \mu x_3$ erhält man die zwei nicht in den Doppelpunkt fallenden Schnitte aus

$$x_2^2 (\mu^2 + 10\mu + 1) + 16 x_2 x_3 \mu (\mu + 1) + 16 \mu^2 x_3^2 = 0.$$

3. Wenn die Basis eines Dreiecks gleich $2c$ und das Product der beiden andern Seiten desselben gleich m^2 gegeben ist, so ist der Ort der Spitze das Oval von Cassini, dessen Gleichung für den Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkt der Basis durch

Fig. 18.

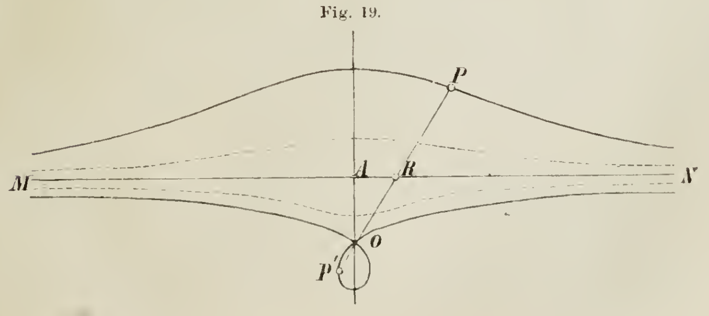


$$(x^2 + y^2 - c^2)^2 - 4 c^2 x^2 = m^4$$

ausgedrückt ist. Die Figur giebt die Gestalt der Curve für verschiedene Werthe von m; die stark eingezeichnete Linie für $m = c$ ist die Lemniscate von Bernoulli, für $m < c$ besteht die Cassini'sche Curve aus zwei conjugierten Ovalen, die von der Lemniscate umschlossen sind; $m > c$ giebt ein die letztere umschliessendes Oval.

4. Wenn in einem um den festen Punkt O sich drehenden Strahl

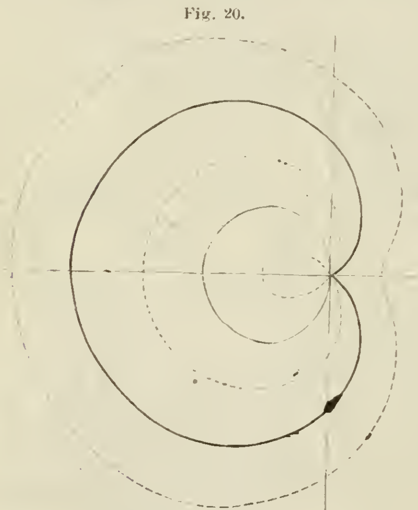
Fig. 19.



von seinem Schnittpunkt mit einer festen Geraden MN aus eine Strecke $RP = RP'$ von constanter Länge nach beiden Seiten abgetragen wird, so ist der Ort von P die Conchoide des Nikomedes; von diesem Geometer construiert, um das Problem der Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen zu lösen. Für $OA = p$, $RP = m$ ist ihre Polargleichung $(\varrho \pm m) \cos \omega = p$ und die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $m^2 y^2 = (p - y)^2 (x^2 + y^2)$. Die gerade Linie MN berührt die Curve in einem singulären Punkt in unendlicher Ferne und hat dort vier aufeinander folgende Punkte mit ihr gemein. Der Punkt O ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten die Gleichung $p^2 x^2 + (p^2 - m^2) y^2 = 0$ bestimmt; insbesondere also ein Knotenpunkt, ein conjugierter Punkt oder eine Spitze, je nachdem $m \gtreqless p$ ist. In der Figur repräsentiert die volle Linie den Fall $m > p$, die punktierte den Fall $m < p$.

5. Der gleichgebildete Ort für einen festen Kreis und einen festen Punkt in ihm ist Pascal's Schnecke (Limaçon). Ihre Polargleichung ist

Fig. 20.



$$\varrho = p \cos \omega \pm m;$$

die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $(x^2 + y^2 - px)^2 = m^2 (x^2 + y^2)$. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein Doppelpunkt und zwar ein Knotenpunkt oder ein conjugierter Punkt, je nachdem $p \gtrless m$ ist; für $p = m$ wird er zur Spitze und die Curve hat die Herzform und wird Cardioide genannt. Sie ist in der Figur stark und voll eingezeichnet; die beiden punktierten zeigen die Formen, welche den Fällen $p > m$ und $p < m$ respective entsprechen.

6. $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = c^4$ mit $b < a$. Für $c = 0$ besteht die

Fig. 21*a*.

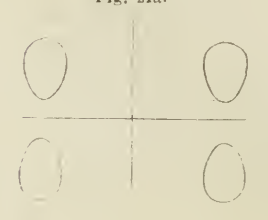
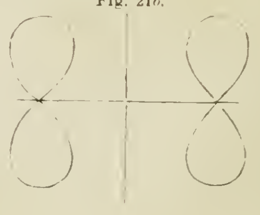
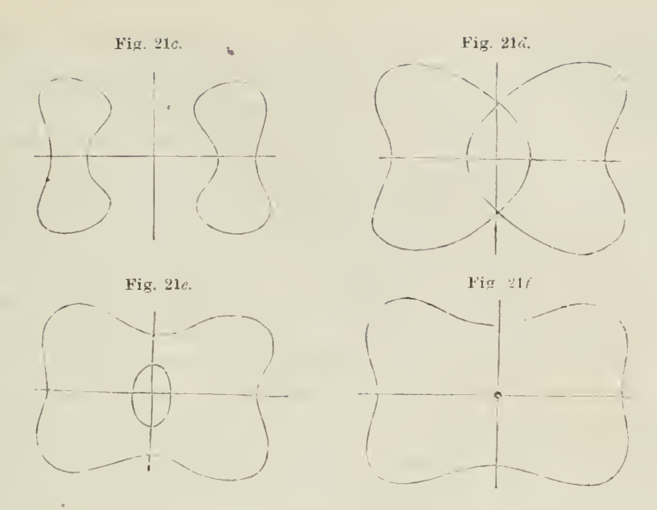
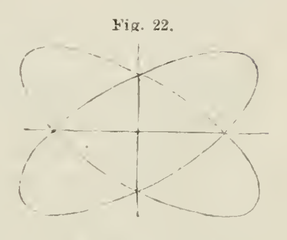


Fig. 21*b*.




Fig. 21c. Fig. 21d. Fig. 21e. Fig. 21f.


Fig. 22.

Curve aus den vier conjugierten Punkten $x = \pm a$, $y = \pm b$. Die Figuren zeigen die Fälle: a) $c < b$; b) $c = b$; c) $c \gtrless \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; d) $c = a$; e) $c > a$ aber $< \sqrt[4]{(a^4 + b^4)}$; f) $c = \sqrt[4]{(a^4 + b^4)}$. Für noch grössere Werthe von c hat die Curve eine ähnliche Form, wie in diesem Falle, aber ohne den conjugierten Punkt im Anfangspunkt der Coordinaten. Gür $c = a = b$ zerfällt sie in die zwei Ellipsen, wie in Fig. 22.

56. Wir kehren noch mit einigen Betrachtungen zu dem Falle zurück, dass der Anfangspunkt der Coordinaten ein singulärer Punkt der Curve ist. Es ist dann für die Untersuchung seiner Natur oft zweckmässig, y in eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe zu entwickeln; denn wenn die Gleichung in die Form $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + \cdots$ mit α als dem kleinsten bei x auftretenden Exponenten gebracht ist, so wissen wir, dass in der Nachbarschaft des Anfangspunktes die Curve sich der leicht zu construierenden Curve $y = Ax^\alpha$ anschliesst. Um eine solche Entwickelung zu vollziehen, können wir ein von Newton angegebenes Verfahren am besten in der folgenden Form benutzen[6]). Wir setzen in der Gleichung $y = Ax^\alpha$ und bestimmen die positive Grösse α durch die Bedingung, dass die Exponenten von zwei oder

mehreren Gliedern gleich und kleiner als der Exponent jedes andern Gliedes sind; diess kann durch Versuche geschehen, indem man die Exponenten jedes Paars von Gliedern gleichsetzt und bemerkt, ob der resultierende Werth von α positiv ist und ob die gleichen Exponenten nicht grösser sind als der Exponent eines andern Gliedes. Hat man so α gefunden, so bestimmt man A, indem man die Grösse gleich Null setzt, welche die Glieder mit gleichen Exponenten multipliciert. Dann kann, wenn es nöthig wäre, die Entwickelung durch die Substitution von $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta}$ fortgesetzt werden, in der A und α die vorher gefundenen Werthe haben und β und B durch ein ähnliches Verfahren bestimmt werden. Ist z. B. die Curve durch $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ dargestellt, wo der Anfangspunkt der Coordinaten ein Doppelpunkt ist mit den beiden Axen als seinen Tangenten, so wird die Gleichung für $y = Ax^{\alpha}$

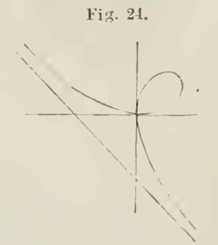
$$x^3 + A^3 x^{3\alpha} - 3aAx^{\alpha+1} = 0.$$

Setzen wir versuchsweise $3 = 3\alpha$, um zwei Exponenten gleich zu machen, so wird $\alpha = 1$ und die gleichen Exponenten werden grösser als der Exponent $\alpha + 1$ des andern Gliedes; dieser Werth ist daher zu verwerfen. Setzen wir dann $3 = \alpha + 1$, $\alpha = 2$, so macht diess die gleichen Exponenten kleiner als den Exponenten des andern Gliedes. Die Gleichung wird $(1 - 3A)\, x^3 + A^3 x^6 = 0$ und indem wir A so bestimmen, dass der Coefficient von x^3 verschwindet, erkennen wir, dass die Gleichung der Curve in der Form $y = \frac{1}{3a} x^2 + \cdots$ dargestellt werden kann, in welcher alle andern Glieder von höherem als dem zweiten Grade sind; und dass also die Form des einen Astes der Curve im Anfangspunkt sich an die Parabel $3ay = x^2$ anschliesst. Wir finden aber drittens durch Gleichsetzung der Exponenten 3α und $\alpha + 1$ den Werth $\alpha = \frac{1}{2}$, für welchen auch die gleichen Exponenten die niedrigsten werden; da die Coefficienten dieser Glieder A^3 und $-3aA$ sind, so ergiebt sich $A = \sqrt{3a}$ und der Ast ist $y = \sqrt{(3a)}\, x^{\frac{1}{2}} + \cdots$, so dass seine Form in der Nachbarschaft des Anfangspunktes sich der Parabel $y^2 = 3ax$ nähert. Es ist für den gegenwärtigen Zweck nicht nöthig, wenn es

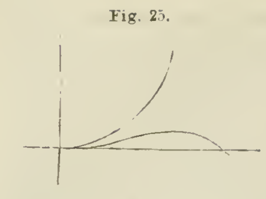
aber wünschenswerth wäre, die Entwickelung fortzusetzen, so würden wir $y = \frac{1}{3a} x^2 + Bx^\beta$ substituiren; die niedrigsten Glieder wären dann $\frac{1}{27a^3} x^6 + \frac{B}{3a^2} x^{1+\beta} - 3aBx^{\beta+1} = 0$. Wir können dann die Exponenten zweier Glieder gleich und kleiner als den Exponenten des dritten Gliedes durch $\beta = 5$ machen, und es wird $B = \frac{1}{81a^4}$. Durch das Vorige ist aber gezeigt, dass die Verzeichnung der beiden Parabeln $3ay = x^2$ und $y^2 = 3ax$ in der Nachbarschaft des Anfangspunktes die Gestalt der zu construirenden Curve näherungsweise giebt.

Fig. 23.

57. Dasselbe Verfahren führt zu einer Bestimmung der unendlichen Aeste der Curve. Wir entwickeln y nach absteigenden Potenzen von x und machen nachher bei dem entwickelten Vorgange die gleichen Exponenten grösser als den Exponenten jedes andern Gliedes. So haben wir in dem vorher gegebenen Beispiel durch die Gleichsetzung $3 = 3\alpha$, $\alpha = 1$ und die entsprechende Coefficientenverbindung $A^3 + 1$; indem wir uns auf den reellen Werth für A beschränken, setzen wir ferner $y = -x + Bx^\beta$ und finden in gleicher Weise $\beta = 0$, $B = -a$, somit den Ausdruck $y = -x - a + \cdots$, aus welchem wir sehen, dass $x + y + a = 0$ eine Asymptote ist. Die Gestalt zeigt die beistehende Figur.

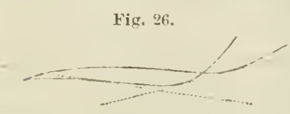

Fig. 24.

58. In dem Falle der einfachen Spitze, von welcher wir in Art. 39. ein Beispiel hatten, liegen die beiden in ihr zusammentreffenden Aeste auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente und ihre Convexitäten sind einander zugewendet. Aber es giebt eine Spitze, die allerdings eine Singularität höherer Ordnung ist, bei welcher die beiden Aeste auf derselben Seite der Tangente liegen. So giebt z. B. die Gleichung $m(ay - x^2)^2 = x^5$ für alle positiven Werthe von x reelle Werthe von y; und wenn wir die Gleichung in der Form $ay = x^2 \pm \frac{x^{5/2}}{m^{1/2}}$ schreiben, so wird


Fig. 25.

ersichtlich, dass für kleine Werthe von x, als für welche das zweite Glied der rechten Seite kleiner ist als das erste, beide Werthe von y positiv sind, so dass beide Aeste auf der obern Seite der Axe der x als ihrer Tangente liegen — wie es die beistehende Figur zeigt.

Wir haben in Art. 40. gesehen, dass gewöhnliche vielfache Punkte höherer Ordnung als aus der Vereinigung einer Anzahl von Doppelpunkten hervorgehend betrachtet werden können. Cayley hat weiter gezeigt [7]), dass jede höhere Singularität angesehen werden könne als äquivalent einer gewissen Zahl einfacher Singularitäten: Knotenpunkt, gewöhnliche Spitze, Doppeltangente und Inflexion. So ist eine Spitze der hier besprochenen Art äquivalent einem Knoten, einer Spitze, einer Doppeltangente und einer Inflexion, wie es von der beistehenden Figur aus verfolgt werden kann, indem man Knotenpunkt und Spitze sich vereinigen lässt.


Fig. 26.

IV. Abschnitt.

Pole und Polaren.

59. Die Methode, welche wir nun anwenden wollen, um die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen eine Curve vielfache Punkte oder Tangenten hat, und um die Lage derselben zu erkennen, ist im Grunde genommen mit der für den Fall des Anfangspunktes früher Entwickelten identisch. Wir betrachten ein Büschel von geraden Linien, die von einem gegebenen Punkte ausgehen; wir bilden die Gleichung, welche die Coordinaten der n Punkte bestimmt, in denen ein solcher Strahl die Curve schneidet, und untersuchen die Bedingungen, unter welchen einer oder mehrere dieser Punkte mit dem gegebenen Punkte selbst zusammenfallen. Um die Coordinaten dieser n Punkte zu bestimmen, gebrauchen wir die in den „Kegelschn.“ Art. 110, 321. entwickelte Methode

von Joachimsthal. Weil die Coordinaten jedes Punktes in der geraden Verbindungslinie zweier Punkte x_i' und x_i'' von der Form $\lambda x_i' + \mu x_i''$ sind, so bestimmen wir die Schnittpunkte zweier Geraden mit irgend einer Curve durch die Substitution dieser Werthe für die x_i in die Gleichung derselben und die Bestimmung derjenigen Werthe von $\lambda : \mu$, welche der resultierenden Gleichung genügen. Eine nothwendige Vorbereitung der Untersuchung ist die sorgfältige Discussion der Functionen, welche sich bei dieser Substitution darbieten.

Wenn wir in einer homogenen Function U vom n^{ten} Grade in den x_i für x_i den Werth $\lambda x_i + \mu x_i'$ einsetzen, so folgt aus dem Taylor'schen Satze, dass U der Coefficient von λ^n ist und dass der Coefficient von $\lambda^{n-1}\mu$ sein wird

$$x_1' \frac{dU}{dx_1} + x_2' \frac{dU}{dx_2} + x_3' \frac{dU}{dx_3} \text{ oder } x_1' U_1 + x_2' U_2 + x_3' U_3,$$

wenn wir die Abkürzung U_i für den Differentialquotienten von U nach x_i gebrauchen. Wir wollen das Symbol $\triangle$ zur Bezeichnung der Operation $x_1' \frac{d}{dx_1} + x_2' \frac{d}{dx_2} + x_3' \frac{d}{dx_3}$ anwenden und können damit den Coefficienten von $\lambda^{n-1}\mu$ in der Form $\triangle U$ schreiben. In analoger Art ergiebt sich der Coefficient von

$$\lambda^{n-2}\mu^2 \text{ gleich } \tfrac{1}{2}\left\{x_1'^2 \frac{d^2 U}{dx_1^2} + x_2'^2 \frac{d^2 U}{dx_2^2} + x_3'^2 \frac{d^2 U}{dx_3^2} \right.$$
$$\left. + 2x_2'x_3' \frac{d^2U}{dx_2 dx_3} + 2x_3'x_1' \frac{d^2U}{dx_3 dx_1} + 2x_1'x_2' \frac{d^2U}{dx_1 dx_2}\right\}$$

oder mit U_{ik} als Symbol für den zweiten Differentialquotienten nach x_i und x_k

$$\tfrac{1}{2}\left\{x_1'^2 U_{11} + x_2'^2 U_{22} + x_3'^2 U_{33} + 2x_2'x_3' U_{23} + 2x_3'x_1' U_{31} \right.$$
$$\left. + 2x_1'x_2' U_{12}\right\};$$

wir können ihn aber auch in der symbolischen Form

$$\tfrac{1}{2}\left(x_1' \frac{d}{dx_1} + x_2' \frac{d}{dx_2} + x_3' \frac{d}{dx_3}\right)^2 U \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} \triangle^2 U$$

darstellen.

In gleicher Weise wird der Coefficient von $\lambda^{n-3}\mu^3$ in der Entwickelung $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \triangle^3 U$ und so fort; der letzte Coef-

ficient ist $\frac{1}{1.2\ldots n}\triangle^n U$. Es ist aber aus der Symmetrie der Substitution evident, dass dieser mit U' übereinstimmen muss und dass allgemein die Coefficienten von zwei entsprechenden Gliedern der Entwickelung wie $\lambda^a\mu^b$, $\lambda^b\mu^a$ nur durch den Wechsel der gestrichenen und der ungestrichenen Variabeln x_i unterschieden sein können; so dass also $\triangle^{n-1}U$ nur durch einen numerischen Factor von $\triangle U'$ oder

$$x_1 U_1' + x_2 U_2' + x_3 U_3'$$

und allgemein auch

$$\left(x_1'\frac{d}{dx_1}+x_2'\frac{d}{dx_2}+x_3'\frac{d}{dx_3}\right)^{n-p}U \text{ von } \left(x_1\frac{d}{dx_1'}+x_2\frac{d}{dx_2'}+x_3\frac{d}{dx_3'}\right)^p U'$$

nur durch einen solchen Factor verschieden sind. Wir wollen die letztere Function durch $\triangle^p U'$ bezeichnen, so dass der dem U beigesetzte Strich eben den Wechsel der gestrichenen und ungestrichenen Variabeln andeutet.

60. Die Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\triangle U = 0$ wird die erste Polare des Punktes x_i' in Bezug auf $U = 0$ genannt; in derselben Art heisst $\triangle^2 U = 0$ die zweite Polare, etc., so dass sich die Ordnung der auf einander folgenden Polarcurven immer um Eins vermindert und also die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare ein Kegelschnitt und die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare eine gerade Linie ist. Nach der Schlussbemerkung des letzten Artikels sind die Gleichungen der Polargeraden und des Polarkegelschnitts respective

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1'}+x_2\frac{d}{dx_2'}+x_3\frac{d}{dx_3'}\right)U' = 0,$$

$$\left(x_1\frac{d}{dx_1'}+x_2\frac{d}{dx_2'}+x_3\frac{d}{dx_3'}\right)^2 U' = 0.$$

Weil $\triangle^2 U$ erhalten wird, indem man die Operation $\triangle$ an der Function $\triangle U$ vollzieht, so ist die zweite Polare von x_i' in Bezug auf $U = 0$ zugleich die erste Polare desselben Punktes in Bezug auf $\triangle U = 0$; und allgemein ist die m^{te} Polarcurve eines Punktes auch eine Polarcurve desselben Punktes in Bezug auf jede k^{te} Polarcurve desselben Punktes, so lange $m > k$ ist; denn man hat $\triangle^k(\triangle^l U) = \triangle^{k+l}U$.

Für einen Fundamentalpunkt, für welchen x_1' und x_2' verschwinden, reduciert sich die Operation $\triangle$ auf Differentiation

nach x_3; analog für die Cartesischen Coordinaten. Wir denken die Cartesische Gleichung durch Einführung der Lineareinheit homogen gemacht, also in der Form

$$u^{(0)} z^n + u^{(1)} z^{n-1} + u^{(2)} z^{n-2} + \cdots = 0$$

geschrieben und finden ohne Schwierigkeit durch Differentiation nach z für die Gleichungen der Polarlinie, des Polarkegelschnitts, etc., des Anfangspunktes

$$n u^{(0)} z + u^{(1)} = 0, \quad \tfrac{1}{2} n (n-1) u^{(0)} z^2 + (n-1) u^{(1)} z + u^{(2)} = 0, \text{ etc.}$$

61. Der Ort aller der Punkte, deren Polargeraden durch einen gegebenen festen Punkt gehen, ist die erste Polare dieses Punktes. Die Gleichung der Polargeraden

$$x_1 U_1' + x_2 U_2' + x_3 U_3' = 0$$

drückt eine Relation zwischen den Coordinaten x_i eines Punktes der Polarlinie und den Coordinaten x_i' des Pols derselben aus; dass die ersteren fest und gegeben und die letzteren variabel sind, drücken wir einfach durch den Wechsel der Accente oder Striche aus, so dass die Gleichung des fraglichen Ortes

$$x_1' U_1 + x_2' U_2 + x_3' U_3 = 0$$

wird, die Gleichung der ersten Polare von x_i'.

Es giebt $(n-1)^2$ Punkte, deren Polarlinien in Bezug auf $U = 0$ mit einer gegebenen Geraden zusammen fallen, oder wie wir abkürzend sagen wollen, jede gerade Linie hat in Bezug auf eine Curve n^{ter} Ordnung $(n-1)^2$ Pole, die gemeinschaftlichen Punkte des Büschels, welches die ersten Polaren ihrer Punkte bilden. Denn wenn wir zwei Punkte in der Geraden willkürlich wählen, so liegen die Pole der Geraden offenbar in der ersten Polare eines jeden von ihnen und sind somit die Durchschnittspunkte dieser Curven. Also haben die ersten Polaren aller Punkte einer geraden Linie $(n-1)^2$ gemeinsame Punkte, nämlich die $(n-1)^2$ Pole der geraden Linie.

In derselben Weise erkennt man als den Ort der Punkte, deren Polarkegelschnitte durch einen gegebenen Punkt gehen, die zweite Polare des Punktes u. s. w. Wenn die Polargerade oder wenn irgend eine andere Polare eines Punktes

in Bezug auf eine gegebene Curve durch den Punkt selbst hindurchgeht, so liegt dieser Punkt auf der Curve. Denn wenn wir für die x_i' in die Gleichung der Polare die x_i substituieren, so wird sie mit der Gleichung der Curve identisch, weil die Vollziehung der Operation $x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + x_3 \frac{d}{dx_3}$ an einer homogenen Function dieselbe nur mit einem numerischen Factor behaftet.

62. **Wenn eine Curve einen vielfachen Punkt vom Grade k hat, so ist dieser Punkt ein vielfacher Punkt vom Grade $(k-1)$ in jeder ersten Polare, vom Grade $(k-2)$ in jeder zweiten Polare, u. s. w.** Denn wenn wir den Fundamentalpunkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in den vielfachen Punkt verlegen, so sind die in x_1, x_2 niedrigsten potenzierten Glieder in der Gleichung der Curve vom Grade k, nämlich $u^{(k)} x_3^{n-k}$ und weil bei der Bildung der ersten Polare nur die ersten Differentiale von U gebraucht werden, so sind die entsprechenden niedrigsten Glieder in ihrer Gleichung vom Grade $(k-1)$ in x_1, x_2, d. h. der betrachtete Fundamentalpunkt ist vielfach im Grade $(k-1)$ in dieser; weil die Gleichung der zweiten Polare die zweiten Differentiale von U enthält, so treten x_1, x_2 nicht niedriger als im Grade $(k-2)$ in ihr auf, u. s. w.

Wenn zwei Tangenten der Curve im vielfachen Punkte zusammenfallen, so ist diese Gerade auch eine Tangente der ersten Polare. Denn das niedrigste Glied $u^{(k)}$ ist von der Form $a^2bcd\ldots$ mit $a, b, c, \ldots$ als in x_1, x_2 linearen Factoren; seine ersten Differentiale enthalten daher den Factor a, so dass derselbe auch ein Factor der entsprechenden niedrigsten Glieder in der Gleichung der ersten Polare ist. Allgemeiner, wenn l Tangenten des vielfachen Punktes in der Curve zusammen fallen, so sind $(l-1)$ derselben zusammenfallende Tangenten im entsprechenden vielfachen Punkte der ersten Polare, $(l-2)$ im entsprechenden vielfachen Punkte der zweiten Polare, u. s. w. Denn wenn $u^{(k)}$ einen Factor l^{ten} Grades enthält, so ist derselbe ein Factor der ersten Differentiale vom Grade $(l-1)$, ein Factor der zweiten Differentiale vom Grade $(l-2)$, etc.[8])

V. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der vielfachen Punkte und Tangenten.

63. Wir wollen die in Art. 59. entwickelte Methode zur Untersuchung der vielfachen Punkte und Tangenten einer Curve anwenden. Um die Schnittpunkte der Curve $U = 0$ mit der geraden Verbindungslinie der Punkte x_i', x_i'' zu finden, substituieren wir in die Gleichung derselben $\lambda x_i' + \mu x_i''$ für x_i und erhalten dadurch zur Bestimmung der den Schnittpunkten entsprechenden Werthe des Verhältnisses $\lambda : \mu$ eine Gleichung $\Lambda = 0$, welche wir in der Form schreiben können

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1} \mu \triangle U' + \tfrac{1}{2} \lambda^{n-2} \mu^2 \triangle^2 U' + \cdots = 0,$$

wenn wir nämlich voraussetzen, dass in $\triangle U'$, etc. die x_i'' an Stelle der x_i substituiert sind. Damit aber einer der Punkte $\lambda x_i' + \mu x_i''$ mit dem Punkte x_i zusammen falle, ist es offenbar nöthig, dass eine der Wurzeln der Gleichung $\Lambda = 0$ zu $\mu = 0$ werde. Aber diess wird nicht der Fall sein, so lange nicht $U' = 0$ ist; und es ist ausserdem evident, dass die Bedingung, unter welcher x_i' in der Curve liegt, die ist, dass die Coordinaten x_i' der Gleichung der Curve genügen.

64. Es fallen aber zwei der Schnittpunkte der Geraden $x_i' x_i''$ mit der Curve in den Punkt x_i', wenn die Gleichung $\Lambda = 0$ durch μ^2 theilbar ist, d. h. wenn nicht nur $U' = 0$ sondern auch $\triangle U' = 0$ ist; und weil die Verbindungslinie des Punktes x_i'' mit dem Punkte x_i' die Curve in zwei mit dem Punkte x_i' zusammen fallenden Punkten nur schneiden kann, wenn x_i'' auf der in x_i' an die Curve gehenden Tangente liegt (oder auf einer der Tangenten, falls deren mehrere möglich sind), so erkennen wir, dass die Gleichung

$$x_1 U_1' + x_2 U_2' + x_3 U_3' = 0$$

diese Tangente darstellt, dass es also im Allgemeinen in jedem Punkte der Curve nur eine Tangente giebt, von welcher die eben geschriebene die Gleichung ist und dass die Polargerade eines Punktes der Curve und die Tangente der Curve in diesem Punkte identisch sind.

Alle die andern Polarcurven desselben Curvenpunktes x_i' berühren dann die Curve in diesem Punkte. Denn in Art. 61. ward bewiesen, dass die Polargerade eines Punktes in Bezug auf die Curve $U = 0$ auch die Polargerade desselben Punktes in Bezug auf alle seine Polarcurven ist; da also die Coordinaten x_i' der Gleichung einer jeden Polarcurve genügen (Art. 61.), so fällt auch die Polargerade dieses Punktes in Bezug auf jede derselben mit seiner Tangente zusammen.

65. Die Berührungspunkte der aus einem beliebigen Punkte an die Curve gezogenen Tangenten liegen in der ersten Polare des Punktes in Bezug auf die Curve. Diess ist ein Specialfall von dem in Art. 61. Bewiesenen und kann direct in derselben Art begründet werden. Wir sahen, dass die Gleichung der Tangente der Curve $U = 0$ im Punkte x_i' durch

$$x_1 U_1' + x_2 U_2' + x_3 U_3' = 0$$

dargestellt ist und erhalten durch die Vertauschung der accentuierten und der nicht accentuierten Variabeln, d. h. durch die Annahme, dass die Coordinaten eines beliebig gewählten Punktes der Tangente bekannt und die des Berührungspunktes unbekannt seien, für den Ort des Letzteren die Gleichung

$$x_1' U_1 + x_2' U_2 + x_3' U_3 = 0.$$

Die Curve und ihre erste Polare durchschneiden einander in $n(n-1)$ Punkten und da in jedem derselben die Bedingungen $U = 0$, $\triangle U = 0$ erfüllt sind, so sehen wir, dass von einem gegebenen Punkte aus $n(n-1)$ Tangenten, an eine Curve n^{ter} Ordnung gehen; oder auch („Kegelschn." Art. 382.), dass die Reciproke einer Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen von der Ordnung $n(n-1)$ ist.

66. Im Art. 61. ist aber weiter bewiesen, dass für eine Curve mit einem Doppelpunkt die erste Polare jedes gegebenen Punktes durch diesen Doppelpunkt hindurchgehen muss. Der Doppelpunkt zählt somit (vergl. Art. 42.) unter den Durchschnittspunkten der Curve mit ihrer ersten Polare für zwei. Die Verbindungslinie des Punktes x_i'' mit dem Doppelpunkt

ist aber ferner nicht eine Tangente im gewöhnlichen Sinne des Wortes, obwohl sie ganz naturgemäss unter den Lösungen des von uns hier discutierten Problems erscheint, eine Gerade durch x_i'' zu ziehen, welche die Curve in zwei zusammen fallenden Punkten schneidet, weil wir ja gezeigt haben, dass jede durch den Doppelpunkt gehende Gerade als eine solche zu betrachten ist, die in ihm zwei zusammen fallende Punkte mit der Curve gemein hat. Wir fanden also, dass die Gesammtzahl der Lösungen dieses Problems immer $n(n-1)$ ist — nämlich die Zahl der Schnittpunkte der Curven $U=0$ und $\triangle U=0$ — und dass die Zahl der eigentlichen Tangenten der Curve durch jeden ihrer Doppelpunkte um zwei Einheiten vermindert wird; d. h. die Ordnung der Reciproken einer Curve n^{ter} Ordnung mit δ Doppelpunkten ist $n(n-1)-2\delta$.

67. Für die Existenz einer Spitze in der Curve $U=0$ haben wir im Art. 62. bewiesen, dass die erste Polare eines beliebigen Punktes nicht nur durch dieselbe hindurch geht, sondern dass auch ihre entsprechende Tangente mit der Rückkehrtangente zusammen fällt; daher zählt diese Spitze für drei unter den Durchschnittspunkten der Curve mit ihrer ersten Polare und die Zahl der übrigen Durchschnittspunkte wird daher durch jede Spitze um drei Einheiten vermindert. Die Ordnung der reciproken Curve einer Curve n^{ter} Ordnung mit δ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen ist[9])

$$n(n-1)-2\delta-3\varkappa.$$

68. Dieselben Principien zeigen die Wirkung eines vielfachen Punktes von höherem Grade auf die Ordnungszahl der reciproken Curve. Ein vielfacher Punkt vom Grade k ist nach Art. 62. vielfach im Grade $(k-1)$ in der ersten Polare und die Zahl der übrigen Schnittpunkte und somit die Ordnung der reciproken Curve wird durch ihn daher um $k(k-1)$ vermindert. Nachdem wir aber in Art. 40. gezeigt haben, dass ein vielfacher Punkt vom Grade k mit $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten äquivalent ist, so erhalten wir, weil jeder von diesen die Ordnung der Reciproken um zwei Einheiten vermindern würde, für das gefundene Resultat den folgenden Ausdruck: Die Wirkung eines vielfachen Punktes

auf die Ordnung der reciproken Curve ist die nämliche, wie die der äquivalenten Anzahl von Doppelpunkten. In Rücksicht auf Art. 58. können wir also sagen, dass die Wirkung eines vielfachen Punktes, welcher δ' Doppelpunkten, $\varkappa'$ Spitzen, τ' Doppeltangenten und ι' Inflexionen äquivalent ist, auf die Ordnung der reciproken Curve durch $2\delta' + 3\varkappa'$ ausgedrückt wird.

69. Die Verbindungslinie der Punkte x_i', x_i'' schneidet — so fanden wir bisher — die Curve in zwei mit x_i' zusammen fallenden Punkten, wenn $U' = 0$ ist und wenn die x_i'' die Gleichung

$$x_1'' U_1' + x_2'' U_2' + x_3'' U_3' = 0$$

erfüllen. Wenn aber die Coordinaten x_i' den drei Gleichungen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ zugleich genügen würden, so würde die zweite Bedingung

$$x_1'' U_1' + x_2'' U_2' + x_3'' U_3' = 0$$

unabhängig von x_i'' und also für alle Werthe der x_i'' erfüllt sein; dann ist der Punkt x_i' ein Doppelpunkt und jede durch ihn gehende Grade schneidet die Curve in ihm in zwei zusammen fallenden Punkten. Wir sehen daraus, dass die durch die allgemeine Gleichung in projectivischen oder speciell Cartesischen Punkt-Coordinaten dargestellte Curve keinen Doppelpunkt enthalten kann, ohne dass die in ihr auftretenden Coefficienten einer gewissen Bedingung genügen. Denn die drei Curven $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ haben im Allgemeinen keinen zu allen gemeinsamen Punkt und die Functionen U_1, U_2, U_3 verschwinden somit nicht gleichzeitig für dieselben Werthe der Coordinaten. Wenn wir zwischen ihnen die x_i eliminieren, so entsteht eine Relation zwischen den Coefficienten, welche die Bedingung ist, unter der diese ersten Polarcurven der Fundamentalpunkte sich schneiden oder unter welcher die Curve einen Doppelpunkt hat. Man nennt sie die Discriminante der Gleichung der Curve. So haben wir die Discriminante eines Kegelschnitts („Kegelschn." Art. 323.) durch Elimination der x_i zwischen den drei ersten Differentialen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0,$$

denen die Coordinaten eines Doppelpunktes zugleich genügen müssen, in der Form

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0$$

gefunden. Im Allgemeinen ist die Discriminante vom Grade $3(n-1)^2$ in den Coefficienten der gegebenen Gleichung; denn die drei Derivierten sind vom Grade $(n-1)$ und ihre Resultante enthält daher die Coefficienten einer jeden im Grade $(n-1)^2$, — diese aber sind linear in den Coefficienten der Originalgleichung.

70. Wir können diese Grundsätze zur Untersuchung der Bedingungen anwenden, unter welchen die erste Polare irgend eines Punktes A oder x_i' einen Doppelpunkt hat. Durch Differentiation der Gleichung

$$x_1' U_1 + x_2' U_2 + x_3' U_3 = 0$$

erhalten wir für die Coordinaten eines Doppelpunktes B der ersten Polare von x_i' die Bedingungen

$$U_{11}x_1' + U_{12}x_2' + U_{13}x_3' = 0,\quad U_{12}x_1' + U_{22}x_2' + U_{23}x_3' = 0,$$
$$U_{13}x_1' + U_{23}x_2' + U_{33}x_3' = 0.$$

Dieselben verbinden die Coordinaten x_i' von A mit den Coordinaten x_i des Doppelpunktes B, welche in den U_{ik} im Grade $(n-2)$ enthalten sind. Die Vergleichung dieser Bedingungen mit den im letzten Artikel citierten Gleichungen aus der Kegelschnittstheorie zeigt, dass mit ihrer Erfüllung der Polarkegelschnitt des Punktes B

$$U_{11}x_1^2 + U_{22}x_2^2 + U_{33}x_3^2 + 2U_{23}x_2x_3 + 2U_{13}x_1x_3 + 2U_{12}x_1x_2 = 0$$

in zwei Gerade zerfällt, und der Punkt x_i' oder A der Doppelpunkt desselben ist. Wir erhalten also den Satz: Wenn die erste Polare eines Punktes A einen Doppelpunkt B hat, so hat der Polarkegelschnitt von B einen Doppelpunkt in A und umgekehrt.

Wir können aber auch zwischen den drei Bedingungsgleichungen die x_i' eliminieren und so eine Relation bilden, welche von den Coordinaten x_i des Doppelpunktes B erfüllt werden muss, nämlich

$$U_{11}U_{22}U_{33} + 2U_{23}U_{13}U_{12} - U_{11}U_{23}^2 - U_{22}U_{13}^2 - U_{33}U_{12}^2 = 0.$$

Sie ist die Gleichung des Ortes der Punkte B und aus dem Ge-

sagten geht hervor, dass dieser Ort entweder bezeichnet werden kann als der Ort von Punkten, welche Doppelpunkte in ersten Polarcurven der gegebenen Curve sind, oder als der Ort von Punkten, deren Polar-Kegelschnitte in zwei gerade Linien zerfallen. Weil die zweiten Differentiale je vom Grade $(n-2)$ in den x_i sind, so ist die eben geschriebene Gleichung vom Grade $3(n-2)$; die von ihr dargestellte Curve hat zur gegebenen Curve wichtige Beziehungen, — sie ist eine Covariante derselben. (Vergl. „Vorlesungen“ Art. 73.) Weil sie zuerst durch Hesse studiert worden ist, so soll sie die Hesse'sche Curve von $U=0$ heissen.

Wenn man aber zwischen den nämlichen drei Gleichungen die x_i eliminiert, so giebt die resultierende Gleichung in den x_i' den Ort der Punkte A, d. h. den Ort der Punkte, deren erste Polaren Doppelpunkte haben und zugleich den Ort der Punkte, welche Doppelpunkte in Polarkegelschnitten sind. Wir werden diesen Ort nach dem Geometer Steiner die Steiner'sche Curve von $U=0$ nennen [11]).

Um die Elimination in irgend einem Falle wirklich auszuführen, würde man die zweiten Differentiale von U bilden müssen; aber es ist im Allgemeinen zu sagen, dass der Grad der resultierenden Gleichung in den x_i' gleich $3(n-2)^2$ ist, weil sie die Resultante von drei Gleichungen $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist, von denen jede die x_i' im ersten Grade enthält.

71. Indem wir nun wieder zu der Gleichung $\Lambda=0$ zurückkehren, erkennen wir, dass drei ihrer Wurzeln mit $\mu=0$ übereinstimmen, oder dass die fragliche Gerade die Curve in drei mit x_i' zusammenfallenden Punkten schneidet, wenn gleichzeitig die drei Bedingungen

$$U'=0, \qquad \triangle U'=0, \qquad \triangle^2 U'=0$$

erfüllt werden. Betrachten wir nun zuerst den Fall, wo x_i' ein Doppelpunkt ist, so sehen wir, dass in diesem Falle U' und $\triangle U'$ unabhängig von den x_i'' verschwinden, und dass die dritte Bedingung fordert, es liege x_i'' auf dem Polarkegelschnitt von x_i'. Da nun x_i'' ein beliebiger Punkt in einer der beiden Tangenten des Doppelpunktes sein kann, weil jede derselben die Curve in drei vereinigten Punkten

schneidet, so muss der Polarkegelschnitt von x_i' mit diesen beiden Geraden identisch sein, d. h. die Gleichung des Tangentenpaars der Curve im Doppelpunkt ist $\triangle^2 U' = 0$ oder

$$U_{11}'x_1^2 + U_{22}'x_2^2 + U_{33}'x_3^2 + 2U_{23}'x_2x_3 \\ + 2U_{13}'x_1x_3 + 2U_{12}'x_1x_2 = 0.$$

Der Doppelpunkt, als ein Punkt, dessen Polarkegelschnitt in zwei gerade Linien zerfällt, liegt in der Hesse'schen Curve und es ergiebt sich auch direct, dass er ihrer Gleichung genügt. Denn nach Euler's Satz von den homogenen Functionen können die drei Gleichungen $U_1' = 0$, $U_2' = 0$, $U_3' = 0$, die in ihm erfüllt werden, in der Form

$$U_{11}'x_1' + U_{12}'x_2' + U_{13}'x_3' = 0,$$
$$U_{12}'x_1' + U_{22}'x_2' + U_{23}'x_3' = 0,$$
$$U_{13}'x_1' + U_{23}'x_2' + U_{33}'x_3' = 0$$

geschrieben werden und aus diesen Gleichungen entspringt durch Elimination der x_i' die Gleichung der Hesse'schen Curve.

72. Der Doppelpunkt wird zur Spitze, wenn die seine beiden Tangenten repräsentierende Gleichung ein vollständiges Quadrat wird, d. h. für

$$U_{22}U_{33} = U_{23}^2, \quad U_{33}U_{11} = U_{13}^2, \quad U_{11}U_{22} = U_{12}^2.$$

Diese drei Bedingungen repräsentieren nur eine neue Bedingung, weil mit der Erfüllung einer derselben bei allen endlichen Werthen der Coordinaten x_i' des Doppelpunktes die andern auch erfüllt sein müssen. Denn die Bestimmung der Verhältnisse $x_1' : x_3'$, $x_2' : x_3'$ aus jedem Paare der Gleichungen vom Ende des letzten Artikels giebt

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \frac{U_{12}U_{23} - U_{22}U_{13}}{U_{11}U_{22} - U_{12}^2} = \frac{U_{22}U_{33} - U_{23}^2}{U_{12}U_{23} - U_{22}U_{13}} = \frac{U_{23}U_{13} - U_{33}U_{12}}{U_{13}U_{12} - U_{11}U_{23}},$$
$$\frac{x_2'}{x_3'} = \frac{U_{13}U_{12} - U_{11}U_{23}}{U_{11}U_{22} - U_{12}^2} = \frac{U_{23}U_{13} - U_{33}U_{12}}{U_{12}U_{23} - U_{22}U_{13}} = \frac{U_{33}U_{11} - U_{13}^2}{U_{13}U_{12} - U_{11}U_{23}}.$$

Es müssen somit für $U_{11}U_{22} = U_{12}^2$ und wenn keines dieser Verhältnisse unendlich gross ist, sowohl Zähler als Nenner dieser Brüche verschwinden.

73. Der Anfangspunkt ist ein dreifacher Punkt, wenn alle zweiten Differentialquotienten in ihm verschwinden; denn dann ist $\triangle^2 U'$ Null unabhängig von den Werthen der x_i'',

und nach dem Satze von den homogenen Functionen verschwinden mit den zweiten Differentialquotienten auch die ersten und somit ist auch $\triangle U' = 0$; d. h. jede gerade Linie durch den Punkt x_i' schneidet die Curve in drei zusammen fallenden Punkten. Die drei Tangenten der Curve in diesem Punkte werden offenbar durch die Gleichung $\triangle^3 U' = 0$ gegeben.

Die Ausdehnung derselben Betrachtungen auf vielfache Punkte von höheren Graden hat keine Schwierigkeit. Der Punkt x_i' ist ein vielfacher Punkt vom Grade k, wenn für ihn alle Differentialquotienten vom Grade $(k - 1)$ verschwinden und die Tangenten der Curve im vielfachen Punkt werden durch die Gleichung $\triangle^k U' = 0$ ausgedrückt.

74. Wir untersuchen nunmehr die Bedingungen, unter welchen durch einen einfachen Punkt x_i' in der Curve eine Grade gezogen werden kann, welche die Curve in drei mit x_i' zusammen fallenden Punkten schneidet, und wollen zunächst dabei voraussetzen, dass die betrachtete Curve vielfache Punkte nicht enthälte.

Wir sahen in Art. 71., dass jeder Punkt in einer solchen Geraden die Bedingungen $\triangle U' = 0$, $\triangle^2 U' = 0$ erfüllen muss. Die erste derselben drückt aus, dass die Gerade mit der Tangente der Curve in x_i' identisch sein muss, wie es auch sonst evident ist; dagegen besagt die zweite, dass jeder Punkt dieser Geraden die Gleichung des Polarkegelschnitts befriedigt. Es muss somit der Polarkegelschnitt $\triangle^2 U' = 0$ in diesem Falle die Gerade $\triangle U' = 0$ als einen Theil enthalten und der Punkt x_i' muss also einer von den Punkten sein, deren Polarkegelschnitte in zwei gerade Linien degenerieren, d. h. ein Punkt der Hesse'schen Curve (Art. 70.). Und umgekehrt ist jeder Punkt, welcher zugleich auf der Curve $U = 0$ und ihrer Hesse'schen Curve liegt, ein Punkt, durch welchen eine Gerade mit drei in ihm vereinigten Schnittpunkten in der Curve gezogen werden kann, d. h. ein Inflexionspunkt derselben. Denn der Polarkegelschnitt jedes in $U = 0$ gelegenen Punktes berührt diese Curve in ihm und wenn der Punkt auch auf der Hesse'schen Curve $H = 0$ liegt, so dass sein Polarkegelschnitt in zwei gerade Linien zerfällt, so muss eine dieser Geraden die Tangente der Curve in x_i'

sein. Jeder Punkt in dieser Tangente genügt dann den Bedingungen $\triangle U' = 0$ und $\triangle^2 U' = 0$ zugleich. Somit sind alle die Durchschnittspunkte der Curven $U = 0$, $H = 0$ Inflexionspunkte in $U = 0$ und es ergiebt sich, weil H vom Grade $3(n-2)$ ist, dass eine Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $3n(n-2)$ Inflexionspunkte hat[12].

75. Die Zahl der Inflexionspunkte wird aber reduciert, wenn die Curve vielfache Punkte hat. Wir haben im Art. 71. gesehen, dass jeder Doppelpunkt der Curve ein Punkt der Hesse'schen Curve ist, müssen aber nun des Näheren zeigen, dass er ein Doppelpunkt in ihr ist und allgemeiner, dass jeder vielfache Punkt k^{ter} Ordnung in der Curve ein vielfacher Punkt der Ordnung $(3k-4)$ in der Hesse'schen Curve ist. Man beweist diess am einfachsten, indem man den vielfachen Punkt als Fundamentalpunkt A_3 der Coordinaten wählt, so dass die Gleichung der Curve die Variabeln x_1 und x_2 nicht in niedrigerem als dem k^{ten} Grade enthält. Wir untersuchen den Grad der in x_1 und x_2 niedrigsten Glieder der zweiten Differentialquotienten und finden, dass er für zwei Differentiationen nach x_1 oder nach x_2 gleich $(k-2)$, für eine Differentiation nach x_1 oder x_2 und eine nach x_3 gleich $(k-1)$ und für zwei Differentiationen nach x_3 gleich k ist, d. h. der Grad der in x_1, x_2 niedrigst potenzierten Glieder in U_{11}, U_{22}, U_{33}, U_{23}, U_{13}, U_{12} ist respective gleich

$$k-2,\ k-2,\ k,\ k-1,\ k-1,\ k-2;$$

es ergiebt sich daher, dass der Grad der in x_1, x_2 niedrigsten Glieder der Hesse'schen Determinante

$$U_{11}U_{22}U_{33}+2U_{23}U_{13}U_{12}-U_{11}U_{23}^2-U_{22}U_{13}^2-U_{33}U_{12}^2=0$$

gleich $(3k-4)$ sein muss. Es ist aber ferner zu bemerken, dass jede Tangente der Curve $U = 0$ im vielfachen Punkte auch eine Tangente im vielfachen Punkte an $H = 0$ ist; denn wenn die Gerade $x_1 = 0$ eine Tangente im Anfangspunkt der Coordinaten ist, und also nach Art. 40. die Glieder vom geringsten Grade in x_1 und x_2 den Factor x_1 gemeinschaftlich haben, so ist x_1 auch ein Factor in den niedrigsten Gliedern aller der zweiten Differentialquotienten, in welchen keine Differentiation nach x_1 stattfindet, d. h. in U_{22}, U_{33}, U_{23};

damit aber ist x_1 ein Factor in den niedrigst potenzierten Gliedern der Hesse'schen Determinante, weil jedes Glied ihrer Entwickelung eines dieser drei Differentiale enthält.

76. Das Vorige setzt uns in den Stand, den Einfluss vielfacher Punkte in $U = 0$ auf die Zahl der Inflexionspunkte dieser Curve zu ermitteln. Ein Doppelpunkt in $U = 0$ ist auch ein Doppelpunkt in $H = 0$ und auch seine Tangenten sind für beide Curven dieselben, derselbe zählt also für sechs (vergl. Art. 42.) unter den Schnittpunkten beider. Die Zahl der vom Doppelpunkt verschiedenen Durchschnittspunkte der Curven $U = 0$ und $H = 0$ wird somit um sechs Einheiten vermindert, und es wird also durch δ Doppelpunkte, welche die Curve n^{ter} Ordnung besitzt, die Zahl ihrer Inflexionspunkte auf $3n(n-2) - 6\delta$ gebracht.

Und wenn $U = 0$ einen vielfachen Punkt vom Grade k hat, so ist derselbe $(3k-4)$fach in $H = 0$ und k von den Tangenten in diesem Punkte sind beiden Curven gemein; der vielfache Punkt zählt somit unter den Durchschnittspunkten für $k(3k-4) + k = 6 \cdot \frac{1}{2} k(k-1)$ Punkte, und da wir aus Art. 70. wissen, dass ein $k$facher Punkt mit $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten äquivalent ist, so können wir sagen, d a s s d e r v i e l f a c h e P u n k t i n B e z u g a u f d i e R e d u c t i o n d e r A n z a h l d e r I n f l e x i o n s p u n k t e g a n z d i e s e l b e W i r k u n g h a t, w i e d i e ä q u i v a l e n t e A n z a h l v o n D o p p e l p u n k t e n.

77. Der Fall der Spitze erfordert eine besondere Untersuchung. Wenn wir sie zum Fundamentalpunkt A_3 der Coordinaten und $x_1 = 0$ als die entsprechende Tangente wählen, so ist die Gleichung der Curve von der Form

$$x_1^2 x_3^{n-2} + u^{(3)} x_3^{n-3} + \cdots = 0;$$

die niedrigsten Glieder in den zweiten Differentialquotienten sind dann von den Graden 0, 1, 2, 2, 1, 1 respective; sie sind nämlich

$$U_{11} = 2x_3^{n-2},\ U_{22} = \frac{d^2 u^{(3)}}{dx_2^2} x_3^{n-3},\ U_{33} = (n-2)(n-3) x_1^2 x_3^{n-4},$$

$$U_{23} = (n-3) \frac{du^{(3)}}{dx_2} x_3^{n-4},\ U_{13} = 2(n-2) x_1 x_3^{n-3},$$

$$U_{12} = \frac{d^2 u^{(3)}}{dx_1\, dx_2} x_3^{n-3}.$$

Der Grad der niedrigsten Glieder in der Hesse'schen Determinante ist daher drei, nämlich der Grad der Glieder

$$U_{11}\, U_{22}\, U_{33} \quad \text{und} \quad U_{22}\, U_{13}{}^2;$$

aber jedes dieser Glieder enthält $x_1{}^2$ als einen Factor. Die Spitze der Curve $U=0$ ist somit ein dreifacher Punkt in der Hesse'schen Curve und zwei der bezüglichen Tangenten fallen mit der entsprechenden Rückkehrtangente zusammen. Insofern nun dieser gemeinsame Punkt doppelt in der einen und dreifach in der andern Curve ist, zählt er für sechs unter ihren Schnitten und das Zusammenfallen zweier der bezüglichen Tangenten beider Curven fügt die zwei nächstfolgenden Punkte als gemeinschaftlich den vorigen hinzu, so dass der Punkt für acht unter den Schnittpunkten zählt. Hat also eine Curve n^{ter} Ordnung δ Doppelpunkte und $\varkappa$ Spitzen, so ist die Zahl ihrer Inflexionspunkte gleich

$$3\,n\,(n-2) - 6\,\delta - 8\,\varkappa.$$

78. Die etwas schwierigere Untersuchung der Bedingungen der Doppeltangenten von der Gleichung $\Lambda=0$ aus verschieben wir auf später und begnügen uns für jetzt damit, zu zeigen, dass die bisher erhaltenen Resultate in Verbindung mit der Theorie der Reciprocal-Curven die Zahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung indirect zu bestimmen erlauben.

Dagegen liegt es nahe, die Gleichung $\Lambda=0$ zur Aufstellung der Gleichung des Systems von Tangenten zu benutzen, welche von einem Punkte x_i' aus an die Curve gehen (Vergl. „Kegelschn." Art. 107., 326.) Weil jeder Punkt in einer solchen Tangente die Eigenschaft hat, dass die ihn mit x_i' verbindende Gerade die Curve in zwei auf einander folgenden Punkten schneidet, so dass die Gleichung $\Lambda=0$ zwei gleiche Wurzeln hat, so erhalten wir die Gleichung des fraglichen Tangentensystems durch die Vergleichung der Discriminante von $\Lambda=0$ als einer binären Form in λ, μ mit Null. Sei beispielsweise $U=0$ vom dritten Grade, so dass die Gleichung $\Lambda=0$ die Form hat

$$\lambda^3 U' + \lambda^2\mu \triangle U' + \lambda\mu^2 \triangle U + \mu^3 U = 0,$$

so wird — mit den Abkürzungen $\triangle$ und $\triangle'$ für $\triangle U$ und $\triangle U'$ die fragliche Gleichung

$$(27\,U\,U'^2 + 4\triangle'^3 - 18\triangle\triangle'U')\,U = (\triangle'^2 - 4\triangle U')\,\triangle^2.$$

Da U, $\triangle$, $\triangle'$ respective vom dritten, zweiten und ersten Grade in den x_i sind, so ist diese Gleichung vom sechsten Grade und zeigt, dass von einem Punkte x_i' an die Curve dritter Ordnung $U = 0$ sechs Tangenten gehen, wie wir wissen.

Die Form der Gleichung zeigt, dass sie einen Ort repräsentiert, der $U = 0$ in denjenigen Punkten berührt, wo derselbe von $\triangle = 0$ geschnitten wird; und dass die andern Punkte, in welchen $U = 0$ von diesem Orte geschnitten wird, in der Curve $\triangle'^2 - 4\triangle U' = 0$ liegen. Diess giebt den Satz: Die Berührungspunkte der sechs Tangenten einer Curve dritter Ordnung, die von irgend einem Punkt ausgehen, liegen in einem Kegelschnitt $\triangle = 0$ und die sechs übrigen Schnittpunkte dieser Tangenten mit der Curve sind in einem andern Kegelschnitt $\triangle'^2 - 4\triangle U' = 0$ enthalten, der mit dem vorigen in den Punkten $\triangle = 0$, $\triangle' = 0$ eine doppelte Berührung hat.

Wenn der Punkt x_i' in der Curve liegt, so ist $U' = 0$, die Gleichung $\Lambda = 0$ reducirt sich auf $\lambda^2\triangle' + \lambda\mu\triangle + \mu^2 U = 0$, ihre Discriminante liefert also als Gleichung des Tangentenbüschels $\triangle^2 = 4\triangle' U$, eine Gleichung vom vierten Grade in den x_i. Durch einen Punkt in der Curve dritter Ordnung gehen nur vier Tangenten an dieselbe, die ihm selbst entsprechende Tangente zählt für zwei.

79. Ebenso im Allgemeinen; die Discriminante von Λ oder $\mu^n U + \mu^{n-1}\lambda\triangle + \mu^{n-2}\lambda^2\triangle^2 + \cdots$ ist vom Grade $n(n-1)$ in den x_i und (vergl. „Vorlesungen“ Art. 68.) von der Form $k\,U + (\triangle)^2\varphi$, wenn φ die Discriminante des von seinem ersten Gliede befreiten Λ ist. Der durch sie dargestellte Ort berührt daher $U = 0$ in seinen Schnittpunkten mit $\triangle = 0$, wie wir aus dem Früheren wissen.

Jede der $n\,(n-1)$ Tangenten schneidet die Curve in anderen $(n-2)$ Punkten und die Form der Discriminante zeigt, dass diese $n\,(n-1)\,(n-2)$ Punkte in einer Curve $\varphi = 0$ von der Ordnung $(n-1)\,(n-2)$ liegen. Endlich ist φ selbst von der Form $k'\triangle + (\triangle^2)^2\psi$ und man erkennt,

dass die beiden Curven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ einander in den Punkten berühren, wo die erste und die zweite Polare von x_i' sich durchschneiden.

Wenn wir Λ in der Form

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1} \mu \triangle' + \cdots$$

schreiben, so sehen wir, dass die Discriminante auch in der Form $k U' + (\triangle')^2 \varphi$ darstellbar ist. Ist somit x_i' ein Punkt der Curve, also $U' = 0$, so enthält sie den Factor $\triangle'^2$ oder das System der Tangenten besteht aus der zweifach zählenden Tangente in x_i' und $(n^2 - n - 2)$ anderen Tangenten, die durch $\varphi = 0$ repräsentiert sind. In derselben Weise ist φ selbst von der Form $k \triangle' + (\triangle'^2)^2 \psi$; ist also der Punkt x_i' ein Doppelpunkt und somit nicht nur $U' = 0$, sondern auch $\triangle' = 0$, so enthält die Function $(n^2 - n - 2)^{\text{ten}}$ Grades φ den Factor $(\triangle'^2)^2$, d. h. unter jenen $(n^2 - n - 2)$ Tangenten sind die beiden Tangenten der Curve im Doppelpunkt, je zweifach gezählt, und daher $(n^2 - n - 6)$ andere durch $\psi = 0$ dargestellte Tangenten. In derselben Weise lässt sich zeigen, dass von einem $k$fachen Punkte $n^2 - n - k(k+1)$ Tangenten an die Curve gehen. Die vorher gegebene Theorie von dem Einfluss der vielfachen Punkte auf die Zahl der Tangenten einer Curve n^{ter} Ordnung, die von einem beliebigen Punkte ausgehen, zeigt auch, dass die Discriminante von Λ, welche gleich Null gesetzt, diese $n(n-1)$ Tangenten repräsentiert, als Factoren enthalten muss das Quadrat jeder Geraden, welche den Punkt x_i' mit einem Doppelpunkte der Curve verbindet, den Cubus jeder Geraden von ihm nach einer Spitze, die sechste Potenz der Geraden von ihm nach einem dreifachen Punkte, etc.

VI. Abschnitt.

Reciproke Curven.

80. Wir wissen (vergl. „Kegelschn.“ Art. 382.), dass die Ordnung der reciproken Curve stets mit der Classe der gegebenen Curve übereinstimmt und umgekehrt; es ist auch

evident, dass einem Doppelpunkt in einer der Curven eine Doppeltangente in der andern und einem stationären Punkt in der einen eine stationäre Tangente in der andern Curve entspricht; allgemeiner, einem vielfachen Punkte vom Grade k eine im nämlichen Grade vielfache Tangente und den k Berührungspunkten der vielfachen Tangente die k Tangenten im vielfachen Punkte, so dass auch, wenn zwei oder mehrere der letztern zusammen fallen, ebenso viele und die entsprechenden der ersteren es thun.

Und wir haben gesehen, dass die allgemeine Gleichung in Punktcoordinaten eine Curve darstellt, die keinen doppelten Punkt und ebenso keinen höheren vielfachen Punkt hat, so lange nicht gewisse Bedingungen erfüllt werden; dass dagegen die von dieser allgemeinen Gleichung repräsentierte Curve doppelte und stationäre Tangenten besitzt. In der That werden die Abscissen der Schnittpunkte einer Geraden $y = ax + b$ mit der Curve durch Substitution des Werthes von y in ihre Gleichung erhalten und da wir zwei Constanten a und b zur Disposition haben, so können wir dieselben so bestimmen, dass die resultierende Gleichung irgend zwei Bedingungen erfüllt. Durch die Verfügung über eine Constante würden wir die Erfüllung einer Bedingung bewirken können, z. B. dass die Gleichung ein Paar gleiche Wurzeln habe. Und das Problem, bei gegebenem a die Constante b so zu bestimmen, dass die resultierende Gleichung zwei gleiche Wurzeln haben, ist nichts anderes als das Problem, die zu $y = ax$ parallelen Tangenten zu ziehen. Die Verfügung über beide Constanten gestattet uns, der resultierenden Gleichung zwei verschiedene Paare gleicher Wurzeln zu bedingen; diess sind die Probleme der Doppeltangenten und der stationären Tangenten oder Inflexionspunkte. Die doppelten und die stationären Tangenten sind so als die gewöhnlichen Singularitäten einer Curve zu betrachten, die durch eine Gleichung in Punktcoordinaten ausgedrückt ist; alle höheren vielfachen Tangenten und alle vielfachen Punkte sind ausserordentliche Singularitäten, welche eine solche Curve nicht besitzt, so lange nicht die Coefficienten ihrer Gleichung besondere Werthe haben.

Es ist vollkommen umgekehrt für die allgemeine Glei-

chung in Liniencoordinaten; die durch sie repräsentierte Curve hat gewöhnlich Doppelpunkte und stationäre Punkte oder Spitzen, aber keine singulären Tangenten. Es sind somit doppelte und stationäre Punkte einerseits und doppelte und stationäre Tangenten anderseits gleichmässig unter die gewöhnlichen Singularitäten der Curven zu rechnen; wenn eine Curve die einen besitzt, so enthält ihre reciproke Curve die andern.

81. Wir wollen nun die Ordnung einer Curve durch μ und ihre Classe durch ν, die Zahl ihrer Doppelpunkte durch δ und die ihrer Doppeltangenten durch τ, die ihrer stationären Punkte durch $\varkappa$ und die ihrer stationären Tangenten durch ι bezeichnen, so dass die entsprechenden Zahlen für die reciproke Curve durch die Vertauschung von μ und ν, δ und τ, $\varkappa$ und ι erhalten werden. Wir haben in den Art. 67. u. 77. die Werthe von ν und ι in Function von μ, δ, $\varkappa$ erhalten und leiten daraus jetzt mittelst der Reciprocalcurve die Werthe von μ und $\varkappa$ in Function von ν, τ, ι ab. Aus diesen vier Gleichungen, die wie wir nun sehen werden äquivalent sind drei unabhängigen Gleichungen, können wir den Werth von τ durch μ, δ, $\varkappa$ und den von δ durch ν, τ und ι ausdrücken. So entstehen Plücker's sechs Gleichungen:

1) $\nu = \mu^2 - \mu - 2\delta - 3\varkappa;$

2) $\iota = 3\mu^2 - 6\mu - 6\delta - 8\varkappa;$

3) $2\tau = \mu(\mu-2)(\mu^2-9) - 2(\mu^2-\mu-6)(2\delta+3\varkappa) + 4\delta(\delta-1) + 12\delta\varkappa + 9\varkappa(\varkappa-1);$

4) $\mu = \nu^2 - \nu - 2\tau - 3\iota;$

5) $\varkappa = 3\nu^2 - 6\nu - 6\tau - 8\iota;$

6) $2\delta = \nu(\nu-2)(\nu^2-9) - 2(\nu^2-\nu-6)(2\tau+3\iota) + 4\tau(\tau-1) + 12\tau\iota + 9\iota(\iota-1).$

Wenn wir zwischen den Gleichungen 1) und 2) δ oder zwischen 4) und 5) τ eliminieren, so erhalten wir gleichmässig

$$7)\quad \iota - \varkappa = 3(\nu - \mu),$$

woraus ersichtlich ist, dass diese vier Gleichungen drei unabhängigen äquivalent sind. Man kann diess auch schreiben

$$3\mu - \varkappa = 3\nu - \iota \quad \text{und} \quad 3\mu + \iota = 3\nu + \varkappa.$$

Die Differenz der Gleichungen 1) und 4) giebt

$$\mu^2 - 2\delta - 3\varkappa = \nu^2 - 2\tau - 3\iota$$

und indem man $\iota - \varkappa$ durch seinen Werth aus 7) ersetzt, folgt

$$8)\ 2(\tau - \delta) = (\nu - \mu)(\nu + \mu - 9).$$

Durch Substitution der Werthe von ν und ι oder von μ und $\varkappa$ in die letzte Gleichung erhält man die Gleichungen 3) und 6). Aus 7) und 8) erhalten wir auch

$$9)\ \tfrac{1}{2}\mu(\mu + 3) - \delta - 2\varkappa = \tfrac{1}{2}\nu(\nu + 3) - \tau - 2\iota;$$
$$10)\ \tfrac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - 2) - \delta - \varkappa = \tfrac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \tau - \iota.$$

Aus irgend dreien der sechs Grössen $\mu, \nu, \delta, \tau, \varkappa, \iota$ können die drei übrigen berechnet werden; z. B. erhält man aus $\mu, \delta, \varkappa$ durch 1) ν, durch 2) oder leichter durch 7) ι und durch 3) oder leichter durch 8) endlich τ[13]).

Beispiel. Aus $\mu = 6$, $\delta = 4$, $\varkappa = 6$ folgt nach 1) $\nu = 4$; also $\mu - \nu = 2$, $\nu - \mu = -2$ und nach 5) $\iota - \varkappa = 6$ oder $\iota = 0$; $\nu + \mu - 9 = 1$ oder $\tau - \delta = -1$, d. h. $\tau = 3$.

82. Weil mit einer Curve auch ihre Reciproke gegeben ist, so müssen beide durch gleichviele Bedingungen bestimmt sein. Die Festsetzung, dass eine Curve δ Doppelpunkte habe, ist aber δ Bedingungen äquivalent, wie am einfachen Beispiel des Kegelschnittes erläutert werden kann, der im Allgemeinen durch fünf Bedingungen bestimmt im Falle eines Doppelpunktes deren nur vier, zwei Punkte etwa in jeder Geraden, gestattet. Ebenso ist die Existenz einer Spitze zwei Bedingungen äquivalent. Eine Curve von der Ordnung μ mit δ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen ist somit durch

$$\tfrac{1}{2}\mu(\mu + 3) - \delta - 2\varkappa$$

Bedingungen bestimmt; ihre reciproke aber durch

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu + 3) - \tau - 2\iota;$$

die Gleichheit beider Zahlen besagt die Gleichung 9).

Die Gleichung 10) zeigt, dass das Geschlecht oder der Defect einer Curve und ihrer reciproken Curve identisch ist. (Art. 44.)

Wenn wir mit Cayley α zur Abkürzung für

$$3\mu + \iota = 3\nu + \varkappa$$

gebrauchen, so erhalten wir

$$\varkappa = \alpha - 3\nu, \quad \iota = \alpha - 3\mu, \quad 2\delta = \mu^2 - \mu + 8\nu - 3\alpha.$$
$$2\tau = \nu^2 - \nu + 8\mu - 3\alpha,$$

d. h. alle anderen Charaktere sind durch μ und ν in Verbindung mit α ausdrückbar.

83. Die Gleichheit des Geschlechts für eine Curve und ihre Reciproke ist ein specieller Fall des allgemeinen Gesetzes von der Constanz desselben für Curven, welche sich eindeutig entsprechen, d. h. wo jedem Punkte und jeder Tangente der einen ein Punkt respective eine Tangente (oder umgekehrt) der andern Curve entspricht. Dasselbe kann nach dem Vorhergehenden auf Grund des in Art. 344. der „Kegelschnitte" gegebenen Princips bewiesen werden, dass in einem Gebilde erster Stufe, also hier in einer geraden Punktreihe oder in einem ebenen Strahlenbüschel, wo zwei Reihen von Elementen sich algebraisch so entsprechen, dass jedem Element der ersten n Elemente der zweiten und jedem Element der zweiten m Elemente der ersten zugeordnet sind, $(m + n)$ Elemente existieren, welche mit einem ihrer jedesmaligen entsprechenden zusammen fallen.

Es seien C_μ und C'_μ zwei einander eindeutig entsprechende Curven von den respectiven Ordnungen μ, μ' in derselben Ebene und A, A' zwei entsprechende feste, X, X' zwei entsprechende bewegliche Punkte in diesen Curven. Dann beschreibt der Durchschnittspunkt der Strahlen AX, $A'X'$ eine Curve von der Ordnung $(\mu + \mu' - 2)$, wie aus dem angezogenen Satze sich sofort ergiebt, wenn man die Schnittpunkte der Büschel um A, A' mit einer beliebigen Geraden betrachtet; in dieser Curve sind A und A' vielfache Punkte von den Graden $(\mu' - 1)$ und $(\mu - 1)$ respective; ihre Rückkehrpunkte entsprechen den von A aus an die Curve C_μ gehenden Tangenten und ihre von A ausgehenden Tangenten den Rückkehrpunkten von C_μ, so dass die Summe der Anzahlen der von A ausgehenden Tangenten t, t^* und der Rückkehrpunkte k, k^* für die eine und für die andere Curve die gleiche sein muss; ebenso für A' und $C_{\mu'}$. Die erste Polare des einfachen Punktes A in Bezug auf die Curve C_μ schneidet diese aber in

$$\mu(\mu - 1) - 2\delta - 3\varkappa - 2$$

Punkten der Berührung und die Summe $(t + k)$ ist also

$$= \mu(\mu - 1) - 2\delta - 2\varkappa - 2.$$

Die erste Polare von A in Bezug auf die Curve von der Ordnung $(\mu+\mu'-2)$ hat aber in A selbst einen $(\mu'-1)$fachen Punkt mit denselben Tangenten mit dieser und in A' einen $(\mu-2)$fachen Punkt; sie erzeugt also eine nach Art. . zu bestimmende Zahl von Schnittpunkten, nach welchen die t^* Tangenten gehen und die Summe (t^*+k^*) ist gleich

$$(\mu+\mu'-2)(\mu+\mu'-3)-\mu'(\mu'-1)-(\mu-1)(\mu-2)-2\delta^*-2\varkappa^*.$$

Man erhält also die Gleichung

$$\mu(\mu-1)-2\delta-2\varkappa-2=(\mu+\mu'-2)(\mu+\mu'-3)-\mu'(\mu'-1) \\ -(\mu-1)(\mu-2)+2\delta^*-2\varkappa^*;$$

und analog für die Curve $C_{\mu'}$ die andere

$$\mu'(\mu'-1)-2\delta'-2\varkappa'-2=(\mu+\mu'-2)(\mu+\mu'-3)-\mu(\mu-1) \\ -(\mu'-1)(\mu'-2)-2\delta^*-2\varkappa^*.$$

Aus beiden folgt aber durch Subtraction

$$2(\delta'+\varkappa'-\delta-\varkappa)=(\mu'-1)(\mu'-2)-(\mu-1)(\mu-2)$$

d. h. die Uebereinstimmung des Geschlechts der Curven C_μ, $C_{\mu'}$, welche sich eindeutig entsprechen [14].

Drittes Kapitel.

Theorie der Enveloppen.

84. Wenn eine Curve irgendwie von einem einzigen veränderlichen Parameter abhängt, so dass der Reihe seiner Werthe eine Reihe von Curven entspricht, so berühren alle diese Curven im Allgemeinen eine Curve, die als die Enveloppe des Systems bezeichnet wird. Jede Curve desselben wird von der nächstfolgenden vom Parameter abhängenden in einer Gruppe von Punkten geschnitten und der Ort dieser Punkte ist die Enveloppe, wie diess für den Fall der veränderlichen Curve als einer Geraden schon bekannt ist. (Vergl. „Kegelschn." Art. 314. f.)

Die Gleichung der Curve kann entweder einen einzigen variabeln Parameter oder sie kann deren zwei oder mehrere enthalten, welche selbst durch eine Gleichung oder durch mehrere Gleichungen mit einander verbunden sind, so dass ein einziger Parameter veränderlich bleibt. Beide Fälle sind nicht wesentlich verschieden, aber es ist oft zweckmässig, den zweiten in einer besondern Art zu behandeln, nach einer Methode unbestimmter Multiplicatoren, die wir hier entwickeln wollen. Dieser zweite Fall begegnet am häufigsten in der Form, dass die Gleichung der Curve die Coordinaten eines veränderlichen jedoch auf eine feste Curve beschränkten Punktes enthält, oder wie man sagt, dass die Curve von einem in einer parametrischen Curve sich bewegenden parametrischen Punkte abhängt. Es ergab sich z. B. (vergl. „Kegelschn." Art. 395.), dass das Problem, die Polarreciproke einer gegebenen Curve in Bezug auf den Kegelschnitt $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ auszudrücken, mit dem andern identisch ist, die Enveloppe der Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ zu bestimmen,

wenn die ξ_i der Gleichung der gegebenen Curve genügen; die Gleichung der veränderlichen Geraden enthält zwei variable Parameter $\xi_1 : \xi_3$, $\xi_2 : \xi_3$, welche durch die Gleichung der gegebenen Curve mit einander verbunden sind.

85. Die Gleichung der Curve $T = 0$ enthalte zuerst einen einzigen veränderlichen Parameter t. Wenn wir die den aufeinander folgenden Werthen t, $t + dt$ des Parameters entsprechenden Curven durch $T = 0$ und $T_1 = 0$ repräsentieren, so geben diese Gleichungen oder das Paar $T=0$, $T_1 - T=0$ die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden auf einander folgenden Curven. Wir haben

$$T_1 = T + d_t T \,.\, dt + \cdots \quad \text{oder} \quad T_1 - T = d_t T \,.\, dt + \cdots$$

und in der letzten Gleichung können, weil dt unendlich klein ist, alle nach dem ersten folgenden Glieder rechts vernachlässigt werden. Die Gleichungen $T = 0$, $d_t T = 0$ bestimmen somit eine vom Parameter t abhängige Gruppe von Punkten, und die Elimination von t zwischen diesen Gleichungen liefert daher die Gleichung des Ortes aller solcher Gruppen von Schnittpunkten aufeinander folgender Curven, d. h. die Gleichung der Enveloppe.

Es ist ein wichtiger besonderer Fall, wenn die Gleichung den Parameter t rational enthält; wir können dann ohne Verlust an Allgemeinheit voraussetzen, dass T eine ganze und rationale Function von t sei, und das so eben beschriebene Verfahren zur Bildung der Gleichung der Enveloppe kommt überein mit dem zur Bildung der Discriminante von T als Function von t dienenden. Wenn also $a, b, c, \ldots$ Functionen der Coordinaten sind und

$$T = at^n + nbt^{n-1} + \tfrac{1}{2} n (n - 1) ct^{n-2} + \cdots,$$

so sind die Gleichungen der Enveloppe für die am häufigsten auftretenden Fälle $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ respective (vergl. „Vorlesungen“ Art. 134., 136., 138.)

2) $ac - b^2 = 0$; 3) $a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 6abcd - 3b^2c^2 = 0$;
4) $(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3)^2 = 0$;

wobei zur letzten dieser Gleichungen bemerkt sein mag, dass in ihrer entwickelten Form die Glieder mit c^6 und mit c^4bd sich aufheben, so dass bei der Bestimmung des Grades dieser

Gleichung in den Coordinaten aus den Graden, in welchen dieselben in a, b, ... enthalten sind, die Ordnung der Enveloppe niedriger erhalten werden kann, als der Grad eines jeden der beiden Theile der Gleichung.

Wenn wir in T die Coordinaten eines Punktes x_i' einsetzen, und die resultierende Gleichung

$$a' t^n + n b' t^{n-1} + \cdots = 0$$

für t auflösen, so erhalten wir offenbar n Lösungen, d. h. das System der durch $T = 0$ repräsentierten Curven ist von solcher Art, dass durch einen beliebig gewählten festen Punkt n derselben hindurchgehen, und es geht aus dem Entwickelten hervor, dass für einen in der Enveloppe liegenden festen Punkt zwei von diesen Curven zusammen fallen.

Der Fall, wo T von einem parametrischen Punkt abhängt, ist auf den eben betrachteten zurückführbar, wenn die parametrische Curve eine Gerade, ein Kegelschnitt oder irgend eine andere Unicursal-Curve ist; denn dann können nach Art. 44. die Coordinaten des parametrischen Punktes als rationale Functionen eines Parameters ausgedrückt werden.

Beispiel 1. Man bestimme die Enveloppe von $at^n + bt^p + c = 0$ mit a, b, c als beliebigen Functionen der Coordinaten. (Diess letztere soll für a, b, ... auch in allen folgenden Beispielen vorausgesetzt sein.) Die Combination der Gleichung mit ihrem Differential nach t giebt $nat^{n-p} + pb = 0$, $(n - b)\, bt^p + nc = 0$; durch Elimination von t erhalten wir

$$n^n a^p c^{n-p} \pm p^p (n - p)^{(n-p)} b^n = 0,$$

wo das Zeichen $+$ für ungerade und das Zeichen $-$ für gerade n zu gebrauchen ist.

Beispiel 2. Man soll die Enveloppe von $a \cos^n \theta + b \sin^n \theta = c$ für θ als den veränderlichen Parameter bestimmen.

Wir haben $d_\theta T = - a \cos^{n-1} \theta \sin \theta + b \sin^{n-1} \theta \cos \theta = 0$, also

$$\tan \theta = a^{\frac{1}{n-2}} : b^{\frac{1}{n-2}}, \quad \cos \theta = b^{\frac{1}{n-2}} : \sqrt{\left(a^{\frac{2}{n-2}} + b^{\frac{2}{n-2}}\right)},$$

$$\sin \theta = a^{\frac{1}{n-2}} : \sqrt{\left(a^{\frac{2}{n-2}} + b^{\frac{2}{n-2}}\right)}.$$

Durch Substitution dieser Werthe und nachfolgende Reduction erhalten wir die Gleichung der Enveloppe

$$a^{\frac{2}{2-n}} + b^{\frac{2}{2-n}} = c^{\frac{2}{2-n}}.$$

Insbesondere ist (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 314.) die Enveloppe von

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c$$

durch $a^2 + b^2 = c^2$ gegeben. Umgekehrt kann jede Tangente der Curve $x^m + y^m = c^m$ in der Form $x \cos^{\frac{2(m-1)}{m}} \theta + y \sin^{\frac{2(m-1)}{m}} \theta = c$ ausgedrückt werden mit $x = c \cos^m \theta$, $y = c \sin^m \theta$ als Coordinaten des Berührungspunktes. Diess kann auch als Beispiel einer Enveloppe dargestellt werden, welche von einem parametrischen Punkt in einer Unicursal-Curve abhängt. Denn wenn wir $\cos \theta = \alpha$, $\sin \theta = \beta$ setzen, so sind α, β die Coordinaten eines in dem Kreise $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ liegenden Punktes; und da der Kreis eine Curve vom Geschlecht Null ist, so können diese Coordinaten in Function eines Parameters rational ausgedrückt werden. So können wir, wenn $t = \cos \theta + i \sin \theta$ ist, für α oder $\cos \theta$ setzen $\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ und für β oder $\sin \theta$ ebenso $\frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ und die Gleichung z. B. $a\alpha + b\beta = c$ wird

$$(a - bi)\, t^2 - 2ct + (a + bi) = 0,$$

als deren Enveloppe sich wie vorher ergiebt

$$(a + bi)\,(a - bi) = c^2 \text{ d. h. } a^2 + b^2 = c^2.$$

Wenn die Einführung der imaginären Einheit vermieden werden soll, so setzt man $\tan \frac{1}{2} \theta = t$ und drückt („Kegelschnitte“ Art. 314.) $\cos \theta$, $\sin \theta$ rational in Function von t aus.

Beispiel 3. Sei die Curve

$$a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + c \cos\theta + d \sin\theta + e = 0.$$

Wir setzen $t = \cos\theta + i \sin\theta$ und erhalten

$$a\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - bi\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + c\left(t + \frac{1}{t}\right) - di\left(t - \frac{1}{t}\right) + 2e = 0,$$

oder

$$(a - bi)\, t^4 + (c - di)\, t^3 + 2et^2 + (c + di)\, t + (a + bi) = 0.$$

Wenn wir auf diese Form die oben gegebene Discriminante der biquadratischen Gleichung mit Binomialcoefficienten anwenden, so erhalten wir

$$\left\{a^2 + b^2 - \frac{1}{4}(c^2 + d^2) + \frac{1}{3} e^2\right\}^3$$

$$= 27\left\{\frac{1}{3}(a^2 + b^2)\, e + \frac{1}{24}(c^2 + d^2)\, e - \frac{1}{8} a (c^2 - d^2) - \frac{1}{4} bcd - \frac{1}{27} e^3\right\}^2,$$

oder mit Beseitigung der Brüche

$$\left\{12\,(a^2 + b^2) - 3\,(c^2 + d^2) + 4e^2\right\}^3$$

$$= \left\{72\,(a^2 + b^2)\, e + 9\,(c^2 + d^2)\, e - 27a\,(c^2 - d^2) - 54bcd - 8e^3\right\}^2,$$

wobei anzumerken nützlich ist, dass der entwickelte Ausdruck weder e^6 noch $(c^2 + d^2)\, e^4$ enthält.

Beispiel 4. Man entwickle die Gleichung der Parallelcurve eines Kegelschnitts, d. h. des Ortes der Endpunkte von gleichen in den Normalen des Kegelschnitts von ihren Fusspunkten aus abgetragenen Stücken r. Wir haben („Kegelschn." Art. 342, 2.) diese Curve als den Ort des Mittelpunktes eines Kreises von constantem Radius betrachtet, der den Kegelschnitt stets berührt, sie kann aber offenbar auch als die Enveloppe eines Kreises von constantem Radius betrachtet werden, dessen Centrum den Kegelschnitt beschreibt. Wir haben dann die Enveloppe von

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$$

zu bestimmen, wo der parametrische Punkt α, β den Kegelschnitt durchläuft und weil der Kegelschnitt eine Unicursalcurve ist, so kommt diess auf den discutierten Fall zurück. Sei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ der Kegelschnitt und setzen wir $a\cos\theta$ und $b\sin\theta$ für α und β, so erhalten wir aus

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y+x^2+y^2-r^2$$

den Ausdruck

$$(a^2-b^2)\cos 2\theta-4ax\cos\theta-4by\sin\theta+2(x^2+y^2)+a^2+b^2-2r^2,$$

der in der allgemeineren Form des letzten Beispiels mit inbegriffen ist. Von da aus erhalten wir ein Resultat, welches sich entwickelt mit dem a. a. O. gegebenen identisch erweist.

86. Wir wollen den besondern Fall etwas näher untersuchen, wo T in t algebraisch und vom ersten Grade in den Coordinaten ist, so dass es gleich Null gesetzt eine gerade Linie darstellt, d. h. wir untersuchen die Enveloppe von

$$at^n+nbt^{n-1}+\cdots=0$$

für $a, b, \ldots$ als lineare Functionen der Coordinaten. Dann ist die Enveloppe offenbar eine Curve n^{ter} Classe, weil nach Art. 85. durch einen beliebigen Punkt n Tangenten derselben gehen; und die Ordnungszahl der Enveloppe ist $2(n-1)$, weil die Discriminante von $at^n+\cdots=0$ vom Grade $2(n-1)$ in den Coefficienten $a, b, \ldots$ ist („Vorlesungen" Art. 62.), die ihrerseits die Coordinaten linear enthalten. Man kann überdiess zwei andere Charaktere der Enveloppe leicht bestimmen. Zuerst, sie hat im Allgemeinen keine Inflexionspunkte; denn in einem Inflexionspunkt fallen zwei auf einander folgende Tangenten zusammen, d. h. $T=0$ und $d_tT=0$ müssen dieselbe Gerade repräsentieren; diess aber, weil es die Uebereinstimmung von zwei Constanten erfordert, also zwei Bedingungen giebt, kann im Allgemeinen nicht durch

die Wahl des einzigen verfügbaren Parameters t erreicht werden.

Die Zahl der Spitzen der Enveloppe ist $3(n-2)$. Die Spitze ist als die der Inflexionstangente reciproke Singularität der Schnittpunkt von drei auf einander folgenden Tangenten; für eine Spitze werden also die Gleichungen

$$T=0, \quad d_t T=0, \quad d_t^2 T=0$$

zugleich erfüllt sein, oder durch leichte Reduction

$$T_{11}=a t^{n-2}+(n-2) b t^{n-3}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) c t^{n-4}+\cdots=0,$$
$$T_{12}=b t^{n-2}+(n-2) c t^{n-3}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) d t^{n-4}+\cdots=0,$$
$$T_{22}=c t^{n-2}+(n-2) d t^{n-3}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) e t^{n-4}+\cdots=0;$$

wo T_{11}, T_{12}, T_{22} die drei zweiten Differentiale der durch Einführung einer zweiten Variabeln homogen gemachten Function T sind. Wenn wir zwischen diesen Gleichungen x und y eliminieren, welche linear in dieselben eingehen, so ist die resultierende Gleichung in t vom Grade $3(n-2)$ und erlaubt also ebenso viel Lösungen. In der That, wenn wir T in die Form

$$x U+y V+z W$$

setzen, in welcher U, V, W nur t und Constanten enthalten, so giebt die Determinante

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & V_{11}, & W_{11} \\ U_{12}, & V_{12}, & W_{12} \\ U_{13}, & V_{13}, & W_{13} \end{vmatrix}=0,$$

die den $3(n-2)$ Spitzen entsprechenden Werthe von t.

Die Bestimmung der Zahl der Doppelpunkte in der Enveloppe kommt auf die Bestimmung der Ordnung des Systems von Bedingungen hinaus, unter welchen $T=0$ zwei verschiedene Paare von gleichen Wurzeln hat [15], und das Problem der Bestimmung der Anzahl von Doppeltangenten der Enveloppe ist das von der Bestimmung der Ordnung des Systems von Bedingungen, unter welchen $T=0$ für verschiedene Werthe von t dieselbe Gerade repräsentiert; oder mit andern Worten der Zahl von Arten, in welchen es möglich ist, ein Paar Werthe t', t'' von t so zu bestimmen, dass die Verhältnissgleichheit

$$U' : V' : W' = U'' : V'' : W''$$

stattfindet. Es ist aber nicht nöthig, die Untersuchung dieser Probleme hier zu geben, weil wir durch die Plücker'schen Gleichungen aus den schon gefundenen Charakteren δ und τ bestimmen können; mit $2(n-1)$ und n für μ und ν und mit $\iota = 0$ finden wir

$$\varkappa = 3(n-2), \quad \delta = 2(n-2)(n-3), \quad \tau = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

87. Wir betrachten nun den Fall, in welchem die Gleichung k Parameter enthält, die durch $(k-1)$ Gleichungen mit einander verbunden sind. Um die Ideen zu fixieren, nehmen wir an, dass die Gleichung $U = 0$ die durch zwei Gleichungen $V = 0$, $W = 0$ verbundenen Parameter α, β, γ enthalte. Wir können dann β, γ als Functionen von α betrachten, die durch die beiden Gleichungen $V = 0$, $W = 0$ bestimmt sind. Das Verfahren zur Bestimmung der Enveloppe in seiner ursprünglichen Form besteht dann in der Elimination von α zwischen den gegegebenen Gleichungen und

$$\frac{dU}{d\alpha} + \frac{dU}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{dU}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0.$$

Es sind darin $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ Functionen von α, die aus

$$\frac{dV}{d\alpha} + \frac{dV}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{dV}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0,$$

$$\frac{dW}{d\alpha} + \frac{dW}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{dW}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

bestimmt sind. Diese drei Gleichungen liefern

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{dU}{d\alpha}, & \frac{dU}{d\beta}, & \frac{dU}{d\gamma} \\ \frac{dV}{d\alpha}, & \frac{dV}{d\beta}, & \frac{dV}{d\gamma} \\ \frac{dW}{d\alpha}. & \frac{dW}{d\beta}, & \frac{dW}{d\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

und das Endresultat wird durch Elimination von α, β, γ zwischen $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, $\nabla = 0$ erhalten. Aber $\nabla = 0$ ist offenbar auch das Resultat der Elimination von λ, μ zwischen den Gleichungen

$$\frac{dU}{d\alpha} + \lambda \frac{dV}{d\alpha} + \mu \frac{dW}{d\alpha} = 0,$$
$$\frac{dU}{d\beta} + \lambda \frac{dV}{d\beta} + \mu \frac{dW}{d\beta} = 0,$$
$$\frac{dU}{d\gamma} + \lambda \frac{dV}{d\gamma} + \mu \frac{dW}{d\gamma} = 0;$$

so dass das Resultat auch durch die Elimination von α, β, γ, λ, μ zwischen diesen letzten drei Gleichungen und den ursprünglich gegebenen erhalten werden kann. Diess ist die Methode der unbestimmten Multiplicatoren, auf welche in Art. 84. hingedeutet ist.

88. Von Wichtigkeit ist der Fall, wo U in $(k + 1)$ Parametern homogen ist, welche durch $(k - 1)$ homogene Gleichungen verbunden sind. Er ist in Wahrheit mit dem Vorigen gleichbedeutend, weil die $(k + 1)$ Parameter durch die Verhältnisse ersetzt werden können, welche k von ihnen mit dem $(k + 1)^{\text{ten}}$ bilden. Aber es ist symmetrischer, die sämmtlichen $(k + 1)$ Gleichungen zu benutzen, welche die Methode der unbestimmten Multiplicatoren liefert, und die in Folge des Satzes von den homogenen Functionen durch eine Relation verbunden sind, die sie auf k Gleichungen reduciert. Ist also z. B. U in α, β, γ, den Coordinaten des parametrischen Punktes in der Curve $V = 0$, homogen, so giebt die Methode der unbestimmten Multiplicatoren zu den beiden Originalgleichungen die drei neuen

$$\frac{dU}{d\alpha} + \lambda \frac{dV}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta} + \lambda \frac{dV}{d\beta} = 0, \quad \frac{dU}{d\gamma} + \lambda \frac{dV}{d\gamma} = 0.$$

Aber die letzten drei sind zweien Gleichungen äquivalent, weil sie mit α, β, γ respective multipliciert die Gleichung $mU + \lambda nV = 0$ hervorbringen, die aus den Gleichungen $U = 0$, $V = 0$ hervorgeht. Wir haben somit vier Gleichungen, aus welchen wir in Folge ihrer Homogeneität die vier Grössen α, β, γ, λ eliminieren und so die Gleichung der Enveloppe bilden können.

Beispiel. Die Enveloppe von

$$U = (A\alpha)^m + (B\beta)^m + (C\gamma)^m = 0$$

soll unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass α, β, γ durch die Relation

$$V = (a\alpha)^n + (b\beta)^n + (c\gamma)^n = 0$$

verbunden sind.

Die Methode der unbestimmten Multiplicatoren giebt

$$m A'''\alpha'''^{-1} + \lambda n a^n \alpha^{n-1} = 0, \quad m B''' \beta'''^{-1} + \lambda n b^n \beta^{n-1} = 0,$$
$$m C''' \gamma'''^{-1} + \lambda n c^n \gamma^{n-1} = 0;$$

man erhält also mit $\frac{\lambda n}{m} = -\mu^{m-n}$

$$A\alpha = \mu \left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad B\beta = \mu \left(\frac{b}{B}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad C\gamma = \mu \left(\frac{c}{C}\right)^{\frac{n}{m-n}}$$

und durch Substitution in U die Gleichung der Enveloppe

$$\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{mn}{m-n}} + \left(\frac{b}{B}\right)^{\frac{mn}{m-n}} + \left(\frac{c}{C}\right)^{\frac{mn}{m-n}} = 0.$$

89. Cayley hat den Fall einer Curve $U = 0$ betrachtet, deren Gleichung zwei oder mehrere unabhängige Parameter enthält. Sind z. B. α, β die beiden Parameter, so erhalten wir aus den Gleichungen

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta} = 0$$

durch Elimination von α, β die Gleichung der Enveloppe. Wir bemerken aber, dass wir aus denselben Gleichungen die Coordinaten x, y eliminieren können und dass dieselben also eine Relation zwischen den Parametern $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ implicite enthalten. Diess bestimmt in dem zweifachen System von Curven $U = 0$ ein einfaches System, für welches die Parameter dieser Bedingungsgleichung genügen. Wenn wir irgend eine Curve des zweifachen Systems und die nächstfolgende, den Nachbarwerthen $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$ der Parameter entsprechende Curve betrachten, so schneiden sich beide in einer Gruppe von Punkten, welche im Allgemeinen von dem Verhältniss $d\beta : d\alpha$ der Wachsthümer der Parameter abhängig sind; gehört aber die Curve zu dem einfachen System, so ist die Gruppe dieser Punkte von dem fraglichen Verhältniss unabhängig. Die Coordinaten der Schnittpunkte genügen den Gleichungen

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta} = 0$$

und also auch der Gleichung

$$U + \frac{dU}{d\alpha}\, d\alpha + \frac{dU}{d\beta}\, d\beta = 0$$

für jeden Werth des Verhältnisses $d\beta : d\alpha$. So erkennen wir,

dass eine Curve des einfachen Systems durch jede folgende Curve des doppelten Systems in der nämlichen Gruppe von Punkten geschnitten wird und dass der Ort dieser Punkte die Enveloppe liefert. In dem Fall eines einfachen Parameters ist die Enveloppe der Ort einer Gruppe von Punkten in jeder Curve des Systems und mag als eine allgemeine Enveloppe bezeichnet werden; im Fall zweier Parameter ist die Enveloppe der Ort einer Gruppe von Punkten, die nicht in jeder Curve des Systems, sondern nur in den Curven des einfachen Systems liegen, für welches die Parameter der Gleichung $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ genügen und sie mag eine specielle Enveloppe heissen. Die nämliche Theorie ist auf den Fall einer beliebigen Zahl von Parametern anwendbar und es giebt immer ein resultierendes einfaches System von Curven.

90. Reciprocal-Curven. Es sei verlangt, die Enveloppe einer Geraden

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

zu bestimmen, wenn die ξ_i durch eine Relation $\Sigma = 0$ verbunden sind, mit andern Worten, aus der Gleichung $\Sigma = 0$ einer Curve in Liniencoordinaten zu ihrer Gleichung in Punktcoordinaten überzugehen. Die Methode des Art. 88. zeigt, dass wir von den Gleichungen

$$\Sigma = 0, \qquad \xi_1 x_1 + \cdot \cdot = 0$$

durch Combination derselben mit

$$\frac{d\Sigma}{d\xi_1} + \lambda x_1 = 0, \quad \frac{d\Sigma}{d\xi_2} + \lambda x_2 = 0, \quad \frac{d\Sigma}{d\xi_3} + \lambda x_3 = 0$$

und durch Elimination von $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \lambda$ zwischen diesen Gleichungen das Resultat erhalten.

Die Lösung des reciproken Problems, von der Gleichung der Curve in Punktcoordinaten $S = 0$ zur Gleichung in Liniencoordinaten überzugehen, hängt von einer ganz analogen Elimination ab, nämlich von der Elimination von x_1, x_2, x_3 und λ zwischen $S = 0$, $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ und

$$\frac{dS}{dx_1} + \lambda \xi_1 = 0, \quad \frac{dS}{dx_2} + \lambda \xi_2 = 0, \quad \frac{dS}{dx_3} + \lambda \xi_3 = 0;$$

man gelangt zu diesem System von Gleichungen auch unmittelbar aus der Betrachtung, dass die Identität der Geraden $\xi_1 x_1 + \cdot \cdot = 0$ mit der Tangente der Curve im Punkte x_i

nach der wohlbekannten Form der Gleichung der Tangente (Art. 64.) die Proportionalität der ξ_i zu den $\frac{dS}{dx_i}$ respective erfordert. Wir haben (Art. 84. und „Kegelschnitte" Art. 395.) auch erwähnt, dass das Problem, von der Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten zur Gleichung derselben in Liniencoordinaten überzugehen, mit dem Problem übereinstimmt, die Gleichung der Reciprokalcurve derselben in Bezug auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ zu bilden.

Beispiel. Die Gleichung von

$$(a_1 x_1)^m + (a_2 x_2)^m + (a_3 x_3)^m = 0$$

in Liniencoordinaten abzuleiten. Wir haben in diesem Falle

$$(a_1 x_1)^{m-1} + \frac{\lambda}{m} \frac{\xi_1}{a_1} = 0, \quad (a_2 x_2)^{m-1} + \frac{\lambda}{m} \frac{\xi_2}{a_2} = 0,$$

$$(a_3 x_3)^{m-1} + \frac{\lambda}{m} \frac{\xi_3}{a_3} = 0,$$

also

$$\left(\frac{\xi_1}{a_1}\right)^{\frac{m}{m-1}} + \left(\frac{\xi_2}{a_2}\right)^{\frac{m}{m-1}} + \left(\frac{\xi_3}{a_3}\right)^{\frac{m}{m-1}} = 0.$$

91. Die so eben angezeigte Methode zur Aufstellung der Gleichung der Reciprokalcurve ist in der Praxis zumeist nicht die zweckmässigste; die folgende scheint in der Mehrzahl der Fälle ihr vorzuziehen. Sei die Gleichung der Curve in der Form

$$u^{(n)} + u^{(n-1)} x_3 + u^{(n-2)} x_3^2 + \cdots = 0$$

gegeben, so können wir x_3 mittelst der Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

eliminieren und erhalten

$$x_3^n u^{(n)} - x_3^{n-1}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) u^{(n-1)} + x_3^{n-2}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^2 u^{(n-2)} - \cdots = 0,$$

eine in den Veränderlichen x_1, x_2 homogene Gleichung; die gleich Null gesetzte Discriminante dieser Gleichung als einer binären Form giebt die Gleichung der Reciprokalcurve, mit dem Factor $x_3^{n(n-1)}$ multipliciert.

So erhält man z. B. für die Gleichung

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6m\, x_1 x_2 x_3 = 0$$

durch Elimination von x_3 zunächst

$$(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^3 + 6m x_1 x_2 \xi_3^2 (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) - \xi_3^3 (x_1^3 + x_2^3) = 0,$$

oder

$(\xi_1^3-\xi_3^3,\ \xi_1^2\xi_2+2m\xi_1\xi_3^2,\ \xi_1\xi_2^2+2m\xi_2\xi_3^2,\ \xi_2^3-\xi_3^3 \between x_1, x_2)^3 = 0$ *),
deren Discriminante durch ξ_3^6 dividiert die Gleichung der Reciprokalcurve oder die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten liefert:

$$\xi_1^6+\xi_2^6+\xi_3^6-(2+32\,m^3)\,(\xi_2^3\,\xi_3^3+\xi_3^3\,\xi_1^3+\xi_1^3\,\xi_2^3)$$
$$-\,24\,m^2\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,(\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3)-(24\,m+48\,m^4)\,\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2=0.$$

Auf demselben Wege können die Liniencoordinaten-Gleichungen der durch die allgemeine Gleichung in Punktcoordinaten dargestellten Curven dritter und vierter Ordnung gebildet werden, die wir später mittheilen.

92. Ein Hauptvorzug der zuletzt gegebenen Methode besteht darin, dass sie uns gestattet, die Gleichung der Reciprokalcurve in der symbolischen Form darzustellen, welche in der XI. der „Vorlesungen" erklärt ist. Wenn die ternäre Form durch Elimination von x_3, mittelst der Gleichung $\xi_1\,x_1+\cdots=0$ auf eine binäre reduciert ist, so gelten für die Differentiale der binären Form nach x_1 und x_2 die Regeln

$$\frac{\overline{d}}{dx_1}=\frac{d}{dx_1}-\frac{\xi_1}{\xi_3}\,\frac{d}{dx_3},\quad \frac{\overline{d}}{dx_2}=\frac{d}{dx_2}-\frac{\xi_2}{\xi_3}\,\frac{d}{dx_3}.$$

Wenn wir aber diese Regeln auf das Symbol (12) anwenden, durch welches

$$\frac{d}{dx_1^{(1)}}\,\frac{d}{dx_2^{(2)}}-\frac{d}{dx_1^{(2)}}\,\frac{d}{dx_2^{(1)}}$$

repräsentiert wird, so wird diess in

$$\frac{1}{\xi_3}\left\{\xi_1\left(\frac{d}{dx_2^{(1)}}\,\frac{d}{dx_3^{(2)}}-\frac{d}{dx_2^{(2)}}\,\frac{d}{dx_3^{(1)}}\right)\right.$$
$$\left.+\,\xi_2\left(\frac{d}{dx_3^{(1)}}\,\frac{d}{dx_1^{(2)}}-\frac{d}{dx_3^{(2)}}\,\frac{d}{dx_1^{(1)}}\right)+\xi_3\left(\frac{d}{dx_1^{(1)}}\,\frac{d}{dx_2^{(2)}}-\frac{d}{dx_1^{(2)}}\,\frac{d}{dx_2^{(1)}}\right)\right\}$$

übergeführt; oder das auf die binäre Form angewandte Symbol weicht nur durch den Factor ξ_3 von dem auf die ternäre Form angewendeten contravarianten Symbol (ξ, 12) ab.

---

*) Wir brauchen die Bezeichnung $(a, b, \ldots \between x, y)^n$ für die binäre Form mit Binomialcoefficienten

$$ax^n+nbx^{n-1}\,y+\tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,cx^{n-2}\,y^2+\cdots$$

und behalten die andere $(a, b, \ldots \between x, y)^n$ für die ohne Binomialcoefficienten geschriebene Form. (Vergl. „Vorlesungen" Art. 61.)

Wenn also eine Gerade $\xi_1 x_1 + \cdot\cdot = 0$ eine Curve so schneidet, dass die Schnittpunkte einer invarianten Relation von bekannter Symbolform genügen, so kann die Gleichung ihrer Enveloppe in Liniencoordinaten in derselben Form sofort angegeben werden. Es ist z. B. die Discriminante einer binären cubischen Form bekanntlich $(12)^2 (34)^2 (13) (24)$; wenn also eine gerade Linie $\xi_1 x_1 + \cdot\cdot = 0$ eine Curve dritter Ordnung in drei Punkten von verschwindender Discriminante schneidet, d. h. wenn sie die Curve berührt, so müssen wir haben

$$(\xi_1\, 12)^2 (\xi_1\, 34)^2 (\xi_1\, 13) (\xi_1\, 24) = 0.$$

Ebenso ist die Discriminante einer binären biquadratischen Form bekanntlich $S^3 = 27\, T^2$ für S und T als zwei Invarianten, deren symbolische Formen respective

$$(12)^4 \text{ und } (12)^2 (23)^2 (31)^2$$

sind. Es folgt daraus sofort, dass die Gleichung der Reciprokalcurve einer Curve vierter Ordnung durch $S^3 = 27\, T^2$ dargestellt wird, wenn S für $(\xi_1\, 12)^4$ und T für

$$(\xi_1\, 12)^2 (\xi_1\, 23)^2 (\xi_1\, 31)^2$$

gesetzt wird; so dass $S = 0$ eine Curve vierter Classe darstellt, die die Enveloppe von Geraden ist, welche die Curve vierter Ordnung in Punkten schneiden, für die die Invariante S verschwindet (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 340.), und $T = 0$ eine Curve sechster Classe, die Enveloppe von Geraden, die die Curve in vier harmonischen Punkten schneiden und für die daher die Invariante T verschwindet.

93. Wir gaben in Art. 78. eine Methode zur Bildung der Gleichung der Tangenten, die von einem gegebenen Punkte x_i' an eine Curve gehen; wenn wir in Besitz der Gleichung der Reciprokalcurve oder der Gleichung derselben in Liniencoordinaten sind, so ist jenes Problem in der That gelöst, weil nur erfordert wird, in dieselbe für die ξ_i die $x_j\, x_k' - x_k\, x_j'$ zu substituieren, um die Bedingung zu erhalten, unter welcher die Verbindungslinie der Punkte x_i, x_i' die Curve berührt, eine Bedingung, welcher offenbar durch die in den Tangenten der Curve von x_i' aus liegenden Punkte genügt wird. (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 326.)

94. Damit erhalten wir sofort einen zu dem Satze des Art. 92. analogen Satz, nach welchem wir aus der Gleichung der Curve in Liniencoordinaten die Gleichung des Ortes eines Punktes symbolisch bilden können, für welchen das System der von ihm ausgehenden Tangenten der Curve einer gegebenen invarianten Relation genügt. Setzen wir $x_3 = 0$ in der Gleichung des Tangentenbüschels, so entsteht die Gleichung eines vom Fundamentalpunkt $x_1 = x_2 = 0$ ausgehenden zu jenem für $x_3 = 0$ als Axe perspectivischen Büschels, welches derselben invarianten Relation genügt. Aus der so eben zur Bildung der Gleichung des Tangentenbüschels gegebenen Methode folgt aber

$$\frac{d}{dx_1} = x_2' \frac{d}{d\xi_3} - x_3' \frac{d}{d\xi_2}, \quad \frac{d}{dx_2} = - x_1' \frac{d}{d\xi_3} + x_3' \frac{d}{d\xi_1},$$

also wie oben

$$\frac{d}{dx_1^{(1)}} \frac{d}{dx_2^{(2)}} - \frac{d}{dx_1^{(2)}} \frac{d}{dx_2^{(1)}} = x_3' \left\{ x_1' \left(\frac{d}{d\xi_2^{(1)}} \frac{d}{d\xi_3^{(2)}} - \frac{d}{d\xi_2^{(2)}} \frac{d}{d\xi_3^{(1)}} \right) \right.$$
$$\left. + x_2' \left(\frac{d}{d\xi_3^{(1)}} \frac{d}{d\xi_1^{(2)}} - \frac{d}{d\xi_3^{(2)}} \frac{d}{d\xi_1^{(1)}} \right) + x_3' \left(\frac{d}{d\xi_1^{(1)}} \frac{d}{d\xi_2^{(2)}} - \frac{d}{d\xi_1^{(2)}} \frac{d}{d\xi_2^{(1)}} \right) \right\};$$

so dass wir die Regel erhalten, es sei für jeden Factor (12) in dem invarianten Symbol, welchem das Tangentenbüschel entsprechen soll, $(x_2' \, 12)$ zu substituieren und mit dem so entstehenden Symbol an der Gleichung der Curve in Liniencoordinaten zu operieren.

95. Wenn die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten gegeben ist, so kann die Gleichung ihrer reciproken Polare in Bezug auf einen Kreis mit dem Pol als Centrum direct gefunden werden. Wenn wir auf dem Radius vector OP ein Stück OP' abtragen, das dem nächstfolgenden Radius vector OQ gleich ist, so ist $PP' = d\varrho$, $P'Q = \varrho \, d\omega$,

$$\tan OPQ = \frac{\varrho d\omega}{d\varrho}$$

und $\varrho \sin OPQ$ die Länge der Normale auf die Tangente. Ist die Gleichung der Curve z. B. $\varrho^m = a^m \cos m\omega$, so erhalten wir durch das logarithmische Differential

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \tan m\omega \, d\omega, \quad \frac{\varrho d\omega}{d\varrho} = - \cot m\omega,$$

und wenn θ der spitze Winkel ist, den der Radius vector

mit der Tangente macht, so wird $\theta = 90^0 - m\omega$ und die Normale zur Tangente $\varrho \sin\theta = \varrho \cos m\omega$. Der Winkel zwischen der Normale und dem Radius vector ist $= m\omega$ und derjenige zwischen der Normalen und der Geraden, von welcher aus ω gemessen wird, ist $= (m + 1)\,\omega$. Aber der Radius vector der reciproken Curve ist der Reciproke der Normale zur Tangente, die Gleichung der reciproken Curve ist somit auch von der Form

$$\varrho^m = a^m \cos m\omega,$$

nur dass der neue Werth von m gleich $-\frac{m}{m+1}$ ist. Diese Curvenfamilie schliesst verschiedene besonders wichtige Formen in sich: Für $m = 1$ den Kreis, für $m = -1$ die gerade Linie, für $m = 2$ die gewöhnliche Lemniscate, für $m = -2$ die gleichseitige Hyperbel, für $m = \frac{1}{2}$ die Cardioide, für $m = -\frac{1}{2}$ die Parabel, etc.

96. Berührung zwischen zwei Curven. In Art. 90. bemerkten wir, dass das Problem von der Bildung der Gleichung der Reciprokalcurve mit dem andern Problem übereinstimmt, die Bedingung aufzustellen, unter welcher eine gerade Linie die gegebene Curve berührt, weil beide gelöst werden, indem man die Enveloppe von $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$ bestimmt, für die ξ_i als der Gleichung der Curve genügende Parameter. Allgemeiner ist das Problem, die Bedingungen zu bilden, unter denen zwei Curven $U = 0$, $V = 0$ sich berühren, identisch mit dem andern Problem, die Enveloppe der einen Curve zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass die Coordinaten als veränderliche Parameter betrachtet werden, die auch der Gleichung der andern Curve genügen. Denn wenn die beiden Curven sich berühren, so genügen die Coordinaten x_i des Berührungspunktes den Gleichungen von beiden und da auch ihre entsprechenden Tangenten dieselben sind, so sind die Differentialquotienten von U in diesem Punkte respective proportional denen von V. Die Bedingung wird somit gefunden, indem man x_1, x_2, x_3, λ zwischen $U = 0$, $V = 0$ und

$$\frac{dU}{dx_1} = \lambda \frac{dV}{dx_1}, \quad \frac{dU}{dx_2} = \lambda \frac{dV}{dx_2}, \quad \frac{dU}{dx_3} = \lambda \frac{dV}{dx_3}$$

eliminiert; man hat also wesentlich die in Art. 88. zur Lösung des Problems der Enveloppe gegebenen Gleichungen.

97. Wenn die Ordnungen der Curven $U = 0$ und $V = 0$ respective μ und μ' sind, so kann der Grad bestimmt werden, in welchem die Coefficienten der Gleichung jeder Curve, sagen wir $V = 0$, in die Bedingung der Berührung eingehen. Seien die Coefficienten in V durch $a', b', c', \ldots$ bezeichnet und sei $W = 0$ eine andere Curve von derselben Ordnung mit den entsprechenden Coefficienten $a'', b'', c'', \ldots$, so erhalten wir durch Substitution von $a' + k a'', \ldots$ für $a', \ldots$ in die Bedingung der Berührung die Bedingung, unter welcher die Curve $V + k W = 0$ die Curve $U = 0$ berührt; dieselbe enthält natürlich k in demselben Grade, in welchem die Coefficienten von V in die Bedingung der Berührung eingehen. Dieser letztere Grad wird somit durch die Zahl der Curven $V + k W = 0$ ausgedrückt, welche die Curve $U = 0$ berühren. Der Berührungspunkt muss dann wie vorher den Bedingungen

$$V_1 + k W_1 = \lambda U_1, \quad V_2 + k W_2 = \lambda U_2, \quad V_3 + k W_3 = \lambda U_3$$

genügen, aus denen durch Elimination von k und λ

$$\nabla = \begin{vmatrix} U_1, & V_1, & W_1 \\ U_2, & V_2, & W_2 \\ U_3, & V_3, & W_3 \end{vmatrix} = 0$$

hervorgeht. Die Durchschnittspunkte der Curve $\nabla = 0$ mit $U = 0$ sind diejenigen Punkte in $U = 0$, in welchen diese Curve von einer Curve des Büschels $V + k W = 0$ berührt werden. Weil die Grade von U_i, V_i, W_i respective $\mu - 1$, $\mu' - 1$, $\mu' - 1$ sind, so ist der Grad von ∇ gleich $(\mu + 2\mu' - 3)$ und die Zahl jener Durchschnittspunkte $\mu(\mu + 2\mu' - 3)$. Diess ist somit auch der Grad, in welchem die Coefficienten von V in die Bedingung der Berührung eingehen; und in analoger Art ergiebt sich, dass dieselbe die Coefficienten von U im Grade $\mu'(\mu' + 2\mu - 3)$ enthält. Für $\mu' = 1$ finden wir das schon bekannte Resultat wieder, dass die Bedingung, unter welcher die Gerade $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$ eine Curve der Ordnung μ berührt, die Grössen ξ_i im Grade $\mu(\mu - 1)$ und die Coefficienten der Gleichung der Curve im Grade $2(\mu - 1)$ enthält. (Vergl. „Kegelschnitte" Art. 348.)

Wenn die Curve $U=0$ einen Doppelpunkt hat, so folgt, weil $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$ durch diesen Punkt gehenund, falls derselbe insbesondere eine Spitze ist, auch dieselbe Tangente mit $U=0$ haben, dass diess Alles auch für $\nabla=0$ gilt; wir sehen damit, dass der Grad der Bedingung der Berührung in den Coefficienten von V für jeden Doppelpunkt um zwei und für jede Spitze von $U=0$ um drei Einheiten vermindert werden muss; dieser Grad ist somit

$$\mu\,(\mu+2\mu'-3)-2\delta-3\varkappa \text{ oder } \nu+2\mu\,(\mu'-1).$$

98. Dieselben Resultate können noch in anderer Weise begründet werden. Denken wir eine beliebige Gerade $\xi_1 x_1+\cdots=0$ und setzen wir die Determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

gleich Null, so repräsentiert diese Gleichung den Ort eines Punktes, für welchen die Polaren in Bezug auf die Curven $U=0$ und $V=0$ sich auf der angenommenen Geraden schneiden. In einem zu $U=0$ und $V=0$ gemeinschaftlichen Punkte sind die Polaren die bezüglichen Tangenten und es giebt daher offenbar nur zwei Fälle, in welchen ein zu $U=0$ und $V=0$ gemeinsamer Punkt auch in $\nabla=0$ liegen kann, nämlich den einen, in welchem die angenommene Gerade einen jener Durchschnittspunkte von $U=0$ und $V=0$ enthält, und den andern, wo $U=0$ und $V=0$ einander berühren. Wenn wir also zwischen $\nabla=0$, $U=0$, $V=0$ eliminieren, so enthält die Resultante als Factoren die Bedingung, unter welcher $\xi_1 x_1+\cdots=0$ durch einen Durchschnittspunkt von $U=0$, $V=0$ geht, und die Bedingung, unter welcher dieselben sich berühren. In die Resultante von drei Gleichungen treten nun die Coefficienten einer jeden in einem dem Product der Grade der beiden andern gleichen Grade ein; es ist somit, weil ∇, U, V respective von den Graden $\mu+\mu'-2$, μ, μ' sind, die Resultante vom Grade $\mu\mu'$ in den ξ_i, vom Grade

$$\mu\mu'+\mu'\,(\mu+\mu'-2)=\mu'\,(2\mu+\mu'-2)$$

in den Coefficienten von U, und vom Grade $\mu\,(2\mu'+\mu-2)$

in den Coefficienten von V. Ebenso sind die Grade der Resultante von $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$, $U = 0$, $V = 0$ in den verschiedenen Coefficienten respective $\mu \mu'$, μ' und μ. Die Subtraction dieser Zahlen von den vorhergehenden liefert wie vorher die Grade der Bedingung der Berührung in den Coefficienten von U und V respective gleich $\mu' (2\mu + \mu' - 3)$ und $\mu (2\mu' + \mu - 3)$.

99. Evoluten. Nach den ausschliesslich projectivischen Sätzen, die wir bisher mitgetheilt haben, wollen wir die Untersuchung einiger Aufgaben anschliessen, die zur Classe der metrischen (Art. 1.) gehören. Die Beziehung der Rechtwinkligkeit gehört zu diesen, weil (vergl. „Kegelschn." Art. 419. u. a.) zwei zu einander rechtwinklige Gerade als Linien betrachtet werden müssen, deren Richtungen mit den nicht reellen Kreispunkten im Unendlichen eine harmonische Gruppe bilden. Einige wichtige Fälle von Enveloppen, welche die Relation der Rechtwinkligkeit voraussetzen, sind hier nicht auszuschliessen und es ist zu bemerken, dass die bezüglichen Sätze projectivisch werden, wenn wir für die Kreispunkte im Unendlichen zwei beliebig gewählte Punkte I, J und statt zu einander rechtwinkliger Geraden solche setzen, welche von diesen harmonisch getrennt werden.

Eine der wichtigsten und die am frühesten untersuchte Classe von Enveloppen bilden die Evoluten der Curven. Die Evolute einer Curve ist („Kegelschnitte" Art. 256.) als Ort der Krümmungscentra der Curve definiert worden, sie kann aber auch als die Enveloppe aller Normalen der Curve aufgefasst werden. Denn der Krümmungskreis ist der durch drei aufeinander folgende Punkte der Curve gehende Kreis und sein Centrum also der Schnittpunkt der in den Mittelpunkten der Seiten des von ihm gebildeten Dreiecks auf ihnen errichteten Perpendikel, das Krümmungscentrum ist also auch, weil die Verbindungslinien des ersten und zweiten und des zweiten und dritten Punktes zwei auf einander folgende Tangenten sind, der Schnittpunkt von zwei auf einander folgenden Normalen und sein Ort muss also die Enveloppe aller Normalen sein.

Beispiel 1. Die Evolute von $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zu finden. Die

Normale ist („Kegelschnitte" Art. 180.) $\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2$, oder für $x' = a\cos\varphi$, $y' = b\sin\varphi$ $\frac{a\,x}{\cos\varphi} - \frac{b\,y}{\sin\varphi} = c^2$, eine Gleichung von der im Beisp. 2. des Art. 85. betrachteten Classe, deren Enveloppe daher dargestellt wird durch

$$a^{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\,y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Beispiel 2. Die Normale der Parabel ist („Kegelschnitte" Art. 221.)

$p\,(y - y') + 2y'\,(x - x') = 0$ oder $2y'^3 + (p^2 - 2px)\,y' - p^2y = 0$, eine Gleichung von der im Beisp. 1. des Art. 85. betrachteten Classe, deren Enveloppe für y' als Parameter ist

$$2\,(p - 2x)^3 + 27py^2 = 0.$$

Beispiel 3. Berechne die Evolute der semicubischen Parabel $py^2 = x^3$. Die Gleichung der Normale ist

$$3\,x'^2\,(y - y') + 2py'\,(x - x') = 0$$

und die Substitution des Werthes von y' nach der Gleichung der Curve giebt für $x'^{1/2} = t$ und Division mit $x'^{\frac{3}{2}}$ die Gleichung

$$3\,t^4 + 2\,pt^2 - 3p^{\frac{1}{2}}yt - 2px = 0,$$

deren Enveloppe ist

$$p\,(p - 18x)^3 = (54px + \frac{729}{16}\,y^2 + p^2)^2.$$

Beispiel 4. Man bestimme die Evolute der cubischen Parabel $p^2y = x^3$. Die Gleichung der Normale ist

$3x'^2\,(y - y') + p^2\,(x - x') = 0$ oder $3x'^5 - 3p^2yx'^2 + p^4x' - p^4x = 0$.

Die Enveloppe von

$$at^5 + 10\,dt^2 + 5\,et + f = 0$$

ist aber

$$(cf^2 - 12\,d^2e)^2 + 128\,(2\,c^2 - 3\,df)\,(a\,e^3 - a\,d\,e\,f - 9\,d^4) = 0;$$

also im vorliegenden Falle

$$3p^2\left(x^2 - \frac{9}{125}\,y^2\right)^2 + \frac{128}{125}\left(\frac{2}{5}\,p^2 - \frac{9}{2}\,xy\right)\left(\frac{1}{5}\,p^4 - \frac{3}{2}\,p^2xy - \frac{243}{400}\,y^4\right) = 0.$$

Beispiel 5. Man soll die Evolute der Cissoide $(x^2 + y^2)\,x = ay^2$ berechnen. Die Cissoide ist eine Curve vom Geschlecht Null und wenn man ihre Gleichung in der Form $(a - x)\,y^2 = x^3$ schreibt, so erhellt, dass die Werthe $x = \frac{a}{1 + \theta^2}$, $y = \frac{a}{\theta\,(1 + \theta^2)}$ ihr genügen. Die Gleichung der Tangente im fraglichen Punkt findet man $2\theta^3y - 3\,\theta^2x + a - x = 0$ und daher die der Normale

$$2\,\theta^3x + (1 + 3\,\theta^2)\,y = \frac{a\,(1 + 2\,\theta^2)}{\theta}$$

oder

$$2\,\theta^4x + 3\,\theta^3y - 2\,\theta^2a + \theta y - a = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung enthält den Factor $(x + \frac{1}{2}a)^2 + y^2$

und der übrig bleibende Factor giebt die Gleichung der Evolute in der Form

$$y^4 + \frac{32}{3} a^2 y^2 + \frac{512}{27} a^3 x = 0.$$

Beispiel 6. Die Evolute von $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ zu bestimmen. Für jeden Punkt dieser Curve können wir schreiben (vergl. Art. 85., Beisp. 2.)

$$x' = a \cos^3\varphi, \; y' = a \sin^3\varphi;$$

die Tangente in diesem Punkte ist $\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = a$ und die Normale also $x \cos\varphi - y \sin\varphi = a \cos 2\varphi$ oder

$$(x + y)(\cos\varphi - \sin\varphi) + (x - y)(\cos\varphi + \sin\varphi) = 2a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

oder

$$\frac{x + y}{\sin(\varphi + 45^0)} + \frac{x - y}{\cos(\varphi + 45^0)} = 2^{\frac{3}{2}} a,$$

deren Enveloppe nach Art. 85., 2. durch

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$

ausgedrückt wird.

100. Die folgende Untersuchung führt zu den in der Differentialrechnung üblichen Ausdrücken für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Radius der Krümmung — natürlich rectanguläre Cartesische Coordinaten vorausgesetzt. Sind α und β die Coordinaten eines Punktes der Tangente, x, y die des bezüglichen Berührungspunktes, so ist die Gleichung der Tangente

$$\beta - y = \frac{dy}{dx}(\alpha - x),$$

wo $\frac{dy}{dx}$ oder, wie wir es abkürzen wollen, p aus der Gleichung der Curve zu bestimmen ist; denn die Tangente geht durch den Punkt x, y und macht mit der Axe der x einen Winkel von der trigonometrischen Tangente p (Art. 48.). Die Normale als das durch den Punkt x, y zu dieser Geraden gehende Perpendikel hat die Gleichung

$$(\alpha - x) + p(\beta - y) = 0. \qquad 1)$$

Die Enveloppe dieser Geraden mit dem Parameter x und dem durch x mittelst der Gleichung der Curve ausgedrückten y ist zu finden. Die Differentiation nach x und die dabei brauchbare Abkürzung $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ zeigt, dass der Berührungspunkt der Geraden mit ihrer Enveloppe durch Combination mit ihrem Differential

$$-1 - p^2 + (\beta - y)\, q = 0 \qquad 2)$$

gefunden wird. Aus diesen beiden Gleichungen finden wir durch Auflösung die Werthe

$$\alpha - x = \frac{-p\,(1 + p^2)}{q}, \qquad \beta - y = \frac{1 + p^2}{q},$$

und den Krümmungsradius

$$R = \sqrt{\{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2\}} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Die für den Durchschnittspunkt der benachbarten Normalen gefundenen Werthe ergeben sich für denselben Punkt, wenn man ihn als Krümmungsmittelpunkt betrachtet. Ist dann

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

die Gleichung des Kreises, so giebt die zweimalige Differentiation

$$(x - \alpha) + (y - \beta)\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta)\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Wenn aber der Kreis die Curve osculiert, so haben (Art. 49.) im Berührungspunkte $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ dieselben Werthe; wir können daher in diesen Gleichungen für die Differentialquotienten die aus der Gleichung der Curve erhaltenen p und q substituieren und finden sie dann mit den aus der andern Auffassung hervorgehenden Gleichungen 1) und 2) identisch.

101. Weil y sehr selten als Function von x explicite gegeben ist, vielmehr beide in einer Gleichung $U = 0$ verbunden erscheinen, so ist es nothwendig für diese Ausdrücke in p und q solche in den Differentialen von U zu bilden; setzen wir wie vorher schon

$$\frac{dU}{dx} = U_1, \quad \frac{dU}{dy} = U_2;$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = U_{11}, \quad \frac{d^2U}{dy^2} = U_{22}, \quad \frac{d^2U}{dx\,dy} = U_{12},$$

so wird, weil in der Gleichung der Tangente U_1 und U_2 die Coefficienten von x und y sind, die Gleichung der Normale

$$U_2\,(\alpha - x) - U_1\,(\beta - y) = 0, \qquad 1)$$

also durch Differentiation

$$\left(U_{12} + U_{22}\,\frac{dy}{dx}\right)(\alpha - x) - \left(U_{11} + U_{12}\,\frac{dy}{dx}\right)(\beta - y)$$
$$- U_2 + U_1\,\frac{dy}{dx} = 0;$$

aus der Gleichung der Curve folgt $U_1 + U_2 \frac{dy}{dx} = 0$, also durch Substitution für $\frac{dy}{dx}$

$$(U_1 U_{22} - U_2 U_{12})(\alpha - x) - (U_1 U_{12} - U_2 U_{11})(\beta - y) \\ + U_1^2 + U_2^2 = 0. \qquad 2)$$

Die Auflösung der Gleichungen 1) und 2) giebt

$$\alpha - x = \frac{-U_1 (U_1^2 + U_2^2)}{U_{11} U_2^2 - 2 U_{12} U_1 U_2 + U_{22} U_1^2},$$

$$\beta - y = \frac{-U_2 (U_1^2 + U_2^2)}{U_{11} U_2^2 - 2 U_{12} U_1 U_2 + U_{22} U_1^2}$$

und somit

$$R = \frac{\pm (U_1^2 + U_2^2)^{\frac{3}{2}}}{U_{11} U_2^2 - 2 U_{12} U_1 U_2 + U_{22} U_1^2}.$$

102. Durch Einführung der Lineareinheit z oder Uebergang zur homogenen Gleichungsform können diese Ausdrücke in mehr symmetrische Formen gebracht werden. Denn das Theorem von den homogenen Functionen giebt

$$(n-1) U_1 = U_{11} x + U_{12} y + U_{13} z,$$
$$(n-1) U_2 = U_{12} x + U_{22} y + U_{23} z,$$
$$(n-1) U_3 = U_{13} x + U_{23} y + U_{33} z;$$

also auch

$$(n-1)(U_{22} U_1 - U_{12} U_2) \\ = (U_{11} U_{22} - U_{12}^2) x + (U_{22} U_{13} - U_{23} U_{12}) z,$$
$$(n-1)(U_{11} U_2 - U_{12} U_1) \\ = (U_{11} U_{22} - U_{12}^2) y + (U_{11} U_{23} - U_{12} U_{13}) z.$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen mit U_1 und die zweite mit U_2 multiplicieren und die Producte addieren, so erhalten wir

$$(n-1)(U_{22} U_1^2 - 2 U_{12} U_1 U_2 + U_{11} U_2^2) \\ = (U_{11} U_{22} - U_{12}^2)(x U_1 + y U_2) \\ + z \{(U_{22} U_{13} - U_{12} U_{23}) U_1 + (U_{11} U_{23} - U_{12} U_{13}) U_2\}$$

und weiter, weil nach der Gleichung der Curve

$$x U_1 + y U_2 + z U_3 = 0$$

ist,

$$= -z \{(U_{12} U_{23} - U_{22} U_{13}) U_1 + (U_{12} U_{13} - U_{11} U_{23}) U_2 \\ + (U_{11} U_{22} - U_{12}^2) U_3\}.$$

Durch Substitution der oben für U_1, U_2, U_3 gegebenen Werthe erhalten wir endlich

$$(n-1)^2 (U_{22} U_1^2 - 2 U_{12} U_1 U_2 + U_{11} U_2^2)$$
$$= - z^2 (U_{11} U_{22} U_{33} + 2 U_{23} U_{13} U_{12}$$
$$- U_{11} U_{23}^2 - U_{22} U_{13}^2 - U_{33} U_{12}^2) = - H z^2,$$

so dass der Ausdruck des Krümmungsradius in

$$R = \pm \frac{(n-1)^2 (U_1^2 + U_2^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2 H}$$

übergeht. Für jeden Punkt der Curve, dessen Coordinaten die Gleichung $H = 0$ erfüllen, wird der Krümmungsradius unendlich und der Krümmungsmittelpunkt liegt in unendlicher Ferne. Da diess nur stattfinden kann, wo drei aufeinander folgende Punkte der Curve in einer Geraden liegen, so kommt man aus dem Werthe des Krümmungsradius unabhängig von Art. 74. zu dem Schlusse, dass die Durchschnittspunkte der Curven $U = 0$ und $H = 0$ Inflexionspunkte sind.

Das doppelte Zeichen im Ausdruck des Krümmungsradius ist ganz entsprechend dem, das im Werthe der Entfernung eines Punktes von einer Geraden auftritt (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 34.); wenn wir übereinkommen, das Zeichen $+$ zu brauchen, wenn der Krümmungsradius und daher die Concavität der Curve in einem bestimmten Sinne liegt, so müssen wir das Zeichen $-$ wählen, wenn sie im entgegengesetzten Sinne liegen. Da jede algebraische Function beim Durchgange durch den Werth Null ihr Zeichen wechselt, so verändert in einem Inflexionspunkt der Krümmungsradius sein Zeichen und die Curve geht aus Concavität in Convexität über und umgekehrt. In einem Doppelpunkt nimmt der Ausdruck des Krümmungsradius die Form $\frac{0}{0}$ an und sein Werth muss nach den für solche Fälle geltenden gewöhnlichen Regeln bestimmt werden; in der That hat jeder Zweig der Curve in diesem Punkte seine eigene Krümmung. Für eine Spitze findet man den Werth des Krümmungsradius gleich Null.

103. Die Länge eines Bogens der Evolute ist gleich der Differenz der Krümmungsradien in seinen Endpunkten. Denn wenn wir irgend drei auf einander folgende Normalen der Curve ziehen und den Durch-

schnittspunkt der beiden ersten C, den der zweiten und dritten C' nennen, so ist wegen

$$CR = CS,\ C'S = C'T$$

das Element CC', das Wachsthum des Bogens der Evolute, gleich dem des Krümmungshalbmessers. Wenn man also einen biegsamen aber nicht dehnbaren auf die Evolute aufgewundenen Drath von derselben abwindet, so beschreibt jeder Punkt des Letzteren eine Involute derselben, d. h. eine Curve, von welcher CC' die Evolute ist. Unter diesem Gesichtspunkte hat Huyghens, der Erfinder der Evoluten, sie zuerst betrachtet und ihnen den Namen gegeben.

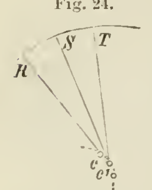


Fig. 24.

104. Wir geben hier eine zur Bestimmung des Krümmungsradius für eine durch ihre Gleichung in Polarcoordinaten gegebene Curve oft nützliche Formel. Die Polargleichung $\varrho = f(\omega)$ kann in die Form $\varrho = f(p)$ übergeführt werden, wo p die Normale vom Pol auf die Tangente und durch die Gleichungen bestimmt ist (Art. 95.)

$$p = \varrho \sin\theta,\ \tan\theta = \varrho \frac{d\omega}{dp}.$$

Ist dann ϱ_1 die Entfernung des Krümmungscentrums vom Pol und R der Krümmungsradius, so hat man

$$\varrho_1{}^2 = \varrho^2 + R^2 - 2\,Rp.$$

Gehen wir zum nächstfolgenden Punkte der Curve über, so bleiben ϱ_1 und R constant und durch Differentiation ergiebt sich

$$R = \varrho \frac{d\varrho}{dp},$$

der bezeichnete Ausdruck für den Krümmungsradius.

Wenn in dieser Weise R in Function von ϱ und p ausgedrückt ist, so können wir zwischen

$$\varrho = f(p),\quad \varrho_1{}^2 = \varrho^2 + R^2 - 2\,Rp$$

und der offenbar richtigen Gleichung $p_1{}^2 = \varrho^2 - p^2$ die Grössen ϱ und p eliminieren und eine Relation zwischen dem ϱ_1 und p_1 der Evolute bilden; aber es ist nicht immer leicht, zu der Relation zu gelangen, welche zwischen dem ϱ_1 und ω_1 der Evolute besteht.

Als ein Beispiel wählen wir die Curve $\varrho^m = a^m \cos m\omega$;

wir finden $p = \varrho \cos m\omega$ und also $\varrho^{m+1} = a^m p$ als die Relation zwischen ϱ und p. Dann folgt

$$R = \frac{\varrho^2}{(m+1)p} = \frac{a^m}{(m+1)\varrho^{m-1}}$$

für den Krümmungsradius.

Die Gleichungen

$$\varrho_1^2 = \varrho^2 + R^2 - 2Rp, \quad p_1^2 = \varrho^2 - p^2$$

geben die Grössen ϱ_1^2, p_1^2 als Functionen von ϱ und somit die Gleichung der Evolute in der Form $\varrho_1 = \varphi(p_1)$, ohne dass jedoch die Elimination wirklich vollzogen werden kann.

Man kann aber leicht die Gleichung der Reciprocalcurve der Evolute in Bezug auf einen um den Pol als Centrum beschriebenen Kreis finden. Sei der Radius dieses Kreises gleich a, und ϱ_2 der Radiusvector der Reciprocalcurve, ω_2 die Neigung desselben zu einer gegen die Nulllinie der ω rechtwinkligen Geraden, so ist $p_1 = \varrho \sin m\omega$ und dann

$$\varrho_2 = \frac{a^2}{p_1}, = \frac{a}{\cos^{\frac{1}{m}} m\omega \sin m\omega}.$$

Nach Art. 95. ist ferner $\omega_2 = (m+1)\omega$ und somit die Relation zwischen ϱ_2, ω_2, die Gleichung der Reciproken der Evolute

$$\varrho_2^m \cos\frac{m\omega_2}{m+1} \sin^m\frac{m\omega_2}{m+1} = a^m.$$

Man erkennt leicht, dass der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 200.) einer Curve die Reciproke von der Evolute der Reciprocalcurve ist. So ist dieser Ort eine gerade Linie für die Focalkegelschnitte, weil die Evolute der Reciproken sich dann auf einen Punkt reduciert.

105. Aus der Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten $u = 0$ können wir direct die Liniencoordinaten der Normale und die entsprechende Gleichung der Evolute bilden. Denn wenn die ξ_i' die Liniencoordinaten einer Tangente sind, so ist

$$\xi_1 \frac{du'}{d\xi_1'} + \xi_2 \frac{du'}{d\xi_2'} + \xi_3 \frac{du'}{d\xi_3'} = 0$$

die Gleichung des Berührungspunktes; und wenn $v = 0$ die Gleichung eines Punktepaares I, J in Liniencoordinaten re-

präsentiert, so ist die Gleichung des Pols der gegebenen Tangente in Bezug auf sie, d. h. des conjugiert harmonischen Punktes vom Schnitte der Tangente mit der Geraden IJ in Bezug auf I und J

$$\xi_1 \frac{dv'}{d\xi_1'} + \xi_2 \frac{dv'}{d\xi_2'} + \xi_3 \frac{dv'}{d\xi_3'} = 0.$$

Sind I, J die Kreispunkte im Unendlichen, so repräsentiert die letzte Gleichung die Richtung der Normale. Beide Gleichungen zusammen bestimmen in jedem Falle die Liniencoordinaten derselben und wir bilden die Gleichung der Evolute, indem wir die ξ_i' zwischen ihnen und der Gleichung der Curve eliminieren. In dem System der Plücker'schen Liniencoordinaten, welches den gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten entspricht, ist die Gleichung der Kreispunkte $\xi^2 + \eta^2 = 0$ (vergl. „Kegelschnitte" Art. 177, 1.) und die zweite Gleichung $\xi_1 \frac{dv'}{d\xi_1'} + \cdots = 0$ wird zur wohlbekannten Bedingung der Rechtwinkligkeit $\xi\xi' + \eta\eta' = 0$.

Beispiel. Die Gleichung der Evolute des durch seine Gleichung in Liniencoordinaten $a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = 1$ gegebenen Centralkegelschnitts zu entwickeln. Die Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten der Normale sind in diesem Falle

$$a^2\xi\xi' + b^2\eta\eta' = 1, \quad \xi\xi' + \eta\eta' = 0, \quad \text{also } \xi\xi' = -\eta\eta' = \frac{1}{c^2}.$$

Substituiert man die Werthe für ξ' und η' in $a^2\xi'^2 + b^2\eta'^2 = 1$, so erhält man die Liniencoordinatengleichung der Evolute

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{b^2}{\eta^2} = c^4.$$

106. Wir geben einige Beispiele von der Behandlung des allgemeineren Problems, in welchem das von der Evolute eingeschlossen ist, nämlich von der Bestimmung der Enveloppe des aus dem Berührungspunkte ausgehenden, zur Tangente conjugiert, in Bezug auf zwei feste Punkte I, J harmonischen Strahls. (Art. 99.) Wir wollen jenen Strahl die Quasi-Normale und ihre Enveloppe die Quasi-Evolute nennen.

Beispiel 1. Die Curve sei ein Kegelschnitt und werde auf ein Fundamentaldreieck mit der Basis IJ bezogen, dessen dritte Ecke ihr Pol im Kegelschnitt ist, so dass seine Gleichung von der Form

$$(ax_1 + x_2)(x_1 + bx_2) = x_3^2$$

und die Gleichung einer Tangente

$$\theta^2(ax_1 + x_2) - 2\theta x_3 + (x_1 + bx_2) = 0$$

ist. Dann ist die Gleichung der zu dieser Geraden in Bezug auf

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

harmonisch conjugierten Linie von der Form

$$\theta^2 (a x_1 - x_2) + (x_1 - b x_2) = M x_3$$

und M wird durch die Bemerkung bestimmt, dass die Gerade den Berührungspunkt enthalte, für welchen

$$\theta (a x_1 + x_2) = x_3, \quad \theta x_3 = x_1 + b x_2$$

ist; denn es folgen

$$x_1 = \frac{x_3 (b - \theta^2)}{\theta (a b - 1)}, \quad x_2 = \frac{x_3 (a \theta^2 - 1)}{\theta (a b - 1)}$$

und daraus

$$M = \frac{2 (b - a \theta^4)}{(a b - 1) \theta}.$$

Wenn wir nun

$$a x_1 - x_2 = X_2, \quad x_1 - b x_2 = X_1, \quad 8 x_3 = (a b - 1) X_3$$

setzen, so wird die Gleichung der Quasinormale

$$a \theta^4 X_3 + 4 \theta^3 X_2 + 4 \theta X_1 - b X_3 = 0$$

und ihre Enveloppe ist also eine Curve vierter Classe von der Gleichung

$$(a b X_3^2 + 4 X_1 X_2)^3 + 27 X_3^2 (a X_1^2 - b X_2^2)^2 = 0;$$

die Ordnungszahl der Curve ist also sechs, sie hat die Punkte

$$X_1 = X_3 = 0, \; X_2 = X_3 = 0$$

zu Spitzen mit der gemeinsamen Tangente $X_3 = 0$, und enthält ausserdem vier andere Spitzen in den Schnittpunkten von

$$a b X_3^2 + 4 X_1 X_2 = 0, \qquad a X_1^2 - b X_2^2 = 0.$$

Beispiel 2. Der Kegelschnitt gehe durch einen der Punkte I, J oder sei semicircular. Dann ist $b = 0$ und $x_1 = x_3 = 0$ ist in der Curve, $x_1 = 0$ die bezügliche Tangente derselben. Die Gleichung der Quasi-Normale ist dann

$$a \theta^3 X_3 + 4 \theta^2 X_2 + 4 X_1 = 0,$$

die Enveloppe nur von der dritten Classe; ihre Gleichung

$$4 X_2^3 + 27 a X_1 X_3^2 = 0$$

zeigt sie als eine Curve dritter Ordnung, mit $X_1 = X_3 = 0$ als Spitze und $X_1 = X_2 = 0$ als Inflexionspunkt.

Wenn die Curve durch I und J hindurchgeht, so werden a und b gleich Null und wir sehen, dass die Gleichung der Quasi-Normale sich auf $\theta^2 X_2 + X_1 = 0$ reduciert, dass also diese Linie durch einen festen Punkt, den Schnitt von $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, der Tangenten der Curve in I, J respective, hindurchgeht.

Beispiel 3. Der Kegelschnitt berühre die Gerade IJ. Wir wählen diese und die beiden andern Tangenten des Kegelschnitts durch die Punkte I, J zu den Fundamentallinien, so dass

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 x_2 x_3 - 2 x_3 x_1 - 2 x_1 x_2 = 0$$

oder

$$x_3 (2 x_1 + 2 x_2 - x_3) = (x_1 - x_2)^2$$

die Gleichung des Kegelschnitts ist. Die Gleichung der Tangente desselben ist dann

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2\theta(x_1 - x_2) + \theta^2 x_3 = 0$$

und für den Berührungspunkt ist

$$x_1 - x_2 = \theta x_3, \qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 = \theta^2 x_3.$$

Die Gleichung der Quasi-Normale ist also

$$(x_1 - x_2) - \theta(x_1 + x_2) = x_3 \left\{\theta - \tfrac{1}{2}\theta(1 + \theta^2)\right\}$$

oder

$$\theta^3 x_3 - \theta(2x_1 + 2x_2 + x_3) + 2(x_1 - x_2) = 0,$$

ihre Enveloppe also von der dritten Classe; es ist die Curve dritter Ordnung mit Spitze

$$27x_3(x_1 - x_2)^2 = (2x_1 + 2x_2 + x_3)^3.$$

Beispiel 4. Die vorigen Beispiele können auch in der Voraussetzung behandelt werden, dass der Kegelschnitt durch die allgemeine Gleichung gegeben ist. Die Tangente im Punkte x_i' ist

$$(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')x_1 + (a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')x_2 \\ + (a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3')x_3 = 0,$$

und die Quasi-Normale

$$x_3'\left\{(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')x_1 - (a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')x_2\right\} \\ = (a_{11}x_1'^2 - a_{22}x_2'^2 + a_{13}x_1'x_3' - a_{23}x_2'x_3')x_3;$$

es ist also die Enveloppe von

$$a_{11}x_3x_1'^2 - a_{22}x_3x_2'^2 + (a_{23}x_2 - a_{13}x_1)x_3'^2 \\ + (a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{12}x_1)x_2'x_3' + (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - a_{11}x_1)x_1'x_3' = 0$$

zu bestimmen, wenn die Parameter x_i' durch die Bedingung

$$a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{23}x_2'x_3' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{12}x_1'x_2' = 0$$

verbunden sind. Nach Art. 96. wird die Enveloppe durch denselben Prozess erhalten, der zur Ermittelung der Bedingung dient, unter welcher zwei Kegelschnitte sich berühren („Kegelschnitte" Art. 348.). Wir bilden die Invarianten dieses Systems von quadratischen Formen. Die Discriminante der ersten ist $2x_3S$ mit

$$S = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2) + (a_{22}a_{13}^2 - a_{11}a_{23})x_3^2 \\ + 2a_{22}(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})x_2x_3 - 2a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_1x_3;$$

die der zweiten Δ; sodann

$$\Theta = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}x_1^2 - 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) \\ + (3a_{11}a_{23}^2 + 3a_{22}a_{13}^2 - 4a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{23}a_{13}a_{12})x_3^2 \\ + (4a_{22}a_{13}a_{12} - 2a_{11}a_{22}a_{23} - 2a_{23}a_{12}^2)x_2x_3 \\ + (4a_{11}a_{22}a_{23} - 2a_{11}a_{22}a_{23} - 2a_{13}a_{12}^2)x_1x_3;$$

$\Theta' = 0$. Die Gleichung der Enveloppe ist

$$27\Delta^2 S^2 x_3^2 = \Theta^3;$$

eine Curve sechster Ordnung mit sechs Spitzen, von denen zwei in $x_3 = 0$ liegen, d. h. in der Verbindungslinie der Punkte I, J. Setzen wir voraus, dass $x_3 = 0$ den Kegelschnitt berühre, so ist

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

und S und Θ nehmen die Formen x_3L und x_3M an, für L und M als

lineare Functionen der x_i; die Gleichung der Enveloppe geht in die Form $x_3 L^2 = M^3$ über und stellt eine Curve dritter Ordnung mit Spitze dar, für welche $x_3 = 0$ die stationäre Tangente ist. Lassen wir den Kegelschnitt ferner durch J oder $x_2 = x_3 = 0$ gehen, so wird $a_{11} = 0$, $S \equiv a_{22}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2$ und Θ von der Form

$$(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\, M.$$

Die Gleichung wird durch $(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^3$ theilbar und von der Form

$$x_3^2\,(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = M^3.$$

Wir bemerken, dass die Gerade $a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$ die Tangente des Kegelschnitts im Punkte J und dass sie eine Inflexionstangente der Enveloppe ist.

107. Im Allgemeinen ist nach Cayley's Bemerkung für

$$U_1\,x_1 + U_2\,x_2 + U_3\,x_3 = 0$$

als die Gleichung der Tangente im Punkte x_i' und für y_i, y_i^* als die Coordinaten der Punkte I, J die Gleichung der Quasi-Normale

$$(U_1\,y_1^* + U_2\,y_2^* + U_3\,y_3^*)\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix} + (U_1\,y_1 + U_2\,y_2 + U_3\,y_3)\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ y_1^*, & y_2^*, & y_3^* \end{vmatrix} = 0.$$

Denn die beiden Determinanten, die wir durch Δ, Δ^* abkürzend bezeichnen wollen, sind die linken Seiten der Gleichungen der vom Punkte x_i' nach I und J gehenden Geraden und es muss eine Identität von der Form

$$U_1\,x_1 + U_2\,x_2 + U_3\,x_3 \equiv A^*\Delta - A\,\Delta^*$$

bestehen, weil die Tangente durch ihren Schnittpunkt geht. Wenn wir in dieselbe nach einander für die x_i die y_i^* und die y_i substituieren, so ergeben sich die A^* und A als proportional zu

$$U_1\,y_1^* + U_2\,y_2^* + U_3\,y_3^* \quad \text{und} \quad U_1\,y_1 + U_2\,y_2 + U_3\,y_3$$

respective; die Gleichung der zur Tangente in Bezug auf $\Delta = 0$ und $\Delta^* = 0$ harmonisch conjugierten Graden ist somit von der obigen Form.

108. Wir wollen den Fall, wo einer der Punkte I, J, sagen wir y_i, in der Curve ist, näher untersuchen und setzen

der Einfachheit wegen seine Coordinaten gleich 1, 0, 0 respective, d. h. wir machen ihn zum Fundamentalpunkt

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Wir denken $x_3 = 0$ als die ihm entsprechende Tangente und beweisen zunächst, dass die Enveloppe der Quasi-Normale den Factor x_3 enthält. Setzen wir $y_2 = y_3 = 0$, so wird die vorige allgemeine Gleichung

$$(U_1 y_1^* + U_2 y_2^* + U_3 y_3^*)(x_2 x_3' - x_3 x_2')$$
$$+ U_1 \{y_1^* (x_2 x_3' - x_3 x_2') + y_2^* (x_3 x_1' - x_1 x_3')$$
$$+ y_3^* (x_1 x_2' - x_2 x_1')\} = 0.$$

Sind dann die x_i' in Function eines Parameters t gegeben, so dass der Punkt y_i dem Werthe $t = 0$ entspricht, so müssen wir t als einen Factor im Ausdruck für x_2' und t^2 als Factor im Ausdruck für x_3' haben, damit die Gleichung der Tangente sich auf $x_3 = 0$ reduciere.

Die Gleichung der Tangente als der Verbindungslinie von x_i' mit $x_i' + dx_i'$ ist allgemein

$$x_1 (x_2' dx_3' - x_3' dx_2') + x_2 (x_3' dx_1' - x_1' dx_3')$$
$$+ x_3 (x_1' dx_2' - x_2' dx_1') = 0$$

oder

$$U_1 x_1 + \cdots = 0,$$

so dass t ein Factor in U_2 und t^2 in U_1 ist. Ordnet man also die Gleichung der Quasi-Normale nach Potenzen von t, so ergiebt sich, dass sie kein von t unabhängiges Glied enthält, und dass x_3 als Factor in den Coefficienten von t und von t^2 auftritt. Die Discriminante einer Function

$$A + Bt + Ct^2 + \cdots$$

ist aber von der Form $A\varphi + B^2\psi$ (vergl. „Vorlesungen“ Art. 68.) und ein in A und B vorkommender Factor ist daher ein Factor der Discriminante; setzen wir in der Discriminante $B = 0$, so ist der Rest von der Form

$$A (A\varphi + C^3\psi)$$

woraus man erkennt, dass die Enveloppe die Gerade $x_3 = 0$ zur Inflexionstangente hat. (Vergl. Art. 99. Beisp. 4.)

109. Die Beziehung der Rechtwinkligkeit kann noch weiter dadurch verallgemeinert werden, dass man statt der Punkte I, J einen festen Kegelschnitt substituiert, in Bezug

auf welchen die quasi-rectangulären Geraden conjugiert sind, so dass die eine derselben durch den Pol der andern geht. Die Quasi-Normale ist dann die Gerade, welche vom Berührungspunkt in der Curve nach dem in Bezug auf einen festen Kegelschnitt genommenen Pol der Tangente geht, oder die Gerade, welche den Punkt der Curve mit dem entsprechenden Punkt ihrer reciproken Polare in Bezug auf den festen Kegelschnitt verbindet. Die Curve und ihre Reciproke haben also dieselben Quasi-Normalen. Für

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

als die Gleichung des festen Kegelschnitts sind die Coordinaten des Pols der Tangente einer Curve U_1, U_2, U_3 und die Gleichung der entsprechenden Quasi-Normale in diesem Sinne ist

$$x_1 (U_2 x_3' - U_3 x_2') + x_2 (U_3 x_1' - U_1 x_3') \\ + x_3 (U_1 x_2' - U_2 x_1') = 0.$$

Ist die Curve ein Kegelschnitt, so ist diese Gleichung in den x_i' vom zweiten Grade und die Enveloppe wird wie in Beisp. 4, Art. 106. gefunden.

110. Die folgenden Bemerkungen dienen als Vorbereitungen für die Untersuchung der Charactere der Evolute einer beliebigen Curve. Die Normale in einem unendlich fernen Punkte einer Curve fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen. Wir knüpfen diess an die Erweiterung des Art. 105. für den Begriff der Normale an, nach welcher sie für den Curvenpunkt P mit der Tangente PM, welche die gerade Verbindungslinie der festen Punkte I, J in M schneidet, der nach dem zu M in Bezug auf $I\,J$ harmonisch conjugierten Punkte M' gehende Strahl PM' ist. Diese Construction zeigt, dass für P als einen Punkt der Curve in der Geraden IJ diese Gerade PM' mit dieser Linie selbst zusammenfällt. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn P mit einem der Punkte I, J selbst zusammenfällt, den also die Curve enthält; dann fallen auch M und M' zusammen und die Normale deckt sich mit der Tangente (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 363.); d. h. wenn die Curve durch einen der unendlich fernen Kreis-

punkte geht, so fällt die betreffende Normale mit der Tangente zusammen.

111. Wir wollen nun zuerst die Classe der Evolute einer gegebenen Curve bestimmen, d. h. die Zahl von Normalen der Curve oder Tangenten der Evolute, welche durch einen gegebenen Punkt gehen. Die Zahl der Normalen ist als unabhängig von der Lage des Punktes anzusehen und es ist daher erlaubt, statt des allgemeinen Falles den speciellen des unendlich fernen Punktes zu untersuchen. Die Zahl der von der unendlich fernen Geraden selbst verschiedenen Normalen der Curve, die aus einem unendlich fernen Punkte d. i. in gegebener Richtung gehen, ist aber der Zahl der Tangenten der Curve gleich, welche die zu dieser normale Richtung haben, d. h. gleich der Classe ν der Curve. Ueberdiess fallen nach dem letzten Artikel die μ Normalen der Curve in ihren unendlich fernen Punkten mit der unendlich fernen Geraden selbst zusammen und gehen also auch durch den angenommenen Punkt. Es ist somit die Zahl der Normalen einer Curve, welche von irgend einem Punkte ausgehen, gleich der Summe aus der Ordnungs- und Classenzahl der Curve oder gleich der Summe der Ordnungszahlen der Curve und ihrer Reciproken. Wenn die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Curve ist, so wird die Zahl der im Endlichen liegenden Tangenten von einer bestimmten Richtung und also auch die Zahl der Normalen um Eins kleiner als im allgemeinen Falle. So gehen von einem Punkte im Allgemeinen vier Normalen an einen Kegelschnitt, aber nur drei an eine Parabel. Geht die Curve durch einen der Kreispunkte, so lehrt Art. 110., dass die Normale derselben in diesem Punkte nicht in die unendlich ferne Gerade fällt, und wir müssen daher schliessen, dass die Zahl der Normalen für jeden Durchgang durch einen Kreispunkt um Eins vermindert wird. So wird im Falle des Kreises, des durch beide Punkte I, J gehenden Kegelschnitts, die Zahl der Normalen um zwei, d. h. auf zwei vermindert. Wenn also μ und ν Ordnung und Classe einer Curve sind, welche ε mal durch einen Kreispunkt geht und σ mal die unendlich ferne Gerade berührt, so ist die Classe ihrer Evolute $\nu' = \mu + \nu - \varepsilon - \sigma$. Dieselben Resultate

können auch aus der Bemerkung erhalten werden, dass die Gleichung der Normale

$$U_2 (\alpha - x) = U_1 (\beta - y)$$

für α, β als gegebene und x, y als variabele Grössen die Gleichung einer Curve μ^{ter} Ordnung giebt, deren Schnittpunkte mit der gegebenen Curve die Fusspunkte ihrer von α, β ausgehenden Normalen bestimmen. Hat die Curve keine vielfachen Punkte, so ist die Zahl der Schnittpunkte offenbar μ^2 d. h. $\mu + \nu$, und man zeigt ohne Schwierigkeit, dass im allgemeinen Falle für δ Doppelpunkte und $\varkappa$ Spitzen diese Zahl auf $\mu^2 - 2\delta - 3\varkappa$ oder $\mu + \nu$ kommt.

112. Wir untersuchen ferner die Ordnung der Evolute und zwar, indem wir die Zahl ihrer unendlich fernen Punkte bestimmen. Wenn aber zwei auf einander folgende Normalen der Originalcurve einander parallel sind, so fallen die entsprechenden Tangenten derselben zusammen, d. h. die unendlich fernen Punkte der Evolute entspringen im Allgemeinen aus den Inflexionspunkten der Curve (Art. 102.) Nach Art. 111. geben aber auch die unendlich fernen Punkte der Originalcurve ebenso vielen unendlich fernen Punkten der Evolute den Ursprung und wir bemerken jetzt, dass dieselben Spitzen in der Evolute sind, welche die unendlich ferne Gerade zur Tangente haben. Ist M ein Punkt der Geraden IJ und M' der ihm harmonisch zugeordnete, so war die der Normale in M entsprechende Linie IJ selbst; bezeichnen wir aber die beiden zu M nächstbenachbarten Punkte der Curve durch L und N, so sind ihre Normalen LM' und NM', d. h. durch den Punkt M' gehen drei auf einander folgende Tangenten der Evolute oder er ist eine Spitze derselben mit der Tangente IJ. Die μ unendlich fernen Punkte der gegebenen Curve bedingen also ebenso viele Spitzen der Evolute, für welche die unendlich ferne Gerade die gemeinsame Tangente ist, d. h. sie bedingen 3μ unendlich ferne Punkte der Evolute. Rechnen wir sie mit den vorher gefundenen zusammen, so finden wir die Ordnung der Evolute $= \iota + 3\mu$ oder die Zahl α des Art. 83. Wenn die Curve durch einen der Kreispunkte geht, so geben diese Punkte, wie wir sahen, keine unendlich fernen Punkte der Evolute und die Ordnung

derselben wird um drei Einheiten vermindert. Wenn die Gerade IJ die Curve berührt, so fallen die Normalen für die zwei aufeinander folgenden Punkte, in welchen sie die Curve trifft, mit IJ zusammen, d. h. zwei aufeinander folgende Tangenten der Evolute decken sich oder erzeugen einen Inflexionspunkt mit IJ als der entsprechenden Wendetangente. Da derselbe an Stelle zweier Spitzen tritt, welche entstehen würden, wenn IJ die Curve schnitte statt sie zu berühren, so wird die Ordnung der Evolute um drei Einheiten vermindert; wenn wir also ε und σ in dem Sinne des vorigen Artikels brauchen, so erhalten wir für die Ordnungszahl der Evolute $\mu' = \alpha - 3(\varepsilon + \sigma)$.

Diese Ergebnisse erfahren Modificationen, wenn einer der Punkte I, J vielfach mit zwei oder mehreren zusammenfallenden Tangenten ist; für eine Spitze in einem derselben z. B. ist die Verminderung der Ordnungszahl nicht sechs sondern vier. Die allgemeinen Werthe zeigen, dass Ordnung und Classe der Evolute einer Curve und der Evolute ihrer Reciprocalcurve übereinstimmen, wie Art. 109. erwarten lässt.

113. Im Allgemeinen giebt es keine Inflexionspunkte in der Evolute; denn für einen solchen müssten zwei aufeinander folgende Tangenten der Evolute oder Normalen der Curve zusammenfallen, was nach der Natur der Construction nur möglich ist, wenn die entsprechenden Tangenten mit ihren Normalen und mit einander zusammenfallen, d. h. in dem sehr speciellen Falle, wo eine Inflexionstangente der Originalcurve durch I oder J geht.

Wenn aber die Gerade IJ von der Curve berührt wird, so sahen wir in Art. 112., dass dem ein Inflexionspunkt im Unendlichen entspringt und wenn die Curve durch I oder J hindurch geht, im Art. 108., dass die Evolute eine durch denselben Punkt gehende Inflexionstangente hat. Damit haben wir Bedingungen genug zur Bestimmung aller Charactere der Evolute; sie sind

$$\mu' = \alpha - 3(\varepsilon + \sigma), \quad \nu' = \mu + \nu - (\varepsilon + \sigma), \quad \iota' = \varepsilon + \sigma;$$
$$\varkappa' = 3\alpha - 3(\mu + \nu) - 5(\varepsilon + \sigma), \quad \alpha' = 3\alpha - 8(\varepsilon + \sigma),$$

die letzten beiden nach den Plücker'schen Formeln aus den drei ersten. Wir können ebenso die Zahl der Doppelpunkte

und Doppeltangenten der Evolute bestimmen, welche letzteren offenbar Doppelnormalen der Originalcurve sind.

Der Defect oder das Geschlecht der Evolute (Art. 44.) stimmt mit dem der Originalcurve überein, wie man nach dem Ausdruck des Geschlechts

$$\tfrac{1}{2}\left\{\alpha - 2(\mu + \nu)\right\} + 1$$

leicht bestätigt. Wir wissen, dass das Geschlecht von zwei Curven im Allgemeinen dasselbe ist, wenn die eine von ihnen aus der andern so abgeleitet ist, dass jedem Punkte der einen Curve ein Punkt der andern entspricht und umgekehrt. (Art. 83.)

114. Die Anzahl der Spitzen der Evolute kann auch direct untersucht werden; denn eine Spitze derselben entsteht, wenn drei auf einander folgende Tangenten der Evolute oder Normalen der Originalcurve sich in einem Punkte schneiden oder mit andern Worten, wenn vier auf einander folgende Punkte derselben in einem Kreise liegen. Um die Bedingung zu finden, unter welcher diess stattfindet, verbinden wir die Gleichungen des Art. 101., nämlich

$$U_2(\alpha - x) = U_1(\beta - y),\quad (\alpha - x)(U_{12}U_2 - U_{22}U_1) - U_2^2 = (\beta - y)(U_{11}U_2 - U_{12}U_1) + U_1^2,$$

mit der durch nochmalige Differentiation entstehenden Gleichung

$$\begin{aligned}(\alpha-x)\left\{U_{112}U_2^2-2U_{221}U_1U_2+U_{222}U_1^2-(U_{11}U_{22}-U_{12}^2)U_2\right\}\\ -(\beta-y)\left\{U_{111}U_2^2-2U_{112}U_1U_2+U_{221}U_1^2-(U_{11}U_{22}-U_{12}^2)U_1\right\}\\ = 3U_1(U_{11}U_2 - U_{12}U_1) + 3U_2(U_{12}U_2 - U_{22}U_1).\end{aligned}$$

Die Substitution der aus den beiden ersten Gleichungen entspringenden Werthe für $(\alpha - x)$ und $(\beta - y)$ in die dritte giebt die fragliche Bedingung

$$\begin{aligned}(U_1^2+U_2^2)(U_{222}U_1^3-3U_{221}U_1^2U_2+3U_{112}U_1U_2^2-U_{111}U_2^3)\\ +3H(U_{11}U_2^2-2U_{12}U_1U_2+U_{22}U_1^2)\left\{(U_{11}-U_{22})U_1U_2\right.\\ \left.+U_{12}(U_2^2-U_1^2)\right\} = 0.\end{aligned}$$

Sie kann vereinfacht werden mittelst der Bemerkung (Art. 102.), dass

$$(n-1)^2(U_{11}U_2^2-2U_{12}U_1U_2+U_{22}U_1^2) = -Hz^2$$

ist; also durch Differentiation

$$(n-1)^2 \{(U_{111} U_2^2 - 2 U_{112} U_1 U_2 + U_{221} U_1^2) + 2 (U_{11} U_{22} - U_{12}^2) U_1\} = - z^2 \frac{dH}{dx} = - z^2 H_1,$$

$$(n-1)^2 \{(U_{112} U_2^2 - 2 U_{221} U_1 U_2 + U_{222} U_1^2) + 2 (U_{11} U_{22} - U_{12}^2) U_2\} = - z^2 \frac{dH}{dy} = - z^2 H_2,$$

und daher

$$(n-1)^2 \{ U_{111} U_2^3 - 3 U_{112} U_1 U_2^2 + 3 U_{221} U_1^2 U_2 - U_{222} U_1^3 \} = - z^2 (U_2 H_1 - U_1 H_2),$$

so dass die gefundene Bedingung durch Einsetzen die Form erhält

$$(U_1^2 + U_2^2)(U_2 H_1 - U_1 H_2) = 3 H \{(U_{11} - U_{22}) U_1 U_2 + U_{12} (U_2^2 - U_1^2)\}.$$

Da in dieser Gleichung H vom Grade $3(\mu - 2)$, U_1 und U_2 vom Grade $(\mu - 1)$ und die U_{ik} vom Grade $(\mu - 2)$ sind, so repräsentiert sie eine Curve von der Ordnung $(6\mu - 10)$, welche die gegebene Curve in den Punkten schneidet, in denen der osculierende Kreis eine Berührung dritter Ordnung mit ihr hat*). Wenn die Curve keine vielfachen Punkte hat, so erzeugen diese $\mu(6\mu - 10)$ Punkte mit den μ unendlich fernen Punkten zusammen $\mu(6\mu - 9)$ Spitzen der Evolute, was mit den vorigen Formeln übereinstimmt.

In analoger Weise können die Charactere der Evolute in dem allgemeinen Sinne des Wortes von Art. 109. untersucht werden und man findet, dass die gewonnenen Formeln anwendbar bleiben, wenn man nun mit ε die Zahl von Berührungen bezeichnet, welche die gegebene Curve mit dem festen Kegelschnitt hat, während eine dem σ entsprechende Singularität nicht mehr existiert.

115. Wir fügen als eine weitere Erläuterung zu der Theorie der Enveloppen Einiges von den Brennlinien oder Caustiken hinzu, deren Untersuchung obwohl durch die

---

*) Wir werden weiter hin die Frage nach den Kegelschnitten vollständiger untersuchen, welche mit einer Curve eine Berührung höherer Ordnung haben; dabei ergiebt sich eine Formel für die Abweichung der Krümmung der Curve von der Kreisform.

Optik angeregt doch ganz der Geometrie der Curven angehört; sie gehören zu den ältesten Beispielen von Enveloppen, welche untersucht worden sind [16]). Wenn Licht von irgend einem Punkt aus auf eine Curve fällt, so erhält man den reflectierten Strahl als die Gerade, welche im Fusspunkte denselben Winkel mit der Curven-Normale macht, wie der einfallende Strahl. Die Enveloppe der so reflectierten Strahlen wird die Brennlinie durch Reflexion genannt. Die allgemeine Gleichung des reflectierten Strahls ist leicht zu bilden. Wenn $T = 0$ und $N = 0$ die Gleichungen der Tangente und Normale im Einfallspunkte sind, so ist für T', N' als die Resultate der Substitution der Coordinaten des Leuchtpunktes in T, N die Gleichung des einfallenden Strahls

$$T' N - N' T = 0;$$

daher ist die Gleichung des reflectierten Strahls, des vierten harmonischen zu diesen drei Strahlen,

$$T' N + N' T = 0.$$

Die Enveloppe desselben kann nach den vorhergehenden Regeln gefunden werden.

Beispiel. Man finde für einen Kreis die Brennlinie durch Reflexion. Für a und b als die Coordinaten des leuchtenden Punktes und wegen $x \cos\theta + y \sin\theta - r = 0$, und $x \sin\theta - y \cos\theta = 0$ als Gleichungen der Tangente und Normale ist die Gleichung des reflectierten Strahls

$$(a \cos\theta + b \sin\theta - r)(x \sin\theta - y \cos\theta)$$
$$+ (x \cos\theta + y \sin\theta - r)(a \sin\theta - b \cos\theta) = 0$$

oder

$$(ay + bx) \cos 2\theta + (by - ax) \sin 2\theta$$
$$+ r(x + a) \sin\theta - r(y + b) \cos\theta = 0,$$

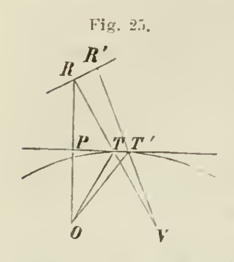
deren Enveloppe nach Beisp. 2, Art. 85.

$$\left\{4(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - r^2[(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2]\right\}^3$$
$$= 27(bx - ay)^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2.$$

116. Durch Quetelet ist eine Methode angegeben worden, die das Problem auf das der Evolute zurückführt, statt direct die Enveloppe der reflectierten Strahlen zu suchen und die daher practisch vortheilhafter ist; die Brennlinie ist hinreichend bestimmt, wenn man die Curve kennt, von welcher sie die Evolute ist. „Wenn man aus den einander folgenden Punkten der reflectierenden Curve als Centren mit je der

entsprechenden Entfernung vom leuchtenden Punkte als Radius eine Reihe von Kreisen beschreibt, so ist die Enveloppe derselben eine Curve, deren Evolute die fragliche Brennlinie ist.“ Oder wie es Dandelin noch unmittelbarer brauchbar ausgesprochen hat: Wenn wir vom leuchtenden Punkte O die Normale OP auf die Tangente fällen und sie so verlängern, dass $PR = OP$ ist, so ist die Brennlinie die Evolute des Ortes von R. Denn RT ist offenbar die Lage des reflectierten Strahles und wenn wir den nächstfolgenden Strahl ziehen, so ist wegen der Gleichheit der von OT, TV; OT', $T'V$ mit TT' gebildeten Winkel

Fig. 25.



$$OT + TV = OT' + T'V$$

(vergl. „Kegelschnitte“ Art. 259.), daher $VR = VR'$ und VR normal zum Orte von R. Wir nennen den Ort von P, den Ort des Fusspunktes der Normale zur Tangente in der letzteren die Fusspunktencurve der gegebenen Curve. Der Ort von R ist offenbar eine zu dieser ähnliche Curve und seine Gleichung kann immer gebildet werden, wenn die Gleichung der Reciproken der gegebenen Curve in Bezug auf O bekannt ist: man hat nur für ϱ in die Polargleichung dieser Reciproken $\frac{2}{\varrho}$ zu substituieren. So ist die Brennlinie durch Reflexion für einen Kreis die Evolute der Limaçon (vergl. Beisp. 5, Art. 55.), weil ihre nach der gegebenen Regel gebildete Gleichung von der Form

$$\varrho = p\,(1 + e \cos \omega)$$

ist.

117. Wenn Licht von einem Punkte aus auf eine Curve fällt, so wird der gebrochene Strahl als die vom Fusspunkte in der Curve ausgehende Gerade gefunden, für welche der Sinus des von ihr mit der entsprechenden Normale gebildeten Winkels in einem constanten Verhältniss zum Sinus des Winkels des einfallenden Strahls gegen die Normale ist. Die Enveloppe aller dieser Strahlen heisst die Brennlinie durch Refraction für die gegebene Curve.

Quetelet hat durch den folgenden unmittelbar evidenten Satz auch diese Brennlinien als Evoluten characterisiert: „Wenn man aus den aufeinander folgenden Punkten der brechenden Curve als Centren mit Radien, die zu der jedesmal entsprechenden Entfernung vom leuchtenden Punkte in einem constanten Verhältniss stehen, Kreise beschreibt, so ist die Enveloppe derselben eine Curve, von welcher die Brennlinie durch Refraction die Evolute ist.“ In der That zeigt die Methode des Unendlichkleinen leicht, dass in Folge des Gesetzes der Refraction die Wachsthümer des einfallenden und des gebrochenen Strahls durch die Relation

$$m d\varrho + d\varrho' = 0$$

verbunden sind; daraus folgt, dass

$$VR = VR'$$

wird, wenn man in der Verlängerung des gebrochenen Strahls

$$TR = m \,.\, OT, \; T'R' = m \,.\, OT'$$

macht, und dass daher der gebrochene Strahl normal zu dem Orte von R ist. Wir fügen dem geometrische Untersuchungen über die beiden interessantesten Fälle der Brennlinien durch Refraction hinzu.

1) Die Brennlinie durch Refraction für eine gerade Linie. Fällt man ein Perpendikel von A auf die Gerade, verlängert dasselbe so, dass $AP = PB$ und führt durch A, B und den Fusspunkt R des einfallenden Strahls einen Kreis, so sei LR der gebrochene Strahl; dann wird offenbar der Winkel ALB von demselben halbiert, und es ist

$$AL + LB : AB = AL : AO$$
$$= \sin AOL : \sin ALO;$$

Winkel AOL ist der vom gebrochenen Strahl mit der Normale der Geraden gebildete Winkel und $ALO = BLO = BAR$ der Winkel des einfallenden Strahles mit derselben Normale und es ist somit das Verhältniss $AL + LB : AB$ gegeben. Der Ort von L ist eine Ellipse, welche A und B zu Brennpunkten hat und für welche LR die Normale, von welcher somit die Brennlinie die Evolute ist.

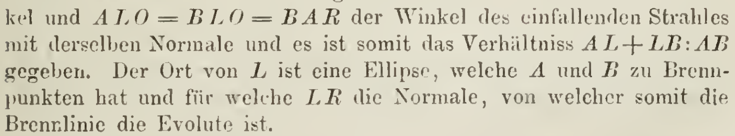


Fig. 26.

2) Die Brennlinie durch Refraction für einen Kreis. Wenn durch den leuchtenden Punkt A und den Einfallspunkt R ein den Radius

OR berührender Kreis beschrieben wird, so ist der Punkt B gegeben, weil $OA \cdot OB = OR^2$ ist. Aus ähnlichen Dreiecken ist $RA : RB = OA : OR$; es ist ferner

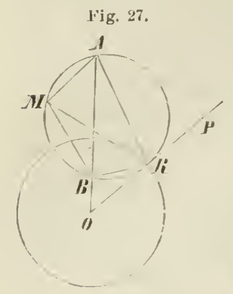


Fig. 27.

$$RA : RM = \sin RBA : \sin RBM$$

und da $RBA = PRA$, d. h. dem Winkel des einfallenden Strahls mit der Normale der Curve, und $RBM = PRM$, dem Winkel des gebrochenen Strahls mit derselben Normale ist, so ist auch $RA : RM$ bekannt. Weil endlich

$$AM \cdot RB + MB \cdot AR = RM \cdot AB$$

ist, so sind die Distanzen ϱ und ϱ' des Punktes M von A und B durch die Relation verbunden

$$\frac{RB}{RM}\varrho + \frac{RA}{RM}\varrho' = AB.$$

Nun wird ein Cartesisches Oval oder eine aplanetische Linie als der Ort eines Punktes definiert, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Brennpunkten durch die Relation

$$m\varrho + n\varrho' = c$$

verbunden sind, und man beweist genau so wie bei den Kegelschnitten („Kegelschnitte" Art. 259.), dass die Normale einer solchen Curve den Winkel zwischen den Brennstrahlen in zwei Theile zerlegt, deren Sinus im Verhältniss $m : n$ stehen. Der Ort von M ist also ein Cartesisches Oval, für welches A und B die Brennpunkte sind und da MR normal zu diesem Orte ist, so ist die Brennlinie die Evolute dieser Curve [17].

Die Ellipse in 1) und das Cartesische Oval in 2) sind Curven, welche die gebrochenen Strahlen rechtwinklig durchschneiden; man nennt solche Curven sowohl für die gebrochenen als für die reflectierten Strahlen secundäre Brennlinien.

118. Es bleibt übrig, kurz einiger andern Classen von Enveloppen zu gedenken. Wir haben früher das Problem erwähnt, die Parallelcurve einer gegebenen Curve zu bestimmen. Dasselbe kann entweder als das Problem der Bestimmung der Enveloppe einer Geraden behandelt werden, die parallel der Tangente der Curve in fester Entfernung von derselben ist, also der Enveloppe von

$$U_1 x + U_2 y + U_3 z = k z (U_1^2 + U_2^2)^{\frac{1}{2}};$$

oder als das Problem der Bestimmung der Enveloppe des Kreises von gegebenem Radius,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2,$$

dessen Mittelpunkt a, b der Gleichung der Curve genügt,

oder was dasselbe ist von der Bestimmung der Bedingung, unter welcher dieser Kreis die Curve berührt. Das Ergebniss ist natürlich eine Function von k^2. In gewissen besonderen Fällen kann dieselbe in Factoren zerfallen, wie z. B. die Parallele in der Entfernung k zu einem Kreise vom Radius r aus zwei Kreisen von den Radien $(r \pm k)$ besteht. Im Allgemeinen ist aber eine solche Reduction nicht möglich und die beiden Tangenten in der Entfernung $\pm k$ von einer Tangente der Originalcurve gehören derselben Parallelcurve an. Für dieselbe ist daher die Zahl der einer gegebenen Geraden parallelen Tangenten doppelt so gross wie für die Originalcurve, d. h. $\nu' = 2\nu$. Ebenso entsprechen jeder Inflexionstangente der Originalcurve zwei solche Tangenten der Parallelcurve, $\iota' = 2\iota$. Um die Ordnung der Parallelcurve zu finden, reicht es hin, in ihrer Gleichung $k = 0$ zu machen, weil diess die Glieder von höchster Dimension in der Gleichung nicht beeinflusst; man findet allgemein wahr, was für Kegelschnitte bekannt ist („Kegelschnitte" Art. 348, 2.), dass das Resultat die zweifach gezählte Originalcurve zusammen mit den zwei Büscheln von ν Tangenten ist, die von den Punkten I, J an die Curve gehen; die Ordnung der Parallelcurve ist also $= 2(\mu + \nu)$. Es hat keine Schwierigkeit, die Modificationen dieser Zahlen festzustellen, welche der Berührung der Originalcurve mit der unendlich entfernten Geraden oder dem Hindurchgehen durch einen der Punkte I, J entsprechen; wir kommen so zu Cayley's Formeln

$$\mu' = 2(\mu + \nu) - 2(\varepsilon + \sigma), \quad \nu' = 2\nu,$$
$$\iota' = 2\iota = -6\mu + 2\alpha, \quad \varkappa' = 2\alpha - 6(\varepsilon + \sigma),$$
$$\varepsilon' = 2(\nu - \sigma), \quad \sigma' = 2\sigma.$$

Die Parallelcurve und die Originalcurve haben die nämlichen Normalen und dieselbe Evolute, aber jede Normale der Parallelcurve hat im Allgemeinen zwei den Werthen $\pm k$ entsprechende Fusspunkte in ihr.

Beispiel 1. Man bestimme die Parallelcurve der Ellipse oder Parabel. (Vergl. „Kegelschnitte" Art. 348.)

Beispiel 2. Bestimme die Parallelcurve zu $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Die Gleichung einer Tangente ist (Art. 99, 6.)

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = a \sin\varphi \cos\varphi;$$

die einer Parallelen in der Entfernung k also

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = k + a \sin\varphi \cos\varphi$$

und deren Enveloppe (Art. 85, 3.)

$$\{3(x^2 + y^2 - a^2) - 4k^2\}^3 + \{27axy - 9k(x^2 + y^2) - 18a^2k + 8k^3\}^2 = 0.$$

Sie bietet einen von den Fällen dar, wo die den Werthen $\pm k$ entsprechenden Parallelen verschiedene Curven statt Theile derselben Curve sind.

Die Curve, welche der eben erhaltenen Gleichung entspricht, ist die Enveloppe einer Linie, in welcher durch zwei feste Gerade eine Strecke von constanter Länge abgeschnitten wird. Wenn die Geraden rechtwinklig zu einander sind, so erkennt man, indem man sie als Coordinatenaxen wählt, unmittelbar, dass die Gleichung einer Linie von der Länge a zwischen ihnen und dem Winkel φ zur Axe der x durch

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = a \cos\varphi \sin\varphi$$

dargestellt ist, welche die Enveloppe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ bildet. Betrachten wir aber für einen Augenblick den Durchmesser und eine zu ihm parallele Sehne eines Kreises, so ist evident, dass wenn eine Linie von der Länge a an irgend einem Punkte einen rechten Winkel spannt, eine zu ihr parallele Linie im Abstand $\frac{1}{2}a\cos\varphi$ den Abschnitt $a\sin\varphi$ mit einem Paar unter dem Winkel φ geneigter, zu den rechtwinkligen Geraden symmetrischer Linien bildet. Daher ist die Enveloppe einer Geraden von der Länge $a\sin\varphi$ zwischen den schiefen Geraden eine dem Werthe $k = \frac{1}{2}a\cos\varphi$ entsprechende Parallelcurve zu der Enveloppe für die rechtwinkligen Geraden d. h. zu $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

119. Wenn $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ die Tangente einer in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückten Curve darstellt, so ist

$$\xi x + \eta y + \zeta + k\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)} = 0$$

eine Tangente der Parallelcurve; ist also die gegebene Curve in Liniencoordinaten ausgedrückt, so erhalten wir die der Parallelcurve, indem wir für ζ den Werth $\zeta + k\varrho$ substituieren,

für $\varrho = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}$. Ist jene Gleichung der Originalcurve $V = 0$, so ist die der Parallelcurve

$$V + k\varrho \frac{dV}{d\zeta} + \frac{1}{1.\,2} k^2 \varrho^2 \frac{d^2V}{d\zeta^2} + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung wird von den Wurzeln befreit, indem man die Glieder mit ungeraden Potenzen von ϱ auf die eine Seite bringt und dann quadriert; der Grad der so entstehenden Gleichung ist das Doppelte von dem der Originalgleichung in Uebereinstimmung mit den schon gewonnenen Ergebnissen.

Beispiel 1. Man bestimme die Gleichung der Parallelcurve zu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in Liniencoordinaten. Die entsprechende Gleichung der Ellipse ist

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = \zeta^2,$$

die der Parallelcurve also

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = (\zeta + k\varrho)^2$$

oder

$$\left\{(a^2 - k^2)\, \xi^2 + (b^2 - k^2)\, \eta^2 - \zeta^2\right\}^2 = 4\, k^2\, (\xi^2 + \eta^2)\, \zeta^2.$$

Beispiel 2. Die Gleichung der Parallelcurve der Parabel $y^2 = px$ in Liniencoordinaten zu geben. Die entsprechende Gleichung der Parabel ist

$$p\eta^2 = 4\,\xi\zeta,$$

die der Parallelcurve also

$$(p\,\eta^2 - 4\,\xi\,\zeta)^2 = 4\,k^2\,\xi^2\,(\xi^2 + \eta^2).$$

Beispiel 3. Entwickele die Gleichung der Parallelen eines Kreises in Liniencoordinaten. Der Kreis vom Mittelpunkt a, b und dem Radius c hat die Gleichung in Liniencoordinaten („Kegelschnitte“ Art. 120, 3.)

$$(a\,\xi + b\,\eta + \zeta)^2 = c^2\,(\xi^2 + \eta^2);$$

seine Parallelcurve somit

$$(a\,\xi + b\,\eta + \zeta + k\varrho)^2 = c^2\,\varrho^2\,;$$

diese Gleichung zerfällt in Factoren und giebt

$$a\,\xi + b\,\eta + \zeta + k\varrho = \pm\, c\varrho,$$

welches rationalisiert die Gleichung

$$(a\,\xi + b\,\eta + \zeta)^2 = (c \pm k)^2\,(\xi^2 + \eta^2)$$

giebt, die ein Paar von concentrischen Kreisen mit den Radien $(c \pm k)$ darstellt, wie es sein muss.

120. Ganz so wie im letzten Beispiel ergiebt sich, dass für jede Curve, deren Gleichung in Liniencoordinaten von der Form

$$u^2 (\xi^2 + \eta^2) = v^2$$

ist, die Parallelcurve in zwei Theile von gleicher Form mit dem Original zerfällt, oder dass die den Werthen $\pm k$ entsprechenden Parallelen verschiedene Curven anstatt zwei Zweige derselben Curve sind. Denn durch die Substitution $\zeta + k\varrho$ für ζ werden u und v in ganz gleicher Weise verändert, nämlich in

$$u + u' k \varrho + u'' k^2 \varrho^2 + \cdots, \quad v + v' k \varrho + \cdots \text{ und } u^2 \varrho^2 = v^2$$

wird also zu

$$(u + u' k\varrho + u'' k^2\varrho^2 + \cdots)^2 \varrho^2 = (v + v' k\varrho + v'' k^2\varrho^2 + \cdots)^2,$$

was in Factoren zerfällt, die getrennt rationalisiert werden können und das Resultat liefern

$$\left\{u + u'' k^2 \varrho^2 + \cdots \pm (v' k + v''' k^3 \varrho^2 + \cdots)\right\}^2 \varrho^2$$
$$= \left\{v + v'' k^2 \varrho^2 + \cdots \pm (u' k \varrho^2 + u''' k^3 \varrho^4 + \cdots)\right\}^2.$$

Die Gleichung, welche wir vorher für die Parallelcurve eines Kegelschnitts gegeben haben, ist von der hier betrachteten Form und wir entnehmen daraus, dass die Parallelcurve zu ihr in der Entfernung k' in zwei ihr wesentlich gleiche Theile zerfällt, nämlich in die beiden Parallelcurven des Kegelschnitts in den Entfernungen $k \pm k'$, wie geometrisch evident ist. Für die früher erwähnte Curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ zeigt die Form ihrer Gleichung in Liniencoordinaten

$$(\xi^2 + \eta^2)\,\zeta^2 = a^2\,\xi^2\,\eta^2,$$

dass ihre Parallelcurve in Factoren zerfällt; in der That ist die Gleichung derselben in Liniencoordinaten

$$(\xi^2 + \eta^2)\,\zeta^2 = \left\{a\,\xi\,\eta \pm k\,(\xi^2 + \eta^2)^2\right\}.$$

Wenn wir für u und v die allgemeinsten Functionen ersten und zweiten Grades in ξ, η, ζ nehmen, so bezeichnet

$$u^2\,\varrho^2 = v^2$$

eine Curve vierter Classe mit zwei Doppeltangenten also von der achten Ordnung; diese Functionen können aber so angenommen werden, dass die Doppeltangenten zu stationären

Tangenten werden, und dass die Curve überdiess eine andere doppelte oder stationäre Tangente hat, und man kann somit in dieser Art die Gleichung einer Curve dritter und vierter Ordnung bilden, deren Parallelcurve in Factoren zerfällt. Von dieser Art ist wie wir später sehen werden die Reciproke des Cartesischen Ovals.

121. Wenn wir statt der rechtwinkligen Coordinaten projectivische (vergl. „Kegelschnitte" Art. 61, 64.) anwenden, so ist die Gleichung einer zur Geraden

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

parallelen Linie von der Form

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + m(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)\sqrt{(S)} = 0$$

mit

$$S = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos A_1 - 2\xi_3\xi_1 \cos A_2 - 2\xi_1\xi_2 \cos A_3;$$

wir erkennen daraus, dass die Gleichung der Parallelen einer Curve in Liniencoordinaten aus der Gleichung dieser Curve selbst in Liniencoordinaten entsteht, indem man für die ξ_i die Summen $\xi_i + m\sqrt{(S)} \sin A_i$ substituiert. Wir wissen (vergl. „Kegelschnitte" Art. 363.), dass $S = 0$ die Gleichung der Punkte I, J in Liniencoordinaten ist und erkennen damit, dass für $S = 0$ als die Gleichung von zwei beliebigen Punkten und

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

als die Gleichung ihrer Verbindungslinie die Enveloppe von

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

und von

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)\sqrt{(S)} = 0$$

parallele oder vielmehr quasi-parallele Curven sind.

122. Wir nannten in Art. 114. den Ort des Fusspunktes der Normale zur Tangente, die von einem gegebenen Pol oder Centrum ausgeht, die Fusspunktlinie der gegebenen Curve. Denken wir zu derselben abermals die Fusspunktcurven bestimmt, etc., so entsteht eine Reihe von zweiten, dritten, etc. Fusspunktcurven der gegebenen Curve. Diese Reihe kann auch rückwärts fortgesetzt werden, indem man

die Curve aufsucht und als erste negative Fusspunktcurve bezeichnet, von welcher die gegebene Curve die Fusspunktcurve ist, etc. Das Problem der Bestimmung der negativen Fusspunktcurve fordert die Bestimmung der Enveloppe einer Geraden, welche durch den Endpunkt des Radius vector rechtwinklig zu demselben gezogen wird; in andern Worten, es fordert die Bestimmung der Enveloppe von

$$\xi x + \eta y = \xi^2 + \eta^2,$$

wo ξ, η die Gleichung der Curve befriedigen. Wir sahen soeben, dass das Problem der Aufsuchung der Parallelcurve auf das der Bestimmung der Enveloppe von

$$2\xi x + 2\eta y + k^2 - x^2 - y^2 = \xi^2 + \eta^2$$

mit denselben Bedingungen zurückkommt; in der That hat schon Roberts bemerkt, dass diese beiden geometrischen Probleme auf dasselbe analytische Problem zurückkommen, nämlich die Bestimmung einer Enveloppe von der Form

$$A\xi + B\eta + C = \xi^2 + \eta^2,$$

und dass man aus der Gleichung der Parallelcurve die Gleichung der negativen Fusspunktcurve erhält, wenn man in ihr $k^2 = x^2 + y^2$ macht und dann $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}y$ für x und y einsetzt. Gewöhnlich ist jedoch das Problem der Bestimmung der Parallelcurve das schwierigere von beiden; immerhin giebt die Methode unmittelbar die negative Fusspunktcurve der geraden Linie und des Kreises vom Radius a, weil die Parallelcurve für jene ein Paar von äquidistanten parallelen Geraden und für diesen ein Paar concentrischer Kreise von den Radien $(a \pm k)$ ist, so dass die Gleichung der Parallelcurve in beiden Fällen unmittelbar gegeben ist und somit die der negativen Fusspunktcurven durch das angegebene Verfahren gebildet werden können.

123. Wenn man für irgend eine Curve in jedem von einem festen Ursprung oder Centrum der Inversion O ausgehenden Radius vector OP ein Stück OP' abträgt, welches dem reciproken Werthe von OP gleich ist, so heisst der Ort von P' die Inverse der gegebenen Curve. Daraus erhellt, dass die Fusspunktcurve einer gegebenen Curve die Inverse ihrer reciproken Polare und dass die erste negative Fusspunktcurve die reciproke Polare ihrer Inversen ist, vorausgesetzt,

dass diese reciproken Polaren in Bezug auf einen aus dem Centrum der Inversion beschriebenen Kreis gebildet sind.

Es unterliegt keiner Schwierigkeit, durch eine mit der in den andern Fällen angewendeten sehr ähnliche Schlussweise die Charactere der inversen Curve einer gegebenen Originalcurve zu bestimmen, somit auch die Charactere der Fusspunktcurve und der negativen Fusspunktcurve; es erscheint als hinreichend, die Resultate der Untersuchung mitzutheilen. Wir gebrauchen ε und σ, um dadurch wie früher auszudrücken respective, wie viel mal die Curve durch einen der Punkte I oder J geht, und wie viel mal sie die Gerade IJ berührt; wir bezeichnen durch ε^*, σ^* die reciproken Singularitäten, nämlich die Zahl von Berührungen einer Curve mit einer der Geraden OI oder OJ und die Vielfachheit des Hindurchgehens durch den Ursprung O; ferner durch π_o und π_i die Zahl der zusammenfallenden Tangenten für einen vielfachen Punkt in O oder in I oder J, so dass z. B. $\pi_o = 1$ wäre, falls der Ursprung eine Spitze ist; endlich durch π_o^* und π_i^* die reciproken Singularitäten. Dann erhalten wir für die inverse Curve

$$\mu' = 2\mu - \varepsilon - \sigma^*, \quad \nu' = \nu + 2\mu - 2(\varepsilon + \sigma^*) - (\varepsilon^* + \sigma) + (\pi_o + \pi_i),$$
$$\varepsilon' = 2\mu - \varepsilon - 2\sigma^*, \quad \sigma' = \pi_o, \quad \varepsilon^{*\prime} = \pi_i, \quad \sigma^{*\prime} = \mu - \varepsilon,$$
$$\pi_o' = \sigma, \quad \pi_i' = \varepsilon^*;$$

für die Fusspunktcurve

$$\mu' = 2\nu - \varepsilon^* - \sigma, \quad \nu' = \mu + 2\nu - 2(\sigma + \varepsilon^*) - (\sigma^* + \varepsilon) + \pi_o^* + \pi_i^*,$$
$$\varepsilon' = 2\nu - 2\sigma - \varepsilon^*, \quad \sigma' = \pi_o^*, \quad \varepsilon^{*\prime} = \pi_i^*, \quad \sigma^{*\prime} = \nu - \varepsilon^*,$$
$$\pi_o' = \sigma^*, \quad \pi_i' = \varepsilon;$$

endlich für die negative Fusspunktcurve

$$\mu' = \nu + 2\mu - 2(\varepsilon + \sigma^*) - (\varepsilon^* + \sigma) + \pi_o + \pi_i,$$
$$\nu' = 2\mu - \varepsilon - \sigma^*, \quad \varepsilon' = \pi_i, \quad \sigma' = \mu - \varepsilon,$$
$$\varepsilon^{*\prime} = 2\mu - \varepsilon - 2\sigma^*, \quad \sigma^{*\prime} = \pi_o, \quad \pi_o' = \sigma, \quad \pi_i' = \varepsilon^*.$$

Beispiel 1. Man bestimme die negative Fusspunktcurve der Parabel für den Brennpunkt als Pol, oder was dasselbe ist, ihre Brennlinie durch Reflexion für Strahlen, welche der Axe parallel sind.

Sei die Gleichung

$$y^2 = 4(mx + m^2),$$

so kann jeder Punkt der Curve dargestellt werden durch

$$x + m = \lambda^2 m\,, \quad y = 2\lambda m$$

und die Gleichung $\xi x + \eta y = \xi^2 + \eta^2$ wird

$$(\lambda^2 - 1)\, x + 2\lambda y = (\lambda^2 + 1)^2\, m.$$

Die Invarianten dieser in λ biquadratischen Form sind

$$S = 3\,(x + 4m)^2, \qquad T = (x + 4m)^3 - 54m\,(x^2 + y^2)\,;$$

die Discriminante $S^3 - 27\,T^2$ wird daher durch $x^2 + y^2$ theilbar und giebt die Gleichung

$$(x + 4m)^3 = 27m\,(x^2 + y^2).$$

Dieselbe ist der Gleichung in Polarcoordinaten $\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{1}{3}\omega = m^{\frac{1}{3}}$ äquivalent, zu welcher man auf anderem Wege gelangen konnte, weil aus Art. 95. unmittelbar folgt, dass für eine Curve, deren Gleichung in die Form $\varrho^m = a^m \cos m\omega$ gebracht werden kann, die Gleichungen der Fusspunktcurve und der negativen Fusspunktcurve von derselben Form sind, indem nur m respective in $\dfrac{m}{1+m}$ und $\dfrac{m}{1-m}$ übergeht. Es mag angemerkt werden, dass die Gleichung der Tangente einer Parallelcurve zu dieser Curve

$$(\lambda^2 - 1)\, x + 2\lambda y = (\lambda^2 + 1)^2\, m + (\lambda^2 + 1)\, k$$

ist und dass dieselbe eine Enveloppe fünfter Ordnung erzeugt, bei welcher die den Werthen $\pm k$ entsprechenden Curven verschieden sind. So sind im Allgemeinen die Parallelcurven unicursal für Curven, deren Tangente die Gleichungsform

$$(\lambda^2 - 1)\, x + 2\lambda y = \varphi\,(\lambda)$$

hat. Nehmen wir z. B. $\varphi\,(\lambda) = m\lambda^3$, so erhalten wir eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung, welche durch die unendlich ferne Gerade berührt wird und die Punkte I, J enthält.

Beispiel 2. Die negative Fusspunktcurve für die Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ zu bestimmen, wenn der Pol im Centrum derselben liegt. Setzen wir für die Coordinaten eines Punktes der Ellipse wie gewönlich $a \cos \varphi$ und $b \sin \varphi$, so gilt es, die Enveloppe der Geraden

$$\begin{aligned} ax \cos \varphi + by \sin \varphi &= a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \\ &= \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2) + \tfrac{1}{2}\,(a^2 - b^2) \cos 2\varphi \end{aligned}$$

zu bestimmen. Setzen wir

$$\tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2) = m\,, \quad \tfrac{1}{2}\,(a^2 - b^2) = n$$

so wird die Enveloppe nach Art. 85.

$$\left\{3\,(a^2x^2 + b^2y^2) - 4\,(m^2 + 3n^2)\right\}^3$$
$$+ \left\{9\,(m - 3n)\, a^2x^2 + 9\,(m + 3n)\, b^2y^2 - 8m\,(m^2 - 9n^2)\right\}^2 = 0\text{[13]}.$$

Beispiel 3. Man bestimme die negative Fusspunktcurve der Ellipse für den Pol im Brennpunkt. Das vom Brennpunkt aus gemessene x ist $c + a \cos\varphi$ und der Brennstrahl $a + c \cos\varphi$; es ist also die Enveloppe von

$$x(c + a \cos\varphi) + yb \sin\varphi = (a + c \cos\varphi)^2$$

zu bestimmen, oder von

$$c^2 \cos 2\varphi + a(4c - 2x) \cos\varphi - 2by \sin\varphi + (2a^2 + c^2 - 2cx) = 0;$$

sie ist durch

$$\left\{3b^2(x^2 + y^2) - (2b^2 + cx)^2\right\}^3$$
$$+ \left\{9b^2(a^2 - cx + 2c^2)(x^2 + y^2) - (2b^2 + cx)^3\right\}^2 = 0$$

dargestellt, welche Gleichung in entwickelter Form den Factor $(x^2 + y^2)$ abzusondern gestattet und somit eine Curve vierter Ordnung repräsentiert, die die Geraden $x^2 + y^2 = 0$ zu stationären Tangenten hat.

Viertes Kapitel.

Metrische Eigenschaften der Curven.

124. Die wichtigeren metrischen Eigenschaften der Curven sollen in diesem Kapitel entwickelt werden. Zur Untersuchung solcher Eigenschaften benutzt man am besten die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten, weil wir (vergl. Art. 35.) durch die Substitution von $\varrho \cos \theta$ und $\varrho \sin \theta$ für x und y aus der Gleichung unmittelbar die Längen der Segmente erhalten, welche von der Curve in irgend einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden bestimmt werden; also auch in jeder beliebigen Geraden, weil durch Coordinaten-Transformation jeder Punkt zum Anfangspunkt gemacht werden kann.

Daraus entspringt zunächst der Satz von Newton: Wenn man durch einen Punkt O zwei Sehnen zieht, die eine Curve n^{ter} Ordnung in den Punkten

$$R_1, R_2, \ldots, R_n; \quad S_1, S_2, \ldots, S_n$$

respective schneiden, so ist das Verhältniss

$$\frac{OR_1 \,.\, OR_2 \ldots OR_n}{OS_1 \,.\, OS_2 \ldots \,.\, OS_n}$$

der Producte der Abschnitte in der einen und der andern Geraden constant für alle Lagen des Punktes O, bei unveränderter Richtung der Transversalen [19]. (Vergl. „Kegelschnitte" Art. 111.) Denn aus der Polargleichung der Curve (Art. 36.) folgt, dass das Product aller Werthe des Radius vector in einer durch den Anfangs-

punkt gehenden und unter dem Winkel θ zur Axe der x geneigten Geraden

$$= \frac{A}{P\cos^n\theta + Q\cos^{n-1}\theta\sin\theta + \cdots},$$

ist, und dass das entsprechende Product für eine andere unter θ' zur Axe der x geneigte Gerade den Werth

$$\frac{A}{P\cos^n\theta' + Q\cos^{n-1}\theta'\sin\theta' + \cdots};$$

dass also das Verhältniss beider durch den Bruch

$$\frac{P\cos^n\theta + Q\cos^{n-1}\theta\sin\theta + \cdots}{P\cos^n\theta' + Q\cos^{n-1}\theta'\sin\theta' + \cdots}$$

ausgedrückt wird. Durch eine Transformation Cartesischer Coordinaten zu parallelen Axen werden aber die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen in der Gleichung und also auch das geschriebene Verhältniss nicht geändert. (Vergl. „Kegelschnitte" Art. 93.) Wir können denselben Satz auch so aussprechen: Wenn durch zwei feste Punkte O, O' parallele Transversalen zu einer Curve n^{ter} Ordnung gezogen werden, so ist das Verhältniss der Segmentenproducte

$$OR_1 \,.\, OR_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, O'\colon R_1' \,.\, O'R_2' \,.\,.\,.$$

constant, welches auch die Richtung der Transversalen sein mag. („Kegelschnitte" Art. 111.) Denn für A' als das absolute Glied der Gleichung der Curve nach der Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten von O nach O' ist das zweite Product

$$= \frac{A'}{P\cos^n\theta + \cdots},$$

so dass das Verhältniss der Producte der Segmente $= A : A'$ und somit unabhängig von θ wird.

Man weiss ferner (vergl. „Kegelschnitte" Art. 93.), dass das neue absolute Glied das Resultat der Substitution der Coordinaten des neuen Anfangspunktes O' in die Gleichung der Curve ist und sieht daher, dass das Resultat einer solchen Substitution immer dem Product der Segmente proportional ist, die von der Curve in einer durch O' in ge-

gebener Richtung gezogenen Geraden abgeschnitten werden. (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 291.)

125. Aus dem vorigen Satze ergiebt sich der von Carnot, von welchem ein Specialfall gegeben ist „Kegelschnitte“ Art. 327. Jede Seite eines Polygons $ABC\ldots$ schneide eine Curve n^{ter} Ordnung in n reellen Punkten, und seien durch $'(B)$, $(B)'$ die Producte der n von B ausgemessenen Segmente bezeichnet, die die Curve so auf den Seiten BC, BA bestimmt, so ist

$$(A)'.(B)'.(C)'.(D)'\ldots = '(A).'(B).'(C).'(D)\ldots$$

Denn für Radien vectoren, die durch einen beliebigen Punkt parallel zu den Seiten des Polygons gezogen werden, gelten, wenn wir ihre Segmentenproducte in analoger Weise durch (a), (b), (c), ... bezeichnen, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen die Relationen

$$'(B):(B)' = (a):(b),\quad '(C):(C)' = (b):(c),$$
$$'(D):(D)' = (c):(d), \text{ etc.}$$

und die Verbindung derselben zum Product beweist den ausgesprochenen Satz.

126. Bei der Anwendung des Carnot'schen Satzes ist auf die Vorzeichen der Producte sorgfältig zu achten, um Zweideutigkeiten zu vermeiden. Betrachten wir die Segmente in der Linie AB, so ist $(A)'$ das Product von n im Sinne von A nach B gemessenen Segmenten und $'(B)$ das Product von gleichfalls n im Sinne von B nach A gemessenen Segmenten, sodass nach der Regel der Zeichen (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 6., 7.) jedes Segment der letzteren Gruppe als von entgegengesetztem Zeichen zu jedem der erstern zu betrachten ist und also wenn wir dem Product $(A)'$ das Zeichen $+$ geben, das Product $'(B)$ das Zeichen $(-)^n$ erhalten muss, d. i. $+$ für gerade und $-$ für ungerade n. Ist dann k die Seitenanzahl des Polygons, so muss die Gleichung des letzten Artikels, in der jede Seite aus k Factoren wie $(A)'$ oder $'(A)$ besteht, in der Form

$$(A)'.(B)'.(C)'\ldots = (-)^{nk}\,'(A).'(B).'(C)\ldots.$$

geschrieben werden, d. h. die rechte Seite hat für Curven von gerader Ordnungszahl und für Polygone von gerader

Seitenzahl das Zeichen + und erhält das Zeichen —, wenn beide Zahlen ungerade sind [20]).

Beispiel 1. Eine gerade Linie schneide die Seiten eines Dreiecks AB, BC, CA in den Punkten C', A', B', dann ist

$$AC' . BA' . CB' = - AB' . BC' . CA'$$

(„Kegelschnitte" Art. 42.) und das Zeichen sagt aus, dass eine Gerade, welche zwei Seiten des Dreiecks zwischen ihren Endpunkten schneidet, die dritte Seite ausserhalb schneiden muss. Wenn die Linien AA', BB', $CC^{*\prime}$ durch einen Punkt gehen, so wird die Relation

$$AC^{*\prime} . BA' . CB' = + AB' . BC^{*\prime} . CA'$$

erfüllt („Kegelschnitte" Art. 43.) und die Gerade AB wird in den Punkten C' und $C^{*\prime}$ harmonisch getheilt.

Beispiel 2. Die Seiten des Dreiecks werden von einem Kegelschnitt in den Punkten A', B', C' berührt, wenn nach Carnot's Theorem

$$AC'^2 . BA'^2 . CB'^2 = + AB'^2 . BC'^2 . CA'^2$$

und daher

$$AC' . BA' . CB' = \pm AB' . BC' . CA'$$

ist, wo das obere Zeichen dadurch ausgeschlossen ist, dass eine gerade Linie nicht drei Punkte mit einem Kegelschnitt gemein haben kann. Damit sagt aber der Satz aus, dass die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten sich in einem Punkte schneiden.

Beispiel 3. Wenn A', B', C' Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung mit den Tangenten BC, CA, AB sind, so sagt der Carnot'sche Satz, dass

$$AC'^3 . BA'^3 . CB'^3 = - AB'^3 . BC'^3 . CA'^3$$

sein muss, oder nach der einzigen reellen Wurzel

$$AC' . BA' . CB' = - AB' . BC' . CA',$$

d. h. wenn eine Curve dritter Ordnung drei reelle Inflexionspunkte hat, so liegen dieselben immer in einer geraden Linie. Daher kann eine Curve dritter Ordnung überhaupt nur drei reelle Inflexionspunkte haben, weil, falls sie deren mehrere hätte, dieser Satz für alle die Lage in derselben Geraden fordern würde, während doch eine Gerade eine Curve dritter Ordnung eben nur dreimal schneiden kann.

Derselbe Schluss beweist übrigens, dass drei reelle Punkte einer Curve von ungerader Ordnung n, in deren jedem die Tangente n Punkte mit der Curve gemein hätte, immer in einer geraden Linie liegen müssen.

Beispiel 4. Wenn in einer Curve vierter Ordnung drei Doppeltangenten AB, BC, CA mit den Berührungspunkten

$$C', C''; A', A''; B', B'',$$

betrachtet werden, so ist

$$AC'^2 . AC''^2 . BA'^2 . BA''^2 . CB'^2 . CB''^2 = AB'^2 . AB''^2 . BC'^2 . BC''^2 . CA'^2 . CA''^2$$

oder

$$AC' . AC'' . BA' . BA'' . CB' . CB'' = \pm AB' . AB'' . BC' . BC'' . CA' . CA''.$$

Diess giebt mit Rücksicht auf das doppelte Vorzeichen den Satz: Für drei Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung geht der Kegelschnitt, welcher fünf ihrer Berührungspunkte enthält, entweder auch durch den sechsten Berührungspunkt oder durch den ihm in der betreffenden Seite des Dreiecks der Doppeltangenten harmonisch conjugierten Punkt. Somit giebt es zwei verschiedene Arten von Triaden der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung, die diese geometrischen Kennzeichen von einander trennen.

127. Es giebt besondere Fälle, in denen der Carnot'sche Satz eine Modification verlangt. Zuerst, wenn eine der Ecken des Polygons z. B. A unendlich fern wäre, oder zwei Nachbarseiten desselben parallel, so ist in der Grenze $(A)' = '(A)$ und somit die Gleichung des Carnot'schen Satzes

$$(B)' . (C)' \ldots = '(B) . '(C) \ldots$$

Wenn zweitens eine der Ecken z. B. A in der Curve läge, so würde einer der n Factoren in jedem der Producte $(A)'$ und $'(A)$ verschwinden; wir können aber, wegen

$$AR : AR' = \sin RR'A : \sin R'RA,$$

für das Verhältniss dieser verschwindenden Factoren das Verhältniss der sinus der Winkel setzen, welche die Seiten des Polygons in A mit der Tangente der Curve in A machen, so dass die Carnot'sche Formel wird

$$(A)' . (B)' . (C)' \ldots : \sin \alpha = '(A) . '(B) . '(C) \ldots : \sin \alpha',$$

wo nun $(A)'$ und $'(A)$ nur je $(n-1)$ Factoren haben, und α, α' die Winkel bezeichnen, welche die Seiten der Geraden, in denen $(A)'$ und $'(A)$ respective gemessen sind, mit der Tangente in A machen. In dieser Art folgt z. B. der Satz: „Wenn ein Polygon einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so ist das stetige Product der sinus der Winkel, welche die Seiten desselben mit der Kegelschnittstangente am jedesmaligen rechten Ende bilden, gleich dem Product der sinus der Winkel, welche sie mit der Tangente am linken Ende einschliessen.

128. Wenn in einer geraden Linie n Punkte liegen, so nennt man denjenigen Punkt in ihr, für welchen die algebraische Summe seiner Entfernungen von ihnen verschwindet, das Centrum der mittlern Entfernung der gegebenen Punkte. Ist die Entfernung des Centrums von irgend einem gegebenen Punkte O der Linie y und sind die Entfernungen desselben Punktes O von den n angenommenen Punkten

$$y_1, y_2, \cdots, y_n,$$

so sind die Entfernungen des Centrums von den n Punkten

$$y - y_1, \quad y - y_2, \cdots, y - y_n$$

und die durch die Definition gegebene Bedingung ist

$$\Sigma (y - y_1) = 0 \quad \text{oder} \quad n y = \Sigma (y_1);$$

d. h. die Entfernung eines angenommenen Punktes vom Centrum ist gleich der durch die Zahl der Punkte dividierten Summe seiner Entfernungen von den gegebenen Punkten oder gleich der mittleren Entfernung des angenommenen Punktes von den letzteren. So ist für zwei Punkte das Centrum der mittlern Entfernungen der Mittelpunkt der von ihnen begrenzten Strecke und die Entfernung jedes Punktes von ihm ist gleich der halben Summe seiner Entfernungen von den beiden Punkten der Gruppe.

Die wohlbekannten Eigenschaften der Durchmesser der Kegelschnitte wurden in dem hierdurch begründeten Sinne von Newton[21]) im folgenden für alle algebraischen Curven gültigen Satze erweitert: Wenn man eine Curve n^{ter} Ordnung durch ein System von Parallelen schneidet und in jeder derselben das Centrum der mittlern Entfernungen ihrer n Schnittpunkte mit der Curve bestimmt, so ist der Ort dieses Centrums eine gerade Linie, welche als der dem gegebenen System paralleler Sehnen entsprechende der Richtung desselben conjugierte Durchmesser bezeichnet werden kann. Wir benutzen zum Beweis die in dem speciellen Falle der Kegelschnitte angewendete Methode (vergl. „Kegelschnitte" Art. 100.). Der Anfangspunkt der Coordinaten ist das Centrum der mittlern Entfernungen für eine Sehne unter dem Winkel θ zur Axe der x, wenn θ so be-

stimmt ist, dass durch die dem Uebergang zu Polarcoordinaten entsprechende Substitution $\varrho\cos\theta$, $\varrho\sin\theta$ oder im Falle schiefwinkliger Axen $m\varrho$, $n\varrho$ für x und y der Coefficient von ϱ^{n-1} verschwindet. Wir suchen dann die Bedingung auf, unter welcher ein anderer Punkt $x'\,y'$ das Centrum der mittlern Entfernungen für eine zur vorigen parallele Sehne ist, indem wir zu neuen Axen durch diesen Punkt $x'\,y'$ und parallel zu den alten transformieren; der neue Coefficient von ϱ^{n-1} muss für denselben Werth von θ verschwinden. Wenn aber die Gleichung $U=0$ zu parallelen Axen durch die Substitution

$$x+x',\ y+y'$$

für x und y transformiert wird, so wird sie

$$U+x'\frac{dU}{dx}+y'\frac{dU}{dy}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(x'^2\frac{d^2U}{dx^2}+2x'y'\frac{d^2U}{dx\,dy}+y'^2\frac{d^2U}{dy^2}\right)+\cdots=0;$$

hier enthalton nur die drei ersten Glieder die Variabeln in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz und weil in diesen Gliedern x', y' nur im ersten Grade vorkommt, so muss der fragliche Ort eine gerade Linie sein. Ihre Gleichung ist

$$u^{(n-1)}+x\frac{du^{(n)}}{dx}+y\frac{du^{(n)}}{dy}=0,$$

wenn wir in $u^{(n)}$, $u^{(n-1)}$ für x und y entweder $\cos\theta$ und $\sin\theta$ oder m und n substituiert denken.

129. Newton hat auch bemerkt, dass der nämliche Punkt das Centrum der mittleren Entfernungen in einer Geraden ist für das System ihrer Schnittpunkte mit der Curve und für das ihrer Schnittpunkte mit den Asymptoten derselben, und dass daher die algebraische Summe der Abschnitte zwischen der Curve und ihren Asymptoten gleich Null ist — auch die Erweiterung eines wohlbekannten Satzes („Kegelschnitte“ Art. 205.). Die Wahrheit derselben folgt aus der im letzten Artikel gegebenen Gleichung eines Durchmessers und aus Art. 52*, wonach die Glieder $u^{(n)}$ und $u^{(n-1)}$ in der Gleichung der Curve und der Gleichung ihrer Asymptoten übereinstimmen.

130. Wir können in analoger Weise den Ort eines Punktes suchen, für welchen die Summe der Producte in Paaren Null ist für die in gegebener Richtung gemessenen Abschnitte zwischen ihm und der Curve. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein solcher Punkt, wenn der Coefficient von ϱ^{n-2} für den gegebenen Werth von θ verschwindet; der Ort solcher Punkte wird also wie in Art. 128. gefunden, indem man untersucht, welche Relation zwischen x' und y' stattfinden muss, damit der Coefficient von ϱ^{n-2} in der transformierten Gleichung verschwindet. Weil aber die Glieder $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in x und y keine höheren als die zweiten Potenzen von x' und y' enthalten, so ist der fragliche Ort ein Kegelschnitt, den wir den Diametralkegelschnitt nennen wollen. Seine Gleichung ist

$$u^{(n-2)} + x\frac{du^{(n-1)}}{dx} + y\frac{du^{(n-1)}}{dy}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(x^2\frac{d^2u^{(n)}}{dx^2} + 2xy\frac{d^2u^{(n)}}{dx\,dy} + y^2\frac{d^2u^{(n)}}{dy^2}\right) = 0,$$

wenn wir in $u^{(n-2)}$, etc. $\cos\theta$ und $\sin\theta$ für x und y substituiert denken. Wenn die Entfernungen irgend eines Punktes vom Diametralkegelschnitt durch y und von der Curve durch $y_1, y_2, \ldots$ bezeichnet sind, so haben wir nach der Definition

$$\Sigma\,(y-y_1)(y-y_2) = 0,$$

eine Summe von so viel Gliedern als Combinationen zu zweien zwischen n Dingen, also von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gliedern. Denken wir dieselbe entwickelt und nach Potenzen von y geordnet, so ist der Coefficient von y^2 eben gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$; der Coefficient von y besteht dann aus $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gliedern von der Form $-(y_1+y_2)$ und muss somit, weil er in den n Grössen $y_1, y_2, \ldots$ symmetrisch sein muss, durch

$$-(n-1)\,\Sigma\,(y)$$

dargestellt sein. Es ist also

$$\Sigma\,(y-y_1)(y-y_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n-1)\,y^2 - (n-1)\,y\,\Sigma\,(y_1) + \Sigma\,(y_1\,y_2) = 0.$$

Diese quadratische Gleichung giebt die Entfernungen eines beliebigen Punktes vom Diametralkegelschnitt, wenn wir seine Entfernungen von der Curve wissen. Das $\frac{1}{2}n(n-1)$

fache dieses Products ist gleich $\Sigma(y_1 y_2)$, d. h. das Product der Entfernungen vom Diametralkegelschnitt ist gleich dem mittlern Product der Distanzen von der Curve in Paaren, weil ja die Zahl der Producte dieser Art ebenfalls $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist. Die Summe der Entfernungen vom Diametralkegelschnitt ist gleich $\frac{2}{n}\Sigma(y)$. Die mittlere Entfernung ist daher für beide Curven dieselbe, weil in dem einen Falle zwei, im andern n Distanzen auftreten; die beiden Curven haben also denselben Durchmesser.

131. Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass eine Curve n^{ter} Ordnung krummlinige Durchmesser von jeder Ordnung bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ haben kann. Der Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Producte zu dreien Null ist für die in gegebener Richtung gemessenen Distanzen von der Curve wird z. B. gefunden, indem man den Coefficienten von ϱ^{n-3} in der transformierten Gleichung gleich Null setzt. Wir finden ebenso wie vorher, dass

$$\Sigma(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) = \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)y^3$$
$$-\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)y^2\Sigma(y_1) + (n-2)y\Sigma(y_1 y_2) - \Sigma(y_1 y_2 y_3)$$

ist und erkennen, dass die Curve und ihr cubischer Durchmesser dieselbe mittlere Entfernung, dasselbe mittlere Product in Paaren und dasselbe mittlere Product zu dreien für die Entfernungen haben. Ebenso für Durchmesser höherer Ordnungen. Die folgenden Betrachtungen werden über diese krummlinigen Durchmesser weiteres Licht geben.

132. Zunächst fügen wir dem von den Durchmessern gesagten einiges von den Centren an. Wenn alle Glieder vom Grade $(n-1)$ in der Gleichung verschwinden, so verschwindet die algebraische Summe aller Radien vectoren durch den Anfangspunkt der Coordinaten und man könnte denselben in diesem Sinne als ein Centrum benennen. Man wendet jedoch die Benennung Centrum gewöhnlich nur auf den Fall an, wo jedem Werthe des Radius vector ein gleicher und entgegengesetzter Werth entspricht. In diesem Falle muss die zu Polarcoordinaten transformierte Gleichung eine Function von ϱ^2 sein. Ist die Curve also von gerader Ordnungszahl, so kann ihre Gleichung in x und y für das Cen-

trum als Anfangspunkt keine der ungeraden Potenzen der Variabeln enthalten und muss von der Form

$$u^{(0)} + u^{(2)} + u^{(4)} + \cdots = 0$$

sein. Ist die Curve aber von ungerader Ordnungszahl, so muss ihre Polargleichung durch Division mit ϱ auf eine Function von ϱ^2 reducierbar sein, und die Gleichung in x und y kann keine der geraden Potenzen der Veränderlichen enthalten und muss die Form

$$u^{(1)} + u^{(3)} + u^{(5)} + \cdots = 0$$

haben. Diese Form zeigt, dass das Centrum einer Curve von ungerader Ordnung nothwendig ein Inflexionspunkt sein muss.

Es ist offenbar, dass eine Curve von höherer als der zweiten Ordnung nur ausnahmsweise ein Centrum haben kann, weil es im Allgemeinen nicht möglich ist, durch Transformation der Coordinaten so viele Glieder aus der Gleichung der Curve zu entfernen, wie zu ihrer Reduction auf eine der obigen Formen erforderlich wäre.

133. Von Cotes rührt der wichtige Satz her: Wenn in jedem durch einen festen Punkt O gehenden Radius vector der Curve ein Punkt R so bestimmt wird, dass

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR_3} + \cdots$$

ist, so ist der Ort von R eine gerade Linie[22]. Denn für O als Anfangspunkt der Coordinaten ist die Bestimmungsgleichung der n Radien vectoren von der Form

$$A\,\frac{1}{\varrho^n} + (B\cos\theta + C\sin\theta)\,\frac{1}{\varrho^{n-1}}$$
$$+ (D\cos^2\theta + E\cos\theta\sin\theta + F\sin^2\theta)\,\frac{1}{\varrho^{n-2}} + \cdots = 0,$$

und somit

$$\frac{n}{OR} = -\frac{B\cos\theta + C\sin\theta}{A}$$

oder mit Wiederherstellung der x und y

$$Bx + Cy + nA = 0.$$

Diess ist die in Art. 60. für die Polargerade A des Anfangs-

punktes gefundene Gleichung und die eben bewiesene Eigenschaft ist die Erweiterung der wohlbekannten harmonischen Eigenschaft von Pole und Polare bei Kegelschnitten. (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 108.)

134. Man begründet dieselbe Eigenschaft durch eine Methode, die der in „Kegelschnitte“ Art. 124. angewendeten analog ist, auch ohne den Punkt O zum Anfangspunkt der Coordinaten zu machen. Wir sahen in Art. 63., dass für zwei Punkte O oder x_i' und R oder x_i die Gleichung $\Lambda = 0$ oder

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1} \mu \Delta U' + \tfrac{1}{2} \lambda^{n-2} \mu^2 \Delta^2 U' + \cdots = 0.$$

die Verhältnisse $RR_1 : OR_1, \ldots.$ bestimmt, nach welchen die Verbindungslinie dieser zwei Punkte durch die Curve getheilt wird. Aus der Theorie der Gleichungen folgt dann, dass $\Delta U' = 0$ die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Summe der Wurzeln der Gleichung $\Lambda = 0$ verschwindet, d. h. dass $\Delta U' = 0$ den Ort eines Punktes R darstellt, für welchen

$$\frac{RR_1}{OR_1} + \frac{RR_2}{OR_2} + \cdots = 0$$

ist. Indem man RR_i durch $(OR_i - OR)$ ersetzt, wird diese Gleichung in

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \cdots$$

übergeführt.

135. Man erkennt in gleicher Art, dass der Polar-Kegelschnitt $\Delta^2 U' = 0$ der Ort eines Punktes ist, für den

$$\Sigma \left(\frac{RR_1}{OR_1} \cdot \frac{RR_2}{OR_2}\right) = 0$$

oder

$$\Sigma \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2}\right) = 0$$

ist, und ähnlich für die Polarcurven höherer Ordnungen. Die Polarcurve k^{ter} Ordnung besitzt die Eigenschaften

$$\frac{1}{n} \Sigma \frac{1}{OR} = \frac{1}{k} \Sigma \frac{1}{OR^*}, \quad \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} \Sigma \frac{1}{OR_1 \cdot OR_2}$$
$$= \frac{1 \cdot 2}{k(k-1)} \Sigma \frac{1}{OR_1^* \cdot OR_2^*}, \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} \Sigma \frac{1}{OR_1 \cdot OR_2 \cdot OR_3}$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{k(k-1)(k-2)} \Sigma \frac{1}{OR_1^* \cdot OR_2^* \cdot OR_3^*}, \text{ etc.}$$

wo wir mit OR einen Radius vector der Curve und mit OR^* einen der Polarcurve bezeichnet haben.

136. Wenn der Punkt O ein unendlich ferner Punkt ist, so können die von ihm aus gemessenen Entfernungen als im Verhältniss Eins zu einander stehend und die Nenner der Brüche $\frac{RR_1}{OR_1}$, $\frac{RR_2}{OR_2}$, . . . als einander gleich betrachtet werden. Die Gleichung $\Sigma \frac{RR_1}{OR_1} = 0$, welche die Eigenschaft der Polarlinie ausdrückt, reduciert sich dann auf $\Sigma (RR_1) = 0$, d. h. die Summe der Abschnitte zwischen der Polare und der Curve in allen den nach O gehenden parallelen Sehnen verschwindet. Die Polarlinie eines unendlich fernen Punktes ist der Durchmesser des Systems paralleler Sehnen, welche denselben zur Richtung haben.

Die Gleichung $\Sigma \left(\frac{RR_1}{OR_1} \cdot \frac{RR_2}{OR_2}\right) = 0$ des Polarkegelschnitts reduciert sich für einen unendlich fernen Punkt O auf

$$\Sigma (RR_1 \,.\, RR_2) = 0$$

oder

$$\Sigma (OR - OR_1)(OR - OR_2) = 0,$$

die Gleichung, welche nach Art. 130. den Diametralkegelschnitt bestimmt. Und so ist allgemein der krummlinige Durchmesser irgendeiner Ordnung mit der Polarcurve derselben Ordnung identisch, für welche die Richtung des Systems paralleler Sehnen, dem der Durchmesser entspricht, der Pol ist.

137. Mac Laurin hat [23]) einen Satz gegeben, welcher die Erweiterung des Satzes von Newton in Art. 129. ist: Wenn man durch einen Punkt O eine gerade Linie zieht, die die Curve in n Punkten schneidet, so werden die Tangenten der Curve in diesen Punkten in Punkten R_1^*, R_2^*, . . . so geschnitten, dass sie mit den Schnittpunkten R_1, R_2, . . . derselben Geraden mit der Curve der Relation $\Sigma \frac{1}{OR} = \Sigma \frac{1}{OR^*}$ genügen.

138. Man weiss, dass das Centrum eines Kegelschnitts als der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf denselben zu betrachten ist und bemerkt sofort, dass für Curven höherer Ordnungen, als in denen jeder geraden Linie $(n-1)^2$ Pole entsprechen (Art. 61.), ein einzelner Punkt von der Be-

deutung des Centrums für einen Kegelschnitt nicht existiert. Es ergiebt sich aber ein solcher für Curven höherer Classen, d. h. wenn man die vorhergehenden Untersuchungen, wie sie offenbar zu thun gestatten, auf Liniencoordinaten anwendet. Dann ergiebt sich für jede Gerade ein Pol, eine Polarcurve zweiter, dritter, etc. Classe bis zu einer Polarcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe aufwärts, die von den n Tangenten der Originalcurve in ihren Schnittpunkten mit der Geraden berührt wird. Wir finden also bei der Untersuchung in Liniencoordinaten auch als den Pol der unendlich fernen Geraden einen einzigen bestimmten Punkt. Untersuchen wir nun die metrischen Eigenschaften des Pols einer Geraden in diesem Sinne und insbesondere des Pols der unendlich fernen Geraden. Wir benutzen das System des Art. 19., in welchem die Coordinaten ξ_i einer geraden Linie den Perpendikeln proportional sind, die von drei festen Punkten auf sie gefällt werden; dann bezeichnet offenbar $l:m$ das Verhältniss der Sinus der Winkel, in welche die Gerade

$$l\xi_1 + m\xi_1', \; l\xi_2 + m\xi_2', \; l\xi_3 + m\xi_3'$$

den Winkel theilt, den die Geraden

$$\xi_1, \; \xi_2, \; \xi_3 \quad \text{und} \quad \xi_1', \; \xi_2', \; \xi_3'$$

mit einander bilden. Die der Gleichung $\Lambda = 0$ entsprechende Gleichung bestimmt das Verhältniss der Sinus der Theile, in welche jener Winkel durch jede der Tangenten zerlegt wird, die man von seinem Scheitel an die Curve n^{ter} Classe ziehen kann. Und wie in Art. 134. besitzt der Pol R einer Geraden die Eigenschaft

$$\Sigma \left(\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1PO}\right) = 0,$$

für P als einen veränderlichen, O als einen festen Punkt der gegebenen Geraden und $R_1, R_2, \ldots$ als die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten. So ist z. B. für eine Curve zweiter Classe diese Relation

$$\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1PO} + \frac{\sin RPR_2}{\sin R_2PO} = 0,$$

d. h. wenn man von einem Punkte P in der festen Geraden

OP Tangenten PR_1, PR_2 an den Kegelschnitt und sodann die Gerade PR so zieht, dass $\{P.OR_1RR_2\}$ ein harmonisches Büschel ist, so geht PR durch einen festen Punkt — die fundamentale Abhängigkeit von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt als Curve zweiter Classe. Wir können die Relation

$$\Sigma\left(\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1PO}\right) = 0$$

in die Form

$$\Sigma\left(\frac{M_1R_1}{R_1O_1}\right) = 0$$

setzen, wenn wir M_1 als den Fusspunkt der Senkrechten von R_1 auf die Gerade RP und O_1 als den Fusspunkt der Senkrechten von demselben Punkt auf die Gerade OP bezeichnen. Denken wir dann speciell die Gerade OP als unendlich fern, so werden die Nenner in der letztern Summe einander gleich und wir erhalten einfacher $\Sigma(M_1R_1) = 0$, d. h. die Summe der Perpendikel ist Null, die man von den Berührungspunkten eines Systems paralleler Tangenten auf eine gleichgerichtete Gerade durch R fällen kann. Mit andern Worten: Das Centrum der mittlern Entfernungen der Berührungspunkte eines Systems von parallelen Tangenten einer gegebenen Curve ist ein fester Punkt, welcher als Centrum derselben betrachtet werden kann — ein Satz von Chasles[24]). In einem Kegelschnitt ist es der Mittelpunkt in der Verbindungslinie der Berührungspunkte paralleler Tangenten, in einer Curve dritter Classe der Schwerpunkt des von diesen Berührungspunkten gebildeten Dreiecks, etc.

139. Es ist bekannt (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 310.), dass die Brennpunkte der Kegelschnitte die Eigenschaft besitzen, dass die von ihnen nach den Kreispunkten im Unendlichen I, J gehenden Geraden die Curve berühren. Diess leitet zu der allgemeinen Erklärung der Brennpunkte von Plücker[25]): Ein Punkt F heisst ein Brennpunkt einer Curve, wenn die geraden Linien FI, FJ die Curve berühren, oder wie wir sagen wollen, wenn er der Durchschnitt einer I-Tangente mit einer J-Tangente ist. Eine Curve ν^{ter} Classe hat dann im Allgemeinen ν^2 Brennpunkte, nämlich die Durchschnitts-

punkte der ν I-Tangenten mit den ν J-Tangenten. Es sind aber nur ν von diesen Brennpunkten reell, so lange die Curve reell ist; denn wenn die Gleichung einer der I-Tangenten $A + iB = 0$ ist, mit A und B als linearen Functionen der Coordinaten, so hat eine unter den J-Tangenten die Gleichung $A - iB = 0$ und diese beiden durchschneiden einander in dem reellen Punkte $A = 0$, $B = 0$, während auf keiner von beiden ein anderer reeller Punkt möglich ist. So hat ein Kegelschnitt $\nu = 2$ vier Brennpunkte, von denen zwei reell sind.

Das Vorige gilt in der Voraussetzung, dass die Punkte I, J keine specielle Lagenbeziehung zur Curve haben. Denken wir aber die Gerade IJ als gewöhnliche oder singuläre Tangente in einem Punkt A oder mehreren Punkten $A, B, ..$ welche von I, J selbst verschieden sind, also z. B. σ fach unter den von I oder J ausgehenden Tangenten der Curve, so werden die I-Tangenten von der σ fach zählenden Linie IJ und von $(\nu - \sigma)$ andern Tangenten gebildet und ebenso die J-Tangenten. Die einzigen Brennpunkte, welche nicht im Unendlichen liegen, sind dann die Schnittpunkte der $(\nu - \sigma)$ I und der ebenso vielen J-Tangenten; also giebt es $(\nu - \sigma)^2$ endliche Brennpunkte, von denen $(\nu - \sigma)$ reell sind. Die Gesammtzahl der ν^2 Brennpunkte wird gebildet von den $(\nu - \sigma)^2$ Brennpunkten in Verbindung mit den je $\sigma(\nu - \sigma)$ fach zählenden Punkten I und J, so wie den σ^2 Schnittpunkten der σ I-Tangenten, welche mit IJ und der σ J-Tangenten, welche mit JI zusammen fallen. Jene zählen nämlich $\sigma(\nu - \sigma)$ fach, als Durchschnitte von jeder der $(\nu - \sigma)$ I- oder J-Tangenten mit jeder der σ I- oder J-Tangenten, welche mit IJ zusammenfallen; im Falle der mit IJ zusammenfallenden σ Tangenten aus I und aus J ist für irgend eine von ihnen IA ihr Berührungspunkt A als ihr Schnittpunkt mit der entsprechenden Tangente JA anzusetzen, indess ihr Durchschnittspunkt mit jeder andern J-Tangente JB unbestimmt ist.

Wenn also die unendlich ferne Gerade die Curve σ mal in reellen Punkten berührt, so giebt es ν reelle Brennpunkte, von denen $(\nu - \sigma)$ im Endlichen als eigentliche Brennpunkte anzusehen und σ die Berührungspunkte mit der unendlich fernen

Geraden sind *). So hat die Parabel ($\nu = 2$, $\sigma = 1$) einen endlich angebbaren Brennpunkt und der andere reelle Brennpunkt fällt mit der Richtung ihrer Axe zusammen.

Ist ferner der Punkt I in der Curve, so muss so lange die Curve reell ist auch J in der Curve liegen und wenn I singulär in der Curve ist, so muss J ein singulärer Punkt derselben von der nämlichen Art sein. Denken wir beide zunächst als einfache Punkte der Curve, so bestehen die $(\nu - \sigma)$ I-Tangenten aus der zweifach zählenden Tangente in I und $(\nu - \sigma - 2)$ andern Tangenten; und ebenso für die J-Tangenten. Die $(\nu - \sigma)^2$ Brennpunkte bestehen dann aus folgenden Gruppen: Dem reellen vierfach zählenden Schnittpunkt der Tangenten in I und J, den je für zwei zählenden $(\nu - \sigma - 2)$ nicht reellen Schnitten der Tangente in I mit den $(\nu - \sigma - 2)$ J-Tangenten und den ebenso vielen nicht reellen Schnittpunkten der Tangente in J mit den I-Tangenten; den $(\nu - \sigma - 2)^2$ Schnittpunkten der beiden Büschel von je $(\nu - \sigma - 2)$ I- und J-Tangenten, von welchen Punkten wie vorher nur $(\nu - \sigma - 2)$ reell sein können, sodass die zwei letzten reellen Brennpunkte in dem Schnitt der Tangenten in I und J vereinigt sind. Betrachtet man nur die reellen Brennpunkte, so ist also dieser Punkt als ein doppelter Brennpunkt zu zählen und wir halten es für vortheilhaft, ihn so zu bezeichnen, dürfen aber nicht vergessen, dass er vierfach ist, wenn wir zugleich die nicht reellen Brennpunkte zählen wollen. So ist im Falle des Kreises das Centrum der einzige Brennpunkt, welcher als vierfach zu denken ist, wenn wir betrachten, dass in ihm die vier Brennpunkte eines Kegelschnitts vereinigt sind, und den wir als Doppelbrennpunkt bezeichnen, insofern die beiden reellen Brennpunkte in ihm zusammenfallen.

Wenn ferner jeder der Punkte I, J ein ε facher Punkt der Curve ist, so zeigt die analoge Ueberlegung, dass es ε^2 Brennpunkte giebt, welche vierfach zählen und von denen ε reell sind; ferner $2\varepsilon\,(\nu - \sigma - 2\varepsilon)$ nicht reelle Brennpunkte,

---

*) Cayley betrachtet es als den natürlichern Gesichtspunkt, die $(\nu - \sigma)^2$ als die einzigen und somit die $(\nu - \sigma)$ als die einzigen reellen Brennpunkte anzusehen.

deren jeder für zwei zählt und $(\nu - \sigma - 2\varepsilon)^2$ einfache Brennpunkte, von denen $(\nu - \sigma - 2\varepsilon)$ reell sind. Betrachten wir dann sowohl die reellen als die nicht reellen Brennpunkte, so sind ε^2 vierfache, $2\varepsilon(\nu - \sigma - 2\varepsilon)$ doppelte und $(\nu - \sigma - 2\varepsilon)^2$ einfache Brennpunkte zu zählen; beachten wir ausschliesslich die reellen, so giebt es von solchen ε doppelte, $\nu - \sigma - 2\varepsilon$ einfache und σ, welche in unendlicher Ferne liegen.

Wenn die Punkte I und J Inflexionspunkte oder Spitzen sind, so zählt die Tangente in I und J dreifach unter den I- oder J-Tangenten und es gehen von jedem dieser Punkte $(\nu - \sigma - 3)$ andere Tangenten aus. Die $(\nu - \sigma)^2$ Brennpunkte setzen sich dann zusammen aus einem neunfach zählenden, aus $(\nu - \sigma - 3) + (\nu - \sigma - 3)$ dreifach zählenden und $(\nu - \sigma - 3)^2$ einfach zählenden. Von diesen letzteren sind $(\nu - \sigma - 3)$ reell und der einzige andere reelle Brennpunkt ist der Durchschnitt der Tangenten in I und J, der als unter den reellen Brennpunkten dreifach zählend, gewöhnlich als dreifacher Brennpunkt betrachtet wird, während er bei Zählung der reellen wie der imaginären neunfach gezählt werden muss. In der Ausdehnung dieser Theorie auf die Fälle, in welchen I und J singuläre Punkte von höheren Graden der Vielfachheit mit verschiedenen vereinigten Tangenten sind, oder in welchen dieselben Punkte sind, in denen die Tangente mehr als zwei Punkte mit der Curve gemein hat, oder endlich, in welchen sie gewöhnliche oder singuläre Punkte sind, die die Gerade IJ zu ihrer gemeinsamen Tangente haben, liegt keine Schwierigkeit.

140. Wenn A, A' zwei reelle Brennpunkte der Curve sind, so schneiden sich die Geraden AI, AJ; $A'I, A'J$ in zwei imaginären Punkten B, B', welche auch Brennpunkte der Curve sind. Zwischen beiden Paaren von Punkten findet die Beziehung statt, dass die Geraden AA', BB' sich in einem Punkte O rechtwinklig halbieren, so dass

$$OA = OA' = i \,.\, OB = i \,.\, OB'$$

ist. Man hat die Punkte A, A' und B, B' als Anti-Punkte bezeichnet. Ihre Beziehung ist eine in der Geometrie der Ebene häufig begegnende: Ein Kegelschnitt besitzt zwei Paare von

Brennpunkten, welche Anti-Punkte bilden; jeder durch A, A' gehende Kreis schneidet jeden durch B, B' gehenden unter rechten Winkeln. Wir fügen bei, dass aus ν reellen Brennpunkten $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Paare entstehen, von denen jedes ein Paar von Anti-Punkten liefert, so dass wir die $(\nu^2-\nu)$ übrigen Brennpunkte erhalten.

141. Man erhält die Coordinaten der Brennpunkte einer Curve, indem man die Gleichungen der Tangenten bildet, welche von dem Punkte I an die Curve gehen. Dieselbe wird von der Form $P+iQ=0$ sein, während die entsprechende Gleichung für den Punkt J die Form $P-iQ=0$ haben muss, so dass die Durchschnittspunkte der beiden Systeme durch die Gleichungen $P=0$, $Q=0$ gegeben sind. Bezeichnen wir wie schon früher die ersten Differentiale des Polynoms U der Curvengleichung nach x, respective y durch U_1 und U_2 und die zweiten Differentiale durch U_{11}, U_{12}, U_{22}, etc., so ist nach Art. 78. die Gleichung des vom Punkte $1, i, 0$ ausgehenden Tangentensystems zu erhalten durch Bildung der Discriminante von

$$\lambda^n U+\lambda^{n-1}(U_1+iU_2)+\tfrac{1}{2}\lambda^{n-2}(U_{11}+2iU_{12}-U_{22})+\cdots=0.$$

Ist also z. B. die Curve ein Kegelschnitt, so hat man den reellen und den mit dem Factor i behafteten Factor von

$$\{U_1^2-U_2^2-2U(U_{11}-U_{22})\}+2i(U_1U_2-2UU_{12})$$

getrennt gleich Null zu setzen, um zwei die Brennpunkte enthaltende Oerter zu finden. Die Combination dieser Gleichungen zeigt, dass die Brennpunkte in zwei geraden Linien liegen, deren Gleichung ist

$$U_{12}(U_1^2-U_2^2)-(U_{11}-U_{22})U_1U_2=0;$$

diese sind die Axen.

Ganz dieselben Gleichungen bestimmen auch die Brennpunkte einer durch die Punkte I und J gehenden Curve dritter Ordnung, so wie die einer Curve vierter Ordnung, welche diese Punkte zu Doppelpunkten hat, etc.; denn man sieht in allen diesen Fällen leicht, dass alle oben nicht geschriebenen Glieder der Gleichung $\Lambda=0$, deren Discriminante man zu bilden hat, wirklich verschwinden.

142. Wir können die Brennpunkte auch durch die Aufstellung der Bedingung bestimmen, unter welcher die Gerade

$$(x - x') + i(y - y') = 0$$

die Curve berührt (vergl. „Kegelschnitte" Art. 310.) oder mit andern Worten durch die Substitution von 1, $i, -(x' + iy')$ für ξ_1, ξ_2, ξ_3 oder ξ, η, ζ in die Gleichung in Liniencoordinaten. Die Coordinaten der Brennpunkte ergeben sich aus den Gleichungen, die durch die Gleichsetzung des reellen und des mit dem Factor i behafteten Theils der so entstehenden Gleichung mit Null entstehen.

Es ist nicht schwer, für jede dieser Gleichungen eine geometrische Interpretation zu finden. Denken wir die Bedingung der Berührung der Curve durch

$$x - x' + p(y - y') = 0$$

in der Form erhalten

$$ap^n + bp^{n-1} + cp^{n-2} + \cdots = 0,$$

in welcher $a, b, \ldots$ Functionen von x', y' sind, so sind nach der Theorie der Gleichungen $-b:a$, $c:a$, etc. die Summe, die Summe der Producte in Paaren, etc. für die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die von x', y' ausgehenden Tangenten der Curve mit der Axe der x bilden. Setzen wir $p = i$, und den reellen und den mit i behafteten Theil der Gleichung getrennt gleich Null, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$a - c + e - \cdots = 0, \qquad b - d + f - \cdots = 0;$$

nach der bekannten Formel für die Tangente der Summe, drückt die zweite dieser Gleichungen aus, dass die Summe der mit der Axe der x von den aus $x'y'$ gehenden Tangenten der Curve gebildeten Winkel Null oder ein Vielfaches von π ist; und die erste besagt, dass die Summe der Winkel ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist. Der Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Winkel der Tangenten gegeben ist, die die von ihm ausgehenden Tangenten einer Curve n^{ter} Classe mit einer festen Geraden bilden, ist daher eine Curve n^{ter} Ordnung, deren Gleichung für die feste Gerade als Axe der x

$$(a - c + e - \cdots) \tan \theta = b - d + f - \cdots$$

ist; und welches auch immer die feste Gerade oder der Winkel θ sei, so enthält dieser Ort die Brennpunkte der Curve. Diess kann paradox erscheinen, weil man daraus schliessen muss, dass die Summe der von den Tangenten der Curve aus einem Brennpunkte mit irgend einer Geraden gebildeten Winkel jeder gegebenen Grösse gleich sein muss. Es ist aber darin begründet, dass die Tangenten von zweien dieser Winkel $\pm i$ sind und die Tangente ihrer Differenz daher die Form $0:0$ annimmt, die in der That jeden beliebigen Werth darstellen kann. In der That kann für $\tan \varphi = i$ der Winkel φ als ein unendlicher Winkel betrachtet werden, weil er die Eigenschaft besitzt, dass

$$\sin \varphi = \cos \varphi = \infty \text{ und } \tan (\varphi + \alpha) = \tan \varphi$$

ist; denn die Differenz zweier unendlichen Grössen ist unbestimmt.

Wir sahen in Art. 110., dass jede Tangente durch einen der Punkte I, J mit der Normale zusammenfällt; wir schliessen daraus, dass jeder Brennpunkt einer Curve auch für ihre Evolute und für alle ihre Involuten oder Evolventen ein Brennpunkt ist.

143. Eine wichtige Eigenschaft der von den Brennpunkten auf eine beliebige Tangente zu fällenden Perpendikel ergiebt sich sofort aus der Gleichung der Curve in solchen Liniencoordinaten (Art. 19. und „Kegelschn." Art. 318., 3.), welche die Entfernung der Geraden von drei festen Punkten sind. Seien durch $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0, \ldots$ die ν Brennpunkte und durch $\omega = 0$, $\omega^* = 0$ die Punkte I, J dargestellt, so muss die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten von der Form

$$\alpha\beta\gamma\delta \ldots = \omega\omega' \varphi$$

sein, mit φ als einer Function $(\nu-2)^{\text{ten}}$ Grades in den Veränderlichen, weil $\alpha\omega$, $\alpha\omega'$, etc. Tangenten der Curve sind. Für die Curven zweiter Classe giebt diess die Eigenschaft, dass das Product der Senkrechten von den Brennpunkten auf eine Tangente constant ist, weil für $\omega\omega'$ eine Constante substituiert werden kann. („Kegelschnitte" Art. 318., 2.)

Ebenso wird mit Ersetzung von $\omega\omega'$ durch eine Constante die allgemeine Gleichung der Curven dritter Classe

$$\alpha\beta\gamma = \varkappa\delta \quad \text{für} \quad \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$$

als die drei Brennpunkte und $\delta = 0$ als einen vierten Punkt, der dadurch bestimmt ist, dass die drei einzigen Tangenten, die von den Brennpunkten ausser den nach I, J gehenden Geraden an die Curve gehen, sich in ihm schneiden. (Für das dualistisch entsprechende projectivisch allgemeine Theorem in Bezug auf Curven dritter Ordnung vergl. Art. 149.) Die Gleichung sagt aus, dass das Product der drei Brennpunktsabstände einer Tangente zur Entfernung derselben Tangente vom Punkte $\delta = 0$ ein constantes Verhältniss hat. Wenn die Curve durch die Punkte I, J geht, so hat sie einen Doppelbrennpunkt und die Gleichung nimmt die Form

$$\alpha^2\beta = \varkappa\delta$$

an, deren Bedeutung gleichfalls offenbar ist.

Wenn ein Brennpunkt A im Unendlichen liegt, so lässt sich die entsprechende Modification der Gleichung erkennen, indem man zuerst für die Coordinate α die mit AB dividierte senkrechte Entfernung von A zu einer beliebigen Tangente nimmt und sodann für das unendlich ferne A als Richtung von AB den $\cos\theta$ dafür nimmt, wo θ der Winkel ist, den AB mit der Richtung der Normalen zur Tangente macht. So wird die Gleichung eines Kegelschnitts $\alpha\beta = \varkappa^2$ in dem Falle der Parabel, wo A in unendlicher Ferne liegt, $\beta\cos\theta = \varkappa$ und lehrt, dass der Ort des Fusspunktes der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Normalen eine gerade Linie ist. Ebenso wird für eine Curve dritter Classe die Gleichung $\alpha\beta\gamma = \varkappa\delta$ in $\beta\gamma\cos\theta = \varkappa\delta$ übergeführt, welche in der Form

$$\beta\gamma = \varkappa\delta'$$

geschrieben werden kann, wenn δ' den von der veränderlichen Tangente in einer durch D parallel zu AB gezogenen Geraden bestimmten Abschnitt bezeichnet.

Die Gleichung von Curven vierter Classe ist

$$\alpha\beta\gamma\delta = \varkappa^2\varphi,$$

wenn $\varphi = 0$ den Kegelschnitt bezeichnet, welcher nach dieser Gleichung von den acht Brennpunktstangenten berührt wird, die nicht durch die Punkte I oder J gehen. Wenn aber $\eta = 0$, $\zeta = 0$ die Brennpunkte dieses Kegelschnitts bezeichnen, so geht die Gleichung in die Form von leicht erkennbarer geometrischer Bedeutung über

$$\alpha\beta\gamma\delta = k^2\eta\zeta + l^4.$$

Diese Gleichung schliesst die speciellere

$$\alpha\beta\gamma\delta = l^4 \quad \text{oder} \quad = \omega^2\omega'^2$$

ein, welche eine Curve darstellt, die die Punkte

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0, \ \delta = 0$$

zu Doppelbrennpunkten hat; ebenso die Form

$$\alpha^3\beta = \omega^2\omega'^2,$$

für welche die Punkte I, J Inflexionspunkte sind, etc.

So giebt im Allgemeinen die Gleichung einer Curve ν^{ter} Classe in Liniencoordinaten eine Relation ersten Grades zwischen dem Product der ν Normalen von den Brennpunkten, von $(\nu - 2)$ andern Normalen, von $(\nu - 4)$ ferneren Normalen, etc. und man kommt so zuletzt entweder auf eine einfache Normale oder auf ein constantes Glied.

144. Aus diesen die Brennpunktsentfernungen einer Tangente verbindenden Relationen können Relationen unter den Winkeln der Brennstrahlen mit der Tangente leicht abgeleitet werden. Denn wenn AP die Normale α auf die Tangente der Curve im Punkte R ist und $d\varphi$ der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten ist, so ist $d\alpha = RP \,.\, d\varphi$. Ebenso ist $d\beta = RP' \,.\, d\varphi$, etc., so dass wir in dem Differential der die Brennpunktsdistanzen der Tangente verbindenden Relation für jedes $d\alpha$ den entsprechenden Abschnitt der Tangente zwischen dem Fusspunkt der Brennpunktsnormale und dem Berührungspunkt substituieren können. So leiten wir aus $\alpha\beta\gamma = k^2\delta$ die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\beta}{\beta} + \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{d\delta}{\delta} = 0$$

ab, also

$$\frac{RP}{AP}+\frac{RP'}{BP'}+\frac{RP''}{CP''}-\frac{RP'''}{DP'''}=0$$

oder

$$\cot\theta+\cot\theta'+\cot\theta''-\cot\theta'''=0$$

für $\theta = \sphericalangle ARP$, den Neigungswinkel der Tangente zum Brennstrahl AR, etc.

145. Das Beispiel der Kegelschnitte führt zu der Erwartung, dass sich einfache Relationen unter den Entfernungen eines Punktes der Curve von den Brennpunkten ergeben müssten. Eine allgemeine Theorie solcher Relationen ist nicht ersichtlich, aber man kann leicht besondere Curven finden, für welche sie existieren; es ist nur nöthig, irgend eine Relation zwischen den Entfernungen eines veränderlichen Punktes von festen Punkten zu schreiben und den Ort aufzusuchen, für welchen sie erfüllt ist. Jede in Function der Coordinaten ausgedrückte Entfernung enthält eine Quadratwurzel und wenn wie gewöhnlich geschieht die von Wurzeln befreite Gleichung von der Form

$$u\varrho^2 = v^2 w$$

ist, so sind die beiden durch $\varrho^2 = 0$ dargestellten nicht reellen Geraden Tangenten der Curve und der feste Punkt F, den sie bestimmen, ist ein Brennpunkt.

In dieser Weise können die Relationen

$$\varrho + m\varrho' = d, \quad l\varrho + m\varrho' + n\varrho'' = 0,$$
$$\varrho\varrho' = d^2, \quad a\varrho^2 + b\varrho\varrho' + c\varrho'^2 = d^2, \text{ etc.}$$

untersucht werden. Die erste derselben giebt eine Ellipse oder Hyperbel für $m = \pm 1$, einen Kreis für $d = 0$, in andern Fällen ein Cartesisches Oval; die zweite im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung mit den Punkten I, J als Doppelpunkten oder eine bicirculare Curve vierter Ordnung; insbesondere aber für $l \pm m \pm n = 0$ eine durch die Punkte I, J gehende oder circulare Curve dritter Ordnung. Die dritte giebt eine Cassini'sche Curve (Art. 55.); die vierte im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung und in der speciellen Voraussetzung

$$a \pm b + c = 0,$$

wo die linke Seite der Gleichung durch $\varrho \pm \varrho'$ theilbar ist, eine Curve dritter Ordnung. Wir verschieben die weitere Untersuchung dieses Gegenstandes bis zur specielleren Behandlung dieser Curven.

Aus einer die Brennpunktsdistanzen verbindenden Relation kann immer eine solche zwischen den Winkeln der Brennstrahlen gegen die Tangente abgeleitet werden; denn man beweist (vergl. „Kegelschnitte“ Art. 259.), dass jedes $d\varrho$ gleich $\cos\theta\, ds$ ist für θ als den Winkel zwischen Brennstrahl und Tangente. So folgt aus

$$\varrho + m\varrho' = d$$

die Relation

$$\cos\theta + m\cos\theta' = 0, \text{ etc.}$$

Aus dem im letzten Artikel für $d\alpha$, etc. gegebenen Werth ergiebt sich auch

$$R\,d\alpha = \varrho\, d\varrho, \text{ etc.}$$

für R als den Krümmungsradius. So folgt z. B. aus der Bedingung, dass

$$l\alpha + m\beta + \cdots$$

einer Constanten gleich sei, dass auch

$$l\varrho^2 + m\varrho'^2 + \cdots$$

eine Constante ist.

146. Wenn wir durch N die Zahl von Bedingungen bezeichnen, welche zur Bestimmung einer Curve von bestimmter Ordnung nöthig ist (Art. 27.), so bringt die Voraussetzung, dass eine solche Curve circular sei, d. h. dass sie durch die Punkte I, J geht und dass man von ihr $N-3$ andere Punkte kenne, mit sich, dass der Ort ihres Doppelbrennpunktes oder des Schnittes ihrer Tangenten in I und J ein Kreis ist. Denn es giebt nur eine durch N Punkte bestimmte Curve ihrer Ordnung, wenn zu den obigen Bedingungen ein zu I benachbarter Punkt, d. h. die Tangente FI in I hinzugefügt wird und es ist somit dann auch die Tangente in J bestimmt. Der Punkt F ist also der Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen von zwei projectivischen Büscheln

(„Kegelschnitte“ Art. 298.), weil jedem Strahl des einen ein und nur ein Strahl des andern entspricht und umgekehrt; sein Ort ist also ein Kegelschnitt, welcher I, J, d. h. die Scheitel der Büschel enthält, und somit ein Kreis. Dieser Kegelschnitt zerfällt überdiess in die Gerade IJ und eine andere Gerade, wenn der Strahl IJ, der beiden Büscheln gemeinschaftlich ist, sich selbst entspricht. Diess ist im gegenwärtigen Beispiel für $\nu = 2$ der Fall, weil IJ einen durch I und J gehenden Kegelschnitt nicht berühren kann, ohne dass dieser in zwei Gerade zerfällt; es ergiebt sich dann der Satz, dass die Centra der durch zwei feste Punkte gehenden Kreise in einer Geraden liegen. Wenn ν grösser ist als zwei, so ist der Ort im Allgemeinen ein Kreis.

147. Wenn für eine Curve vorbestimmter Classe $N - 1$ Tangenten gegeben sind, so wird dieselbe durch eine Tangente FI, die man hinzufügt, vollkommen bestimmt, die Schlüsse des letzten Artikels sind anwendbar und der Ort des Brennpunkts ist ein Kreis, wenn die Bedingungen von solcher Art sind, dass an die durch sie bestimmte Curve vom Punkte J nur eine Tangente gezogen werden kann. Diess findet statt, wenn unter den gegebenen Bedingungen Vielfachheit der Linie IJ als Tangente im Grade $(\nu - 1)$ ist, da dann von jedem Punkte dieser Linie aus nur eine weitere Tangente an die Curve geht. Wir sahen in Art. 41., dass ein vielfacher Punkt vom Grade k mit $\frac{1}{2}k(k+1)$ Doppelpunkten äquivalent war und schliessen, dass die Bestimmung der Geraden IJ als einer $(\nu - 1)$ fachen Tangente mit der Angabe von $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ Tangenten äquivalent ist. Indem man dann bemerkt, dass

$$N - \tfrac{1}{2}\nu(\nu - 1) = 2\nu$$

ist, sieht man, dass für eine Curve ν^{ter} Classe bei $(2\nu - 1)$ Tangenten und der unendlich fernen Geraden als einer $(\nu - 1)$ fachen Tangente der Ort des Brennpunktes — es giebt in diesem Falle nur einen — ein Kreis ist. Daraus ist für die Parabeln zu drei festen Tangenten der Ort der Brennpunkte ein Kreis. Er ist auch ein Kreis für die Curven dritter Classe mit fünf festen Tangenten und der unendlich fernen Geraden als Doppeltangente.

Von diesem System ist das zusammengesetzte ein specieller Fall, welches von der Richtung der einen unter fünf Geraden und von der Parabel, welche die andern vier berühren, gebildet wird, und der Brennpunkt der Parabel ist der Brennpunkt des zusammengesetzten Systems. So erhält man den Satz[26]), dass die Brennpunkte der fünf Parabeln in einem Kreise liegen, welche durch je vier von fünf Geraden bestimmt sind. (Vergl. „Kegelschnitte“ Art. 284., 2.)

Fünftes Kapitel.

Curven dritter Ordnung.

148. Es ist in Art. 42. bewiesen worden, dass eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt, aber dann keine andern vielfachen Punkt haben kann und damit die fundamentale Theilung dieser Curven in solche ohne Doppelpunkt, solche mit einem Doppelpunkt, dessen beide Tangenten verschieden sind, und solche mit einem Rückkehr- oder stationären Punkt, gegeben. Die Plücker'schen Zahlen (Art. 81.) für diese drei Fälle sind respective

μ	δ	$\varkappa$	ν	τ	ι
3	0	0	6	0	9
3	1	0	4	0	3
3	0	1	3	0	1

Diese Curven sind also respective von der sechsten, vierten oder dritten Classe, d. h. von einem willkürlichen Punkte aus können sechs, vier oder drei Tangenten an dieselben gezogen werden; liegt der fragliche Punkt in der Curve, so zählt ihre Tangente in ihm für zwei unter diesen Tangenten (Art. 79.) und die Zahl der ausser ihr von ihm an die Curve gehenden Tangenten ist also vier, zwei oder eins; ist derselbe ein Inflexionspunkt der Curve, so zählt die zugehörige stationäre Tangente für drei unter den von ihm ausgehenden Curven-Tangenten und die Zahl der von ihr verschiedenen wird noch um eine Einheit mehr vermindert.

Die Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt zerfallen (Art. 38.) naturgemäss weiter in solche, bei denen die Tangenten im Doppelpunkt reell, und solche, bei denen sie nicht

reell sind, also mit Knotenpunkt und mit isoliertem Punkt respective. Wir werden später sehen, dass eine analoge Untereintheilung für die Curven dritter Ordnung ohne singulären Punkt existiert; aber für jetzt brechen wir die Discussion der Eintheilung der Curven dritter Ordnung hier ab, weil die Kenntniss einiger allgemeiner Eigenschaften dieser Curven für das Verständniss derselben von wesentlichem Vortheil ist. Wir verschieben ebenso die Discussion der allgemeinen Gleichung und die Untersuchung ihrer Invarianten und beginnen damit, die Anwendung früher entwickelter allgemeiner Sätze über die algebraischen Curven auf den Fall der Curven dritter Ordnung zu zeigen; zunächst entsprechend dem ersten Abschnitt des II. Kapitels in Bezug auf die Durchschnitte der Curven.

I. Abschnitt.

Durchschnitt einer gegebenen Curve dritter Ordnung mit andern Curven.

148. Wir haben in Art. 9. bewiesen, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht Punkte einer gegebenen Curve dieser Art gehen, einen neunten festen Punkt derselben enthalten. Diess ist ein Fundamentalsatz, der zu dem grössern Theil der Eigenschaften der Curven dritter Ordnung leitet.

Wenn insbesondere zwei gerade Linien von den Gleichungen

$$A=0, \quad B=0$$

eine Curve dritter Ordnung in Punkten

$$A, A', A''; \quad B, B', B''$$

respective schneiden und wenn die Geraden

$$AB, \ A'B', \ A''B'',$$

deren Gleichungen wir durch

$$D=0, \quad E=0, \quad F=0$$

dargestellt denken wollen, die Curve ferner in den Punkten C, C', C'' respective schneiden, so geht die Gerade $C=0$,

welche zwei dieser Punkte C, C' verbindet, auch durch den dritten. Denn die Geraden

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

bilden eine Curve dritter Ordnung durch diese neun Punkte und die Geraden

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

eine zweite, welche durch acht von denselben geht und daher auch den neunten C'' enthält, der, weil er nicht in den schon je drei Punkte der Curve enthaltenden Geraden $A = 0$, $B = 0$ liegen kann, in der Geraden $C = 0$ liegen muss.

Weil die gegebene Curve dritter Ordnung durch die Durchschnitte der Oerter

$$ABC = 0, \quad DEF = 0$$

geht, so muss ihre Gleichung in der Form

$$DEF - kABC = 0$$

darstellbar sein.

150. Setzen wir voraus, dass die Geraden $A = 0$, $B = 0$ zusammenfallen, so folgt als Specialfall des vorigen der Satz: Wenn eine gerade Linie $A = 0$ die Curve in drei Punkten A, A', A'' schneidet, so schneiden die Tangenten der Curve in diesen Punkten,

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

die Curve respective in drei weiteren Punkten C, C', C'', welche in einer geraden Linie $C = 0$ liegen. Die Gleichung der Curve kann in die Form

$$DEF - kA^2C = 0$$

gesetzt werden.

Der Punkt C, in welchem die Tangente im Punkte A die Curve schneidet, wird der Tangentialpunkt von A genannt und die gerade Linie $C = 0$, in welcher die Tangentialpunkte von drei Punkten (A, A', A'') einer Geraden liegen, heisst die Begleiterin (Satellite) der Geraden ($A = 0$). Wir werden später zeigen, wie aus der Gleichung

$$A = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_1 x_1 + \cdots = 0$$

die Gleichung $C = 0$ gebildet werden kann; eine Gerade hat eine reelle Begleiterin auch dann, wenn sie die Curve nicht

in drei reellen, sondern in zwei nicht reellen Punkten und einem reellen Punkte schneidet; die Tangenten in den ersten beiden erscheinen in der Form

$$P \pm iQ = 0$$

und das Product ihrer Gleichungen ist reell, die Gleichung der Curve kann in der Form

$$D(P^2 + Q^2) = kA^2C$$

geschrieben werden.

Zwei besondere Fälle unseres Satzes sind bemerkenswerth. Wenn zuerst die Linie $A = 0$ die unendlich ferne Gerade der Ebene ist, so sind die Tangenten der Curve

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

in ihren Schnittpunkten mit derselben die Asymptoten der Curve; jede derselben schneidet die Curve in einem weiteren Punkte und wir lernen, dass diese drei Punkte in einer Geraden liegen, der Begleiterin der unendlich fernen Geraden. In diesem Falle ist die Gleichung der Curve auf die Form

$$DEF = kC$$

reducierbar, welche aussagt, dass das Product der senkrechten Entfernungen eines Curvenpunktes von den Asymptoten zu seiner Entfernung von der Geraden $C = 0$ in einem constanten Verhältniss ist.

Wenn zweitens die Punkte A, A' Inflexionspunkte sind, so fallen ihre respectiven Tangentialpunkte mit ihnen selbst zusammen und die begleitende Gerade $C = 0$ ist somit von $A = 0$ nicht verschieden, d. h. der dritte Punkt derselben in der Curve A'' ist auch ein Inflexionspunkt. (Vergl. Art. 126., Beisp. 3.) Die Gleichung der Curve ist auf die Form

$$DEF = kA^3$$

reducierbar, für $A = 0$ als die Gleichung der durch die Inflexionspunkte gehenden Geraden und

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

als die respectiven Gleichungen der drei Tangenten in denselben.

151. Der Satz des vorigen Artikels lautet, wenn man von der Linie $C = 0$ anstatt von $A = 0$ ausgeht, so: Für drei in einer Geraden liegende Punkte C, C', C'' einer Curve dritter Ordnung geht die Verbindungslinie des Berührungspunktes A einer der Tangenten der Curve aus dem ersten C mit dem Berührungspunkt A' einer der Tangenten aus dem zweiten C' immer auch durch den Berührungspunkt einer der Tangenten aus dem dritten Punkte C''. Weil nur eine Tangente in einem Punkte an eine Curve gezogen werden kann, so entspricht jeder Lage von $A = 0$ nur eine Lage von $C = 0$; weil aber im Falle der Curve dritter Ordnung ohne singulären Punkt vier Tangenten von einem Punkte der Curve aus an dieselbe gehen, so entsprechen einer Lage von $C = 0$ sechzehn Lagen von $A = 0$. Die zwölf Berührungspunkte liegen in den sechzehn Linien $A = 0$, nämlich drei in jeder derselben und durch jeden Berührungspunkt gehen vier derselben.

Betrachten wir specieller den Fall, wo $C = 0$ die Curve berührt, wo also zwei der Punkte, sagen wir C, C', zusammenfallen, so sehen wir, dass die gerade Linie, welche einen der Berührungspunkte A_1'' der Tangenten von C'' mit einem der Berührungspunkte A_1 der Tangenten von C verbindet, auch durch einen der andern Berührungspunkte A_2 der Tangenten von C gehen muss; und in gleicher Art die Gerade $A_1'' A_3$ durch A_4. So dass der Satz gilt: Die vier Berührungspunkte A_1, A_2, A_3, A_4 der von einem Punkte C in der Curve ausgehenden Tangenten derselben sind die Ecken eines Vierecks, dessen drei Gegenseiten-Schnittpunkte oder Centra auch in der Curve liegen; und die Tangenten der Curve in diesen Punkten so wie die Tangente derselben in C schneiden sie sämmtlich in demselben Punkte C''.

152. Wir kommen auf den Fall zurück, wo $C = 0$ die Curve nicht berührt und nehmen an, dass die Berührungspunkte der von C ausgehenden Tangenten A_1, A_2, A_3, A_4 und die der von C' ausgehenden A_1', A_2', A_3', A_4' seien. Gehen wir dann von zwei Punkten der ersten Gruppe aus

z. B. von A_1, A_2, so erhellt, indem wir die Punkte der zweiten Gruppe in einer bestimmten Art in Paare trennen, z. B. A_1', A_2' und A_3', A_4' und dann das Paar A_1, A_2 zuerst mit A_1', A_2' verbinden, dass die Linien $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ sich in einem Punkte der Curve und die Linien $A_1 A_2'$, $A_2 A_1'$ sich in einem andern Punkte der Curve schneiden; und ferner, wenn wir A_1, A_2 mit A_3', A_4' verbinden, dass $A_1 A_3'$, $A_2 A_4'$ in einem dritten und $A_1 A_4'$ und $A_2 A_3'$ in einem vierten Punkte der Curve zusammen laufen — nämlich so, dass die vier neuen Punkte die Berührungspunkte der von C'' ausgehenden Tangenten der Curve sind. Wenn wir dann zwei Punkte als correspondierend bezeichnen, deren Tangenten sich in der Curve schneiden, so ist klar, dass jede zwei der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 und ebenso jede zwei der Punkte A_1', A_2', A_3', A_4' correspondierend sind. Von den zwei Punkten A_1, A_2 aus können aber insbesondere die Punkte A_1', A_2' oder A_3', A_4' als correspondierende Punkte derselben Art mit A_1, A_2 bezeichnet werden, auf Grund der Eigenschaft, dass aus zwei Paaren derselben Art durch Verbindung jedes Punktes des einen mit jedem des andern ein Vierseit entsteht, dessen zwei neue Ecken gleichfalls Punkte der Curve und zwar selbst correspondierende Punkte von der nämlichen Art mit den gegebenen Paaren sind. Es folgt daraus, dass drei Arten correspondierender Punkte existieren, nämlich die von der Art $A_1 A_2$ oder $A_3 A_4$, der Art $A_1 A_3$ oder $A_2 A_4$ und der Art $A_1 A_4$ oder $A_2 A_3$; und dass wir aus einem Paare $A_1 A_2$ das ganze System der entsprechenden Punkte derselben Art erhalten, indem wir einen veränderlichen Punkt K der Curve immer mit A_1 und A_2 durch gerade Linien verbinden, die dann die Curve ausserdem in correspondierenden Punkten derselben Art $A_1 A_2$ durchschneiden.

Da diese Theorie zum grössten Theil von Maclaurin herrührt [27]), so mag sie als Maclaurin's Theorie der correspondierenden Punkte einer Curve dritter Ordnung benannt werden.

153. Sind dann, immer für den Fall, wo $C = 0$ die Curve nicht berührt,

$$D_1 = 0, \quad E_1 = 0, \quad F_1 = 0$$

Tangenten durch die Punkte C, C', C'' respective, so sahen wir, dass die Gleichung der Curve immer in die Form

$$D_1 E_1 F_1 - A_1^2 C = 0$$

gebracht werden kann. Sind dann

$$D_2 = 0, \quad E_2 = 0$$

ein anderes Paar der durch C, C' gehenden Tangenten, so dass ihre Berührungssehne durch den Berührungspunkt von $F_1 = 0$ geht, so kann die Gleichung auch in die Form

$$D_2 E_2 F_1 - A_2^2 C = 0$$

gesetzt werden; daraus folgt aber die Identität

$$(D_1 E_1 - D_2 E_2)\, F_1 = (A_1^2 - A_2^2)\, C,$$

deren rechte Seite gleich Null gesetzt drei gerade Linien darstellt und deren linke Seite daher dieselben drei Geraden ausdrücken muss. In Folge dessen muss einer der Factoren von

$$D_1 E_1 - D_2 E_2 = 0$$

mit $C = 0$ übereinstimmen, welches durch die Punkte

$$D_1 D_2, \quad E_1 E_2$$

geht; der andre Factor, welcher die Verbindungslinie von $D_1 E_2$ mit $D_2 E_1$ darstellt, muss mit $A_1 \pm A_2 = 0$ übereinstimmen, wenn $F_1 = 0$ mit $A_1 \mp A_2 = 0$ sich deckt. Wir sehen, dass die letztern beiden Geraden und die Sehnen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ ein harmonisches Büschel bilden, dessen Scheitel der Berührungspunkt von $F = 0$ ist.

Wir werden später diesen Satz auf den Fall anwenden, wo die Punkte C, C' die imaginären Kreispunkte I, J im Unendlichen sind; die Punkte $D_1 E_2$, $D_2 E_1$ sind dann Brennpunkte und $F_1 = 0$ ist eine Tangente parallel der einzigen reellen Asymptote der Curve.

Wenn die Punkte C, C' zusammenfallen, so bilden die Gerade von C nach dem Berührungspunkt von $F_1 = 0$, $F_1 = 0$ selbst und die beiden Sehnen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ ein harmonisches Büschel.

154. Daraus ergiebt sich ein anderer Satz von Maclaurin: Jede Gerade durch einen Punkt A in der Curve dritter Ordnung wird harmonisch getheilt in den Punkten β, γ der Curve, die sie ausserdem

enthält, und in den zwei Punkten δ, δ', in denen sie ein Paar der Sehnen schneidet, welche die Berührungspunkte der von A an die Curve gehenden Tangenten verbinden. Denn wenn die Gerade die Tangente $C = 0$ im Punkte E schneidet, so ist, weil sie $A_1 = 0$ und $B_1 = 0$ in A trifft nach Art. 137.

$$\frac{1}{\delta A} + \frac{1}{\delta \beta} + \frac{1}{\delta \gamma} = \frac{2}{\delta A} + \frac{1}{\delta E}$$

oder

$$\frac{1}{\delta \beta} + \frac{1}{\delta \gamma} = \frac{1}{\delta A} + \frac{1}{\delta E};$$

und da nach dem letzten Artikel $\delta \delta'$ ein harmonisches Mittel zwischen δA und δE ist, so ist es auch ein solches zwischen $\delta \beta$ und $\delta \gamma$.

Wenn die Curve einen Doppelpunkt hat, so können nur zwei Tangenten von einem ihrer Punkte an die Curve gezogen werden; aber der eben bewiesene Satz behält seine Geltung, wenn wir für die zweite der Sehnen die gerade Linie substituieren, welche den Doppelpunkt mit dem dritten Schnittpunkte der ersten Sehne mit der Curve verbindet.

155. Wir fügen eine weitere Anwendung des Satzes hinzu, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht feste Punkte einer solchen Curve gehen, einen neunten festen Punkt derselben enthalten. Wenn durch vier feste Punkte einer Curve dritter Ordnung ein Kegelschnitt beschrieben wird, so geht die gerade Verbindungslinie der zwei übrigen Schnittpunkte derselben mit der Curve durch einen festen Punkt derselben. Denken wir einen Kegelschnitt durch die Gruppe (α) der vier Punkte und sei (β) die Gruppe von zwei Punkten, in denen er die Curve ferner schneidet, (β') aber die entsprechende Gruppe der letztern für einen andern die (α) enthaltenden Kegelschnitt. Dann bilden der erste Kegelschnitt und die gerade Verbindungslinie der Punkte β' ein System dritter Ordnung durch die acht Punkte α, β, β'; und der zweite Kegelschnitt und die gerade Verbindungslinie der β ein zweites System derselben Art durch dieselben acht Punkte; es muss also der neunte Durchschnittspunkt mit der

Curve beiden Systemen gemein sein, d. h. die Verbindungslinien der Punkte β und der Punkte β' respective schneiden die Curve in dem nämlichen Punkt*). Ich habe diesen Punkt früher den Gegenpunkt des Systems der vier Punkte genannt; wegen der Uebereinstimmung mit der Nomenclatur von Sylvester's Theorie der Reste, die jetzt entwickelt werden soll, soll er der beigeordnete Rest des Systems der vier Punkte heissen. Man construiert diesen Punkt leicht, in dem man unter den durch die vier Punkte gehenden Kegelschnitten eines der Linienpaare benutzt; wenn die geraden Verbindungslinien der Punkte 12 und 34 respective die Curve dritter Ordnung in den Punkten 5 und 6 schneiden, so schneidet die Gerade 56 die Curve ausserdem in dem gesuchten Punkt. Die Construction ist also in drei verschiedenen Wegen ausführbar, entsprechend den drei paarweisen Gruppierungen der vier Punkte.

Aus dem Satze folgt offenbar als Specialfall, dass durch vier Punkte einer Curve dritter Ordnung vier Kegelschnitte möglich sind, die die Curve ausserdem berühren, nämlich diejenigen, welche durch die Berührungspunkte der vier vom beigeordneten Rest der Gruppe ausgehenden Tangenten hindurchgehen.

156. Wir wollen die gefundene Regel für die Construction des beigeordneten Restpunktes auf die Gruppe von vier auf einander folgenden Punkten der Gruppe anwenden. Dann ist die Verbindungslinie der Punkte 1, 2 eine Tangente und der Punkt 5, in welchem sie die Curve ferner schneidet, ist der Tangentialpunkt des Punktes 1; ferner ist der weitere Schnittpunkt 6 der Geraden 34 mit der Curve der auf 5 folgende Punkt der Curve; der gesuchte beigeordnete Rest ist daher der Punkt, wo die Tangente im Tangentialpunkt 5 von

---

*) Das Gleiche zeigt die Verbindung der Gleichungen

$$DEF = kABC \quad \text{und} \quad DE = k'AB;$$

denn sie giebt $k'F = kC$. Die Curve dritter Ordnung erscheint als der Ort der Durchschnittspunkte der Kegelschnitte eines Büschels mit den entsprechenden Strahlen eines zu ihm projectivischen Strahlenbüschels.

1 die Curve ferner schneidet, d. h. er ist der Tangentialpunkt des Tangentialpunktes oder, wie wir sagen wollen, der zweite Tangentialpunkt.

Wenn also z. B. gefordert wird, einen Kegelschnitt zu bestimmen, der durch vier auf einander folgende Punkte der Curve geht, d. h. in einem gegebenen Punkte eine vierpunktige Berührung mit ihr hat, während er sie zugleich an anderer Stelle einfach, d. h. zweipunktig berührt, so folgt, dass dieser letztere Berührungspunkt ein Berührungspunkt einer der Tangenten sein muss, welche vom zweiten Tangentialpunkt des ersten an die Curve gehen; da einer von diesen der Tangentialpunkt des ersten ist und für diesen der fragliche Kegelschnitt offenbar in zwei gerade Linien degeneriert, so geben nur die drei andern eigentliche Lösungen des Problems.

Man construiert ferner einen Kegelschnitt durch fünf auf einander folgende Punkte der Curve oder in fünfpunktiger Berührung mit ihr in einem Punkte 1, indem man den sechsten Schnittpunkt desselben mit der Curve bestimmt, nämlich den dritten Schnittpunkt der Curve mit der geraden Verbindungslinie des Punktes 1 mit seinem zweiten Tangentialpunkt.

Wenn dieser letztere Punkt mit dem Punkt 1 zusammen fallen soll, so muss die Verbindungslinie von 1 mit seinem zweiten Tangentialpunkt die Curve in 1 berühren, d. h. der erste und der zweite Tangentialpunkt müssen zusammen fallen; da nun ein Punkt, dessen Tangentialpunkt mit ihm zusammen fällt, nothwendig ein Inflexionspunkt ist, so folgt: Es giebt in einer Curve dritter Ordnung ohne singulären Punkt sieben und zwanzig Punkte, in deren jedem ein Kegelschnitt mit sechspunktiger Berührung mit der Curve construiert werden kann, nämlich die Berührungspunkte der neun mal drei Tangenten, welche an die Curve von ihren Inflexionspunkten aus noch gezogen werden können.

157. Der bisher angewendete Fundamentalsatz des Art. 29. ist in Art. 33. verallgemeinert worden und wird in der dort gewonnenen Gestalt auf unsern Fall bezogen, indem

wir $p = 3$ setzen: Jede Curve der Ordnung n, welche durch $(3n - 1)$ feste Punkte einer Curve dritter Ordnung geht, enthält ausserdem einen festen Punkt derselben. Es ist dazu zu bemerken, dass für $n = 1$ und $n = 2$ nur eine Curve n^{ter} Ordnung durch bezeichnete $(3n - 1)$ Punkte möglich ist und daher der Satz die Bedeutung verliert, die er für alle Fälle hat, wo $n > 2$ ist. Wenn in diesen Fällen durch $3n$ willkürlich gewählte Punkte einer Curve dritter Ordnung eine Curve n^{ter} Ordnung gelegt werden sollte, so würde dieselbe (vergl. Art. 33.) im Allgemeinen keine eigentliche Curve ihrer Ordnung sein, sondern zusammengesetzt aus der Curve dritter Ordnung selbst und einer Curve der Ordnung $(n - 3)$.

158. Wenn von den $3(m + n)$ Durchschnittspunkten einer Curve der Ordnung $(m + n)$ mit einer Curve dritter Ordnung $3m$ in einer Curve m^{ter} Ordnung U_m liegen, so sind die übrigen $3n$ in einer Curve der n^{ten} Ordnung enthalten. Denn nach der so eben gemachten Bemerkung kann durch $(3n - 1)$ von diesen Punkten eine Curve n^{ter} Ordnung U_n stets beschrieben werden, und diese bildet mit U_m zusammen ein System der Ordnung $(m + n)$, welches nach dem vorigen Artikel durch den letzten Punkt gehen muss, der, weil er nicht in U_m liegen kann, als welche die Curve dritter Ordnung bereits in $3m$ Punkten schneidet, nothwendig in U_n liegen muss.

159. Wir wollen nun mit Sylvester von zwei Systemen von Punkten, welche zusammen den vollständigen Durchschnitt der Curve dritter Ordnung mit einer algebraischen Curve bilden, immer das eine System als den Rest des andern Systems bezeichnen. Da die Gesammtzahl der Schnittpunkte ein Vielfaches von drei sein muss, so muss die Zahl der Punkte des Systems α durch $3p + 1$, die der Punkte des Systems β durch $3q - 1$ ausdrückbar sein und umgekehrt, und jenes System kann als ein positives, dieses als ein negatives bezeichnet werden, so dass der Rest eines positiven Systems ein negatives System ist und umgekehrt. Das einfachste positive System besteht aus einem Punkt und entspricht dem $p = 0$; das einfachste negative System bilden zwei Punkte entsprechend $q = 1$; das eine erscheint als Rest

des andern, wenn die drei Punkte in gerader Linie sind. Weil durch ein gegebenes System von Punkten α eine Unendlichkeit von Curven verschiedener Ordnungen beschrieben werden kann, so ist deutlich, dass ein solches System α unendlich viele Reste β, β', β'', ... hat. Zwei Systeme β, β' sollen beigeordnete Reste heissen, wenn sie beide demselben System α als Reste entsprechen. So können im Falle des Art. 155. unendlich viele Kegelschnitte durch ein System von vier Punkten α in der Curve dritter Ordnung gelegt werden, welche die Curve ferner in Punktepaaren β, β', ... schneiden, von denen jedes ein Rest von α ist und die daher alle einander beigeordnete Reste sind. Wenn ferner die Verbindungslinie des Paares β die Curve überdiess im Punkte α' schneidet, so wird dieser ebenso wie die vier ursprünglichen Punkte ein Rest der Gruppe β sein und der Punkt α' ist daher, wie wir ihn schon bezeichneten, beigeordneter Rest des Systems α. Es ist offenbar, dass zwei beigeordnete Restsysteme entweder zugleich positiv oder zugleich negativ sind. Mit dieser Terminologie lautet der Satz des Art. 157.: Zwei Punkte der Curve dritter Ordnung müssen zusammen fallen, wenn sie beigeordnete Reste sind. In der That zeigten wir dort, dass wenn durch dieselben $(3p-1)$ Punkte α eine Curve U_p gelegt wird, welche die Curve dritter Ordnung im Restpunkt β schneidet, und eine andere Curve derselben p^{ten} Ordnung, die den Restpunkt β' bestimmt, diese beigeordneten Reste β, β', welche auf beiden Wegen entstehen, in demselben Punkt vereinigt sind.

160. Wenn zwei Restsysteme β, β' einander beigeordnet sind, so ist jedes System α', welches für das eine ein Rest ist, auch ein Rest für das andere. Denken wir durch ein System α zwei Curven U_p, U_q beschrieben, welche die Curve dritter Ordnung ferner in Punktsystemen β, β' schneiden, so dass diese beigeordnete Reste sind; so wird behauptet, dass die α' Punkte, in denen eine durch das System β' gehende Curve U_r die Curve dritter Ordnung ferner schneidet, mit dem System β zusammen den vollständigen Durchschnitt einer Curve mit der gegebenen Curve dritter Ordnung bilden. Denn da die Systeme α und β zusammen den Durchschnitt einer Curve U_p mit ihr bilden,

und ebenso α', β' den einer andern Curve U_r, so repräsentieren alle vier vereinigt den Durchschnitt der Curve dritter Ordnung mit einer Curve von der Ordnung $p + r$; da nun die vereinigten Systeme α, β' den Schnitt mit der Curve U_q von der Ordnung q darstellen, so müssen (Art. 158.) die vereinigten Systeme α', β den Schnitt der Curve dritter Ordnung mit einer Curve von der $p + r - q$ repräsentieren.

In Folge dessen sind auch zwei Systeme, welche als beigeordnete Reste desselben dritten auftreten, beigeordnete Reste zu einander. Wenn β und β' beigeordnete Reste sind und also einen gemeinsamen Rest α haben, und wenn β' und β'' den gemeinsamen Rest α' besitzen, dann ist nach dem eben Bewiesenen α auch ein Rest von β'' und α' von β, d. h. wenn β, β'' beigeordnete Reste mit β' sind, so sind sie es zu einander, denn α, α' sind gemeinschaftliche Reste von β, β''.

161. Wir können nun von dem Satze des Art. 155. einen Beweis geben, welcher zu Sylvester's Erweiterung des Satzes natürlich leitet. Ein durch vier Punkte α der Curve dritter Ordnung gehender Kegelschnitt schneidet die Curve noch in zwei Punkten β, welche einen Rest des Systems α bilden; die durch die beiden Punkte β gehende Gerade schneidet die Curve noch in einem Punkte α', welcher Rest zu β und daher beigeordneter Rest zu α ist. Wiederholen wir dasselbe Verfahren mit einem andern Kegelschnitt, so kommen wir zu einem Punkte α'', welcher ebenfalls beigeordneter Rest zu α und daher zu α' ist; somit fallen α', α'' nach Art. 159. zusammen.

Die Schlüsse dieses Beweises bleiben aber offenbar gültig, wenn wir anstatt von der Gruppe von vier Punkten von irgend einem positiven System von $(3p + 1)$ Punkten P ausgehen; eine durch diese Punkte geführte Curve von der Ordnung $(p + 1)$ schneidet die Curve dritter Ordnung in zwei weiteren Punkten und die Verbindungslinie der letztern thut diess in einem dritten Punkte, welcher beigeordneter Rest zu P und unveränderlich ist, welches auch die Curve der Ordnung $(p + 1)$ sei. Wir können aber ferner zu dem beigeordneten Restpunkt der Gruppe P anstatt in zwei Schritten

in irgend einer geraden Zahl von Schritten gelangen; wir legen durch die $(3p + 1)$ Punkte P eine Curve U_{p+r} und erhalten als Rest das negative System N von $(3r - 1)$ Punkten; wir beschreiben durch N eine Curve U_{r+s} und erhalten einen Rest P' von $(3s + 1)$ Punkten. Aus P' leiten wir in gleicher Weise einen Rest von $(3t - 1)$ Punkten ab, etc. Wenn wir dann bei irgend einem negativen Restsysteme von $(3t - 1)$ Punkten angekommen eine Curve U_t der Ordnung t durch dasselbe legen, so erhalten wir als Rest einen einzigen Punkt. Dass dieser Punkt in allen Fällen derselbe ist, durch welche Stufen der Restbildung man auch zu ihm gelangt sei, ist die Erweiterung, welche Sylvester dem Satze des Art. 155. gegeben hat. In der That, das System N ist ein Rest von P; P' ist ein Rest von N und beigeordneter Rest von P; N' ist ein Rest zu P', also beigeordnet zu N und daher auch Rest zu P, und so fort. Jedes positive System in der Reihe ist Rest zu jedem negativen System und beigeordneter Rest zu jedem positiven System. Der Punkt, zu welchem wir zuletzt gelangen, ist beigeordneter Rest zu dem ursprünglichen positiven System und muss mit dem auf irgend einem andern Wege erhaltenen beigeordneten Reste desselben Systems identisch sein.

Wenn wir z. B. durch vier Punkte eine Curve dritter Ordnung beschreiben, die die Curve in fünf andern Punkten schneidet, durch diese fünf eine andere Curve dritter Ordnung, welche einen Rest von vier Punkten giebt, durch diese sodann eine Curve vierter Ordnung mit einem Rest von acht Punkten und durch diese endlich eine neue Curve dritter Ordnung, welche die Originalcurve in einem weitern Punkte schneidet, so ist dieser letztere Punkt nothwendig derselbe, wie der nach dem Verfahren des Art. 155. aus den ursprünglichen vier Punkten construierte Gegenpunkt.

Und wir können endlich ebenso von irgend einem negativen Systeme N von $(3q - 1)$ Punkten beginnend nach einer ungeraden Zahl von Operationen zu einem einzigen Punkt kommen, welcher der Rest des Originalsystems und von der besondern Weise der Restbildung unabhängig ist.

162. Die entwickelten Principien erlauben uns, durch

lineare Constructionen den Punkt zu finden, welcher der Rest oder der beigeordnete Rest zu einem gegebenen negativen oder positiven System ist. Wenn z. B. verlangt wäre, den Restpunkt zu acht gegebenen Punkten der Curve zu finden, so verbinden wir dieselben auf irgend eine Weise in Paaren durch vier Gerade und erhalten ein System vierter Ordnung und vier neue Schnittpunkte desselben mit der Curve, welche einen Rest zu den gegebenen bilden; verbinden wir diese abermals in Paaren, so erhalten wir eine Gruppe von zwei Punkten als beigeordneten Rest der acht gegebenen; der Punkt, wo die Verbindungslinie der letztern die Curve zum dritten mal schneidet, ist der verlangte Restpunkt.

Oder wir können irgend vier der gegebenen Punkte durch ihren beigeordneten Rest ersetzen, den wir wie in Art. 155. construieren, und das Problem ist so auf die Aufsuchung des Restes zu einem System von fünf Punkten zurückgeführt; ersetzen wir dann irgend vier von diesen durch ihren beigeordneten Rest, so ist die Aufgabe auf die Construction des Restes zu einem System von zwei Punkten reduciert. Auf jedem dieser Wege erkennt man, dass *der beigeordnete Rest eines Systems von acht auf einander folgenden Punkten in einem gegebenen Punkte der Curve dritter Ordnung der dritte Tangentialpunkt dieses Punktes ist*; sowie dass der Rest eines Systems von zweimal vier auf einander folgenden Punkten in der Verbindungslinie der zweiten Tangentialpunkte der beiden gegebenen Punkte liegt.

Bei der entwickelten *linearen Construction des neunten Punktes*, welchen alle die durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung enthalten, ist vorausgesetzt, dass eine dieser Curven durch die acht Punkte gegeben ist; und die Aufgabe ist dadurch von der verschieden, welche verlangt, dass jener neunte Punkt construiert werde, wenn nur die acht Punkte bekannt sind. *Hart* hat gezeigt, dass auch im letzteren Falle dieser Punkt linear construiert werden kann, wenn auch durch ein complicierteres Verfahren [28]).

163. Wir schliessen diesen Abschnitt mit einigen Be-

merkungen über Systeme von Curven dritter Ordnung, welche gewisse Punkte gemein haben. Zuerst wenn acht Punkte der Curve gegeben sind, oder acht lineare Relationen zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung, so können dieselben alle bis auf einen eliminiert und die Gleichung damit auf die Form gebracht werden

$$U + kV = 0.$$

Wenn sodann sieben Punkte oder sieben lineare Relationen gegeben sind, so kann die allgemeine Gleichung auf die Form

$$U + kV + lW = 0$$

gebracht werden, in welcher

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

drei Curven dritter Ordnung bezeichnen, die die sieben Bedingungen erfüllen, und die beiden Constanten k, l, welche zur Disposition sind, die Erfüllung von zwei andern Bedingungen erlauben. Die vorige Gleichung repräsentiert ein Büschel, die letzte ein Bündel oder Netz von Curven dritter Ordnung, eine einfach oder zweifach unendliche Reihe von solchen Curven, d. i. ein Gebilde erster oder zweiter Stufe aus solchen, entsprechend den Werth-Combinationen der Constanten. Die allgemeine Form der Gleichung der durch sechs gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung (Gebilde dritter Stufe) ist ebenso

$$U + kV + lW + mS = 0.$$

Wir können für $U, V, \ldots$ Systeme von drei Geraden setzen, von denen jede durch zwei der gegebenen Punkte geht; sind also

$$A, B, C, D, E, F$$

die sechs Punkte und repräsentiert $ab = 0$ die Gleichung der geraden Verbindungslinie von A und B, so ist eine Form der Gleichung der Curve dritter Ordnung durch jene

$$ab.cd.ef + k.ac.be.df + l.ad.bf.ce + m.ae.bd.cf = 0.$$

Weil diese Gleichung drei unbestimmte Constanten enthält, so muss jedes andere System dritter Ordnung durch die gegebenen sechs Punkte, z. B. die Verbindung der drei Geraden

$$AF, BC, DE,$$

durch sie ausdrückbar sein, und die vorige Gleichung würde also an Allgemeinheit nicht gewinnen, wenn man ihr ein Glied $n \,.\, af \,.\, bc \,.\, de$ hinzufügen wollte, weil dieses selbst gleich der Summe der mit gewissen Factoren respective multiplicierten vorigen vier Glieder sein muss.

In derselben Art, wie die Doppelverhältnissgleichheit der Punkte eines Kegelschnitts aus der Gleichung

$$ab \,.\, cd = k \,.\, ac \,.\, bd$$

abgeleitet wird (vergl. „Kegelschnitte" Art. 288.), können wir aus der soeben geschriebenen Gleichung das folgende Gesetz als die Ausdehnung des erwähnten auf Curven dritter Ordnung ableiten: Wenn sechs Punkte einer Curve dritter Ordnung mit einem siebenten Punkte derselben durch gerade Linien verbunden werden, so besteht zwischen den durch die Schnittpunkte

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$$

seiner Strahlen in irgend einer Geraden bestimmten Segmenten die Relation

$$AB \,.\, CD \,.\, EF + k \,.\, AC \,.\, BE \,.\, DF + l \,.\, AD \,.\, BF \,.\, CE + m \,.\, AE \,.\, BD \,.\, CF = 0,$$

in welcher k, l, m für jede besondere Curve dritter Ordnung durch die sechs Punkte vollkommen bestimmte Constanten sind. Der Satz umfasst zahlreiche besondere Fälle, welche man leicht in analoger Weise wie in der „Anal. Geom. d. Kegelschn." Art. 295. ableiten kann durch specielle Voraussetzungen über die Lage der Transversale, etc.

164. Wir sahen in Art. 41., dass die Angabe eines Doppelpunktes äquivalent war mit drei Bedingungen. Sind also ausser dem Doppelpunkt fünf andere Punkte gegeben, so würde eine einzige weitere Bedingung die Curve bestimmen und dieselbe kann daher in der Form

$$S - kS' = 0$$

dargestellt worden, wo $S = 0$, $S' = 0$ zwei besondere Curven des Systems sind. Wir können sie in die Form

$$(o\ a\ b\ c\ d)\ o\ c - k \,.\, (o\ a\ b\ c\ e)\ o\ d = 0$$

setzen, wenn $(o\ a\ b\ c\ d)$ die linke Seite der Gleichung des

durch den Doppelpunkt O und die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kegelschnittes repräsentiert.

Ebenso kann die Gleichung einer Curve dritter Ordnung durch den Doppelpunkt O und vier andere Punkte A, B, C, D in der Form geschrieben werden

$$oa \,.\, ob \,.\, cd + k \,.\, ob \,.\, oc \,.\, ad + l \,.\, oc \,.\, oa \,.\, bd = 0;$$

und es besteht, die nämliche Relation wie im letzten Artikel zwischen den Abschnitten, welche in irgend einer Transversale durch die Strahlen gebildet werden, die einen beliebigen Punkt der Curve mit diesen gegebenen Punkten verbinden.

165. Indem wir das Doppelverhältniss eines Büschels mittelst der senkrechten Entfernungen seines Scheitels von den Seiten eines Vierecks ausdrücken, dessen Ecken einzeln in den vier Strahlen desselben liegen (vergl. „Kegelschn." Art. 288.), können wir den Ort des gemeinsamen Scheitels zweier Büschel finden, deren Doppelverhältniss dasselbe ist und deren Strahlen durch feste Punkte gehen, sofern zwei von diesen beiden Büscheln gemein sind. Denn wenn $ab = 0$ die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte A und B bedeutet, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\frac{ao \,.\, bp}{ab \,.\, po} = \frac{co \,.\, dp}{cd \,.\, op} \quad \text{oder} \quad ao \,.\, bp \,.\, cd = ab \,.\, co \,.\, dp.$$

Wenn O und P die beiden nicht reellen Kreispunkte im Unendlichen sind, so giebt uns diess (vergl. a. a. O. Art. 420.) den Ort des gemeinsamen Scheitels zweier Dreiecke von gegebenen Basen und gleichen Winkeln an der Spitze und wir sehen, dass dieser Ort eine durch die besagten Kreispunkte gehende Curve dritter Ordnung ist. Wenn statt dessen die Differenz der Winkel an der Spitze gegeben wäre, so wäre diess nach der angeführten Stelle durch das Verhältniss von zwei Doppelverhältnissen ausdrückbar und leitet zu einer Gleichung von der Form

$$\frac{ao \,.\, bp}{ap \,.\, bo} = k \,.\, \frac{co \,.\, dp}{cp \,.\, do},$$

welche eine Curve vierter Ordnung darstellt, die die beiden Kreispunkte zu Doppelpunkten hat.

II. Abschnitt.

Pole und Polaren.

166. Die früher entwickelten Sätze über Pole und Polaren sind zunächst für den bestimmten Fall der Curven dritter Ordnung zu wiederholen und anzuwenden. Jeder Punkt O hat in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung eine gerade Polare oder Polarlinie und eine conische Polare oder einen Polarkegelschnitt; ihre Gleichungen sind respective

$$x\frac{dU'}{dx'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'} = 0, \quad x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dy} + z'\frac{dU}{dz} = 0$$

oder

$$\Sigma\, x_i \frac{d\,U'}{d\,x_i'} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\, x_i' \frac{d\,U}{dx_i} = 0,$$

oder endlich

$$\Sigma\, x_i\, U_i' = 0, \quad \Sigma\, x_i'\, U_i = 0.$$

Wenn man die Gleichung des Polarkegelschnitts nach den Potenzen der Variabeln ordnet, so ist sie

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy = 0$$

oder

$$\Sigma\, U_{ik}' x_i\, x_k = 0$$

wenn a', b', ... respective U_{ik}' die zweiten Differentialquotienten in den gestrichenen Variabeln bezeichnen.

Der Polarkegelschnitt ist der Ort der Pole aller der geraden Linien, welche durch den Pol gehen, und es besitzt daher jede gerade Linie in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt vier Pole, nämlich die Durchschnittspunkte der Polarkegelschnitte von irgend zweien ihrer Punkte.

Der Polarkegelschnitt geht durch die Berührungspunkte der sechs Tangenten, welche im Allgemeinen von O an die Curve gezogen werden können. Im Falle der Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt geht er durch den Doppelpunkt und schneidet die Curve nur in vier Punkten ausserdem und jede gerade Linie besitzt nur drei Pole, weil von den Grund-

punkten des Büschels der Polarkegelschnitte für die Punkte der Geraden nur drei verschieden sind vom Doppelpunkt der Curve. Im Falle der Curve mit Rückkehrpunkt geht der Polarkegelschnitt jedenfalls durch diesen stationären Punkt und berührt die Rückkehrtangente; er schneidet also die Curve ausserdem nur noch in drei Punkten; es schneiden sich daher auch zwei Polarkegelschnitte ausserdem nur noch in zwei Punkten, den beiden Polen der Verbindungslinie ihrer Pole O.

Wenn die Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt, so geht der Polarkegelschnitt jedes Punktes O durch ihre Schnittpunkte und eine beliebige Gerade besitzt zwei Pole; der Polarkegelschnitt geht auch durch die Durchschnittspunkte des gegebenen Kegelschnitts mit der in Bezug auf ihn genommenen Polare von O. Denn man sieht leicht, dass der Vollzug der Operation $\triangle$ oder

$$x_1' \frac{d}{dx_1} + x_2' \frac{d}{dx_2} + x_3' \frac{d}{dx_3}$$

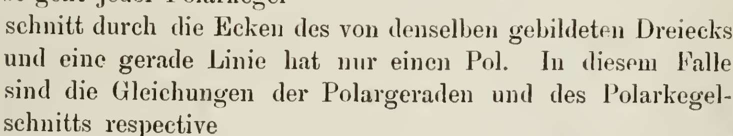
an dem Producte LS einer linearen und einer quadratischen homogenen Function von drei Variabeln das Resultat

$$L'S + L \triangle S$$

giebt. Wenn die Curve in drei gerade Linien zerfällt,

$$x_1 x_2 x_3 = 0,$$

Fig. 31.



so geht jeder Polarkegelschnitt durch die Ecken des von denselben gebildeten Dreiecks und eine gerade Linie hat nur einen Pol. In diesem Falle sind die Gleichungen der Polargeraden und des Polarkegelschnitts respective

$$x_1 x_2' x_3' + x_2 x_3' x_1' + x_3 x_1' x_2' = 0$$

und

$$x_1' x_2 x_3' + x_2' x_3 x_1 + x_3' x_1 x_2' = 0,$$

oder

$$\frac{x_1}{x_1'} + \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_1'}{x_1} + \frac{x_2'}{x_2} + \frac{x_3'}{x_3} = 0.$$

Die gegebene Gleichung der Polarlinie führt sogleich zu einer geometrischen Construction derselben, denn aus Art. 60., 2. der „Anal. Geom. d. Kegelschn.“ folgt, dass für x_i' als den Punkt E der Figur die Linie $E_1 E_2 E_3$ die durch die besagte Gleichung dargestellte Gerade ist. Die Tangente des Polarkegelschnitts im Punkte $x_1 = x_2 = 0$ ist nach Art. 56. a. a. O. durch $\frac{x_1}{x_1'} + \frac{x_2}{x_2'} = 0$ ausgedrückt und wird daher als die Verbindungslinie des Punktes A_3 mit dem Durchschnittspunkt E_3 der Polarlinie mit der Gegenseite $A_1 A_2$ erhalten.

167. Wenn eine durch den Pol O gezogene Gerade die Curve dritter Ordnung in Punkten A, B, C schneidet, so wird ihr Schnittpunkt P mit der Polarlinie von O nach Art. 134. durch die Gleichung

$$\frac{3}{OP} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC}$$

bestimmt. Wenn eine zweite gerade Linie aus O in der Curve die Punkte A', B', C' giebt, so ist auch ihr Punkt S' in der Polarlinie damit gegeben und also diese selbst bestimmt und muss die nämliche bleiben für alle durch die sechs Punkte

$$A, B, C, A', B', C',$$

gehenden Curven dritter Ordnung. Wir können daher die Polarlinie von O in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung linear construieren, wenn wir die Schnittpunkte

$$A, B, C; A', B', C'$$

zweier von O ausgehenden Geraden mit der Curve als bekannt voraussetzen; denn sie ist die Polare von O in Bezug auf das durch die Geraden

$$AA', BB', CC'$$

gebildete Dreieck. Die im Art. 135. gegebenen metrischen Relationen zeigen auch, dass mit den Punkten A, B, C die zwei Punkte des Polarkegelschnitts in ihrer Verbindungslinie bestimmt sind, und dass daher durch drei vom Pol O ausgehende Gerade und die Gruppen ihrer Schnittpunkte

$$A, B, C; A', B', C'; A'', B'', C''$$

mit der Curve dieselbe bestimmt und somit für alle durch diese neun Punkte gehenden Curven dritter Ordnung dieselbe

ist. Da die Punkte A, A', A'' als Punkte einer Geraden gewählt werden können, so ist das Problem der Construction des Polarkegelschnitts in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung reduciert auf das seiner Construction für das aus einer Geraden L und den durch die übrigen sechs Punkte gehenden Kegelschnitt S gebildete System. Wegen der Relation von p. 173 geht dieser letztere Polarkegelschnitt durch die Schnittpunkte von L und S sowie durch die Schnittpunkte von S mit der Polare von O in Bezug auf S, und die Polare von O in Bezug auf ihn ist bekannt.

Wir behandeln speciell die Fälle 1) wo O ein Punkt der Curve dritter Ordnung und 2) wo O ein Punkt ihrer Hesseschen Curve ist.

168. Wenn wir aus zwei auf einander folgenden Punkten O, O' der Curve dritter Ordnung die beiden Reihen von Tangenten

$$OA,\ OB,\ OC,\ OD;\ O'A,\ O'B,\ O'C,\ O'D$$

ziehen, so schneidet jede Tangente OA die nächstfolgende Tangente $O'A$ in ihrem Berührungspunkt A. Nun liegen die vier Berührungspunkte A, B, C, D im Polarkegelschnitt des Punktes O, welcher die Curve dritter Ordnung in diesem Punkte O berührt (Art. 64.), d. h. die sechs Punkte

$$O,\ O',\ A,\ B,\ C,\ D$$

liegen in demselben Kegelschnitt und das Doppelverhältniss des Büschels

$$O\,.\,ABCD$$

ist somit dasselbe wie das des Büschels

$$O'\,.\,ABCD.$$

Weil endlich diess Verhältniss dasselbe bleibt, wenn wir von einem Punkte der Curve zum nächstfolgenden Punkte derselben gehen, so erkennen wir, dass das Doppelverhältniss des Büschels constant ist, welches die von irgend einem Punkte einer Curve dritter Ordnung an sie gehenden Tangenten mit einander bilden. Zu einem algebraischen Beweis dieses Satzes gelangen wir später dadurch, dass das Doppelverhältniss des Büschels von vier durch eine homogene biquadratische Gleichung zwischen zwei Variabeln ausgedrückten Geraden in Function des Verhält-

nisses der Invarianten S^3 und T^2 der biquadratischen Form ausgedrückt werden kann und dass diese absolute Invariante des Büschels in dem Falle, wo dasselbe von den vier Tangenten einer Curve dritter Ordnung aus einem ihrer Punkte gebildet ist, als Function einer absoluten Invariante der cubischen Form erscheint, die ihn ausdrückt, also unveränderlich bleibt für alle Lagen des Punktes in der Curve. Diese absolute Invariante ist eine numerische Charakteristik der Curve, welche durch Projection und durch lineare Transformation nicht verändert wird. Es wird in der Algebra nachgewiesen [29]), dass man durch den Werth dieser Invariante diejenigen biquadratischen Gleichungen, welche zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln haben, von denen unterscheiden kann, deren Wurzeln sämmtlich reell oder imaginär sind; man sieht daraus, dass, wenn für irgend einen Punkt einer Curve dritter Ordnung von den vier von ihm ausgehenden Tangenten derselben zwei reell und zwei imaginär sind, nothwendig für alle Punkte derselben Curve das Gleiche stattfindet; und ebenso, dass jene vier Tangenten für alle Punkte der Curve entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär sind, wenn sie in irgend einem ihrer Punkte sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär sind. Darauf gründet sich eine fundamentale Eintheilung der Curven dritter Ordnung ohne singulären Punkt in zwei Classen; die einen, in welchen von jedem Punkte der Curve aus zwei und nur zwei reelle Tangenten der Curve an dieselbe gehen, die andern, in welchen die vier Tangenten aus einem Punkte entweder sämmtlich reell oder sämmtlich nicht reell sind. Diese Bemerkung wird in dem Abschnitt über die Classification der Curven dritter Ordnung ihre weitere Ausführung finden, und es wird sich dabei ergeben, dass im zweiten Falle die Curve dritter Ordnung immer aus zwei getrennten Theilen besteht, in deren einem die Punkte mit vier reellen Tangenten und in deren anderem die Punkte mit vier nicht reellen Tangenten liegen.

169. Aus dem Satze des Art. 168. folgt, dass für O, P als zwei beliebige Punkte der Curve dritter Ordnung stets ein Kegelschnitt existiert, der sie mit denjenigen vier Punkten verbindet, in denen die vier Tangenten aus dem ersten je ihre entsprechenden aus dem zweiten durchschneiden. Da

das Doppelverhältniss von vier Punkten durch die Vertauschungen von $ABCD$ in $BADC$, $CDAB$, $DCBA$ nicht geändert wird, so können die Strahlen des zweiten Büschels nach einander in jeder von diesen vier Ordnungen mit denen des ersten Büschels in der Ordnung $ABCD$ combiniert werden und die sechzehn Durchschnittspunkte der ersten Reihe von Tangenten mit der zweiten liegen somit in vier Kegelschnitten, welche sämmtlich die Punkte O und P enthalten. Ist die Curve circular, d. h. geht sie durch die nicht reellen Kreispunkte I, J im Unendlichen, so ergiebt sich, indem man diese für die Punkte O und P wählt, dass die sechzehn Brennpunkte einer circularen Curve dritter Ordnung in vier Kreisen, zu je vier in einem derselben gelegen sind — ein von Hart [30]) auf anderm Wege erhaltener Satz, der den Verfasser auf den Hauptsatz des vorigen Artikels führte.

170. Wenn O ein Punkt der Curve ist, so wird jede durch ihn gehende Sehne in der Curve und im Polarkegelschnitt von O in Bezug auf dieselbe harmonisch getheilt. Denn wir sahen, dass die Durchschnittspunkte der Curve dritter Ordnung mit der geraden Verbindungslinie von zwei gegebenen Punkten durch die Gleichung

$$\lambda^3 U' + \lambda^2 \mu \triangle U' + \lambda \mu^2 \triangle U + \mu^3 U = 0$$

bestimmt werden; für x_i' als einen Punkt der Curve ist aber $U' = 0$ und diese Gleichung durch μ theilbar, und wenn ferner die Punkte x_i und x_i' durch die Relation $\triangle U = 0$ verbunden wären, d. h. wenn der eine auf dem Polarkegelschnitt des andern liegt, so würde die übrig bleibende quadratische Gleichung die Form

$$\lambda^2 \triangle' U' + \mu^2 U = 0$$

und somit zwei gleiche und entgegengesetzte Wurzeln haben, d. h. nach Art. 123. der „Anal. Geom. d. Kegelschn." die Verbindungslinie der beiden Punkte wird durch die Curve harmonisch getrennt. Man beweist das Nämliche auch, indem man den Punkt O zum Anfangspunkt der Coordinaten macht und den Ort der harmonischen Mittel auf allen von ihm aus-

gehenden Radien vectoren bestimmt. Indem man genau wie in Art. 133. verfährt und $A = 0$ setzt, findet man unmittelbar

$$2(Bx + Cy) + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0,$$

d. h. die Gleichung des Polarkegelschnitts für den Anfangspunkt der Coordinaten als Pol.

Man beweist ferner wie in Art. 137., dass die Tangente des Polarkegelschnitts in seinem Durchschnittspunkt mit irgend einer Sehne aus dem in der Curve gelegenen Pol auch durch den Durchschnittspunkt der Tangenten der Curve dritter Ordnung in den beiden Punkten dieser Sehne geht und zur Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem Punkte O harmonisch conjugiert ist.

171. Wir untersuchen ferner insbesondere den Fall, in welchem der Punkt O ein Inflexionspunkt der Curve ist. In Art. 74. wurde gezeigt, dass der Polarkegelschnitt eines Inflexionspunktes in zwei gerade Linien zerfällt, von denen die eine die Tangente in diesem Punkte ist.

Das Nämliche ergiebt sich auch aus der Gleichung für den Polarkegelschnitt des Anfangspunktes der Coordinaten, die wir so eben geschrieben haben; denn damit der Anfangspunkt ein Inflexionspunkt und die Axe $y = 0$ seine Tangente sei, muss (vergl. Art. 46.) nicht nur $A = 0$, sondern auch $B = 0$, $D = 0$ sein und die Gleichung des Polarkegelschnittes aus Art. 170. wird somit

$$y(2C + Ex + Fy) = 0.$$

Da der Factor y offenbar für das Problem des Ortes der harmonischen Mittel seine Bedeutung verliert, so ergiebt sich, dass für alle durch einen Inflexionspunkt der Curve dritter Ordnung gehenden Radien vectoren der Ort der harmonischen Mittel eine gerade Linie ist, ein Satz von Maclaurin [31]). Und umgekehrt: Wenn der Ort der harmonischen Mittel eine gerade Linie ist, so ist der Punkt O ein Inflexionspunkt. Denn nach Art. 74. kann der Polarkegelschnitt nur in dem andern Falle in zwei gerade Linien degenerieren, wenn O ein Doppelpunkt ist, und dieser Fall hat auf das Problem der harmonischen Mittel keine Anwendung, weil die durch den Doppel-

punkt gehenden Radien vectoren die Curve nur in einem weitern Punkte schneiden.

Wir wollen die soeben gefundene Linie die harmonische Polare des Inflexionspunktes O nennen, um sie von der gewöhnlichen Polare zu unterscheiden, welche die entsprechende Inflexionstangente ist.

172. Der Punkt O besitzt in Bezug auf die harmonische Polare Eigenschaften, welche analog sind den Eigenschaften von Pol und Polare bei den Kegelschnitten. Wenn wir durch O zwei gerade Linien ziehen, so schneiden sich die Paare der Verbindungslinien ihrer vier Schnittpunkte mit der Curve in der harmonischen Polare — unmittelbare Folge der harmonischen Eigenschaften des Vierecks. Wenn wir insbesondere in den Schnittpunkten eines durch O gehenden Strahls mit der Curve die Tangenten derselben ziehen, so liegt ihr Schnittpunkt in der harmonischen Polare. Die harmonische Polare geht auch durch die Berührungspunkte der von O aus an die Curve gehenden Tangenten, weil für $O R' R R''$ als eine harmonische Gruppe das Zusammenfallen von R' mit R'' auch das Zusammenfallen von R' mit R nach sich zieht. Somit liegen die Berührungspunkte der drei von einem Inflexionspunkt aus an die Curve gehenden Tangenten in einer geraden Linie. Wenn die Curve einen Doppelpunkt hat, so folgt genau in derselben Weise, dass er in der harmonischen Polare liegen muss.

Man kann den ersten Satz des Artikels auch so aussprechen: Wenn drei Punkte A', B', C' der Curve in einer geraden Linie liegen und die sie mit O verbindenden Geraden die Curve ferner in A'', B'', C'' schneiden, so liegen diese auch in einer Geraden, und diese beiden Geraden schneiden die harmonische Polare in demselben Punkte. Denken wir insbesondere A', B', C' als zusammen fallend, so kommen wir zu dem Satze, dass die Verbindungslinie zweier Inflexionspunkte durch einen dritten Inflexionspunkt gehen muss und dass die Tangenten der Curve in zweien derselben sich in der harmonischen Polare des dritten schneiden.

173. Wenn man durch einen Inflexionspunkt O drei gerade Linien zieht, die die Curve in A_1, A_2;

B_1, B_2; C_1, C_2 ferner schneiden, so hat jede durch die sieben Punkte $OA_1A_2B_1B_2C_1C_2$ gehende Curve dritter Ordnung im Punkte O einen Inflexionspunkt. Denn die Schnittpunkte dieser drei Geraden mit der harmonischen Polare sind den Oertern der harmonischen Mittel des Punktes O für alle durch diese sieben Punkte gehenden Curven dritter Ordnung gemein und dieselben enthalten also alle eine und dieselbe gerade Linie, während sie im Allgemeinen Kegelschnitte wären, nach Art. 171. muss daher der Punkt O für alle die bezeichneten Curven ein Inflexionspunkt sein.

174. Wir haben im Art. 74. gesehen, dass die Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung $U=0$ ihre Durchschnittspunkte mit einer Curve $H=0$ sind, die auch von der dritten Ordnung ist; eine Curve dritter Ordnung hat daher im Allgemeinen neun Inflexionspunkte, von welchen jedoch (vergl. Beisp. 3. in Art. 126.) nur drei reell sind. Und da wir seitdem auch bewiesen haben, dass die gerade Verbindungslinie von zwei Inflexionspunkten durch einen dritten Inflexionspunkt derselben Curve gehen muss, so ergiebt sich, dass man durch jeden Inflexionspunkt vier gerade Linien ziehen kann, welche die übrigen acht Inflexionspunkte enthalten. Als einen Specialfall zu dem Satze des letzten Artikels erhalten wir dann den Satz: Jede Curve dritter Ordnung, welche durch die neun Inflexionspunkte einer solchen Curve geht, hat diese Punkte selbst zu Inflexionspunkten [32]).

175. Die Zahl der geraden Linien von denen jede drei Inflexionspunkte enthält, ist

$$= \tfrac{1}{3}(4 \times 9) = 12,$$

weil je vier von ihnen sämmtliche Inflexionspunkte enthalten; wir können auch daraus schliessen (vergl. Art. 126.), dass die Inflexionspunkte nicht sämmtlich reell sein können, weil durch neun reelle Punkte nur zehn Gerade gehen können, welche sie zu je dreien enthalten, aber nicht eine grössere Anzahl von Geraden.

Der Versuch, ein Schema dieser Linien zu bilden, führt

auf Folgendes, von welchen jedes andere nur durch die Bezeichnung abweichen kann:

$$\begin{array}{lll} 123, & 468, & 579. \\ 145, & 269, & 378. \\ 167, & 285, & 349. \\ 189, & 365, & 247. \end{array}$$

Es folgt daraus, dass jede Curve dritter Ordnung durch irgend sieben dieser Punkte einen derselben ihrerseits zum Inflexionspunkt haben muss; denn irgend sieben der Punkte liegen nach der Tabelle in drei Geraden, z. B. die ersten sieben in 123, 145, 167, welche sich in einem Punkte der Curve schneiden, und es ist somit nach dem letzten Artikel dieser gemeinschaftliche Punkt (1) ein Inflexionspunkt für alle diese Curven. Aus der Uebersicht dieser Geraden geht hervor, dass sie in vier Reihen von drei Geraden geordnet werden können, von denen jede Reihe sämmtliche Punkte enthält; oder dass, wenn wir die Gleichung

$$U + \lambda H = 0$$

bilden, drei Werthe von λ existieren, für welche die Gleichung sich auf die Gleichung eines Systems von drei geraden Linien reduciert. Einen directen Beweis davon geben wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

176. Wir betrachten ferner den Fall, wo der Punkt x_i' in der Hesse'schen Curve liegt und somit sein Polarkegelschnitt in zwei gerade Linien zerfällt. Im Art. 70. wurde als allgemeines Gesetz bewiesen, dass immer wenn die erste Polare eines Punktes A einen Doppelpunkt B hat, der Polarkegelschnitt von B einen Doppelpunkt in A besitzt. Im Falle der Curven dritter Ordnung ist die erste Polare eben der Polarkegelschnitt und der Satz lautet: Wenn der Polarkegelschnitt von A in zwei gerade Linien zerfällt, die sich in B schneiden, so zerfällt auch der Polarkegelschnitt von B in zwei Gerade, die sich in A schneiden. In der That, wenn der Polarkegelschnitt von x_i' in zwei gerade Linien zerfällt, so genügen die drei Coordinaten x_i' des Durchschnittspunktes der letzteren den drei Gleichungen, welche durch Differentiation der Gleichung des

Polarkegelschnitts entstehen. Den äquivalenten Formen der letzteren (Art. 165.)

$$\Sigma x_i' U_i = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma U_{ik}' x_i x_k = 0$$

entspringen die äquivalenten Formen der fraglichen Differentiale

$$\begin{aligned}
U_{11} x_1' + U_{12} x_2' + U_{13} x_3' &= 0, \\
U_{12} x_1' + U_{22} x_2' + U_{23} x_3' &= 0, \\
U_{13} x_1' + U_{23} x_2' + U_{33} x_3' &= 0; \\
U_{11}' x_1 + U_{12}' x_2 + U_{13}' x_3 &= 0, \\
U_{12}' x_1 + U_{22}' x_2 + U_{23}' x_3 &= 0, \\
U_{13}' x_1 + U_{23}' x_2 + U_{33}' x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Dieselben zeigen sich als symmetrisch in Bezug auf die x_i und die x_i' und beweisen daher, dass die Beziehung zwischen diesen Punkten eine gegenseitige ist. Aber A und B sind offenbar Punkte der Hesse'schen Curve, und zwar als entsprechende Punkte derselben zu bezeichnen; wir werden jetzt zeigen, dass sie diess auch in dem in Art. 152. erklärten Sinne sind, d. h. dass die Tangenten der Hesse'schen Curve in A und B sich in einem andern Punkte dieser Curve begegnen. Wir werden später sehen, dass es drei Curven dritter Ordnung giebt, welche dieselbe Curve zu ihrer Hesse'schen Curve haben und dass für jede dieser drei die Correspondenz der Punkte A und B in ihr eine andere von den drei Arten der Correspondenz ist, welche wir in Art. 152. f. kennen gelernt haben. Hier ergiebt sich zunächst, dass im Falle der Curven dritter Ordnung die Steiner'sche (Art. 70.) und die Hesse'sche Curve derselben in einer Curve vereinigt sind.

177. Die Gleichung des Polarkegelschnitts eines durch die Coordinaten y_i bestimmten Punktes

$$\Sigma y_i U_i = 0$$

zeigt, dass das System der Polarkegelschnitte aller Punkte der Ebene in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung ein solches System (Netz) von Kegelschnitten bildet, wie es in Art. 360. f. der „Anal. Geom. d. Kegelschn." discutiert worden ist, nämlich ein System, dessen Gleichung zwei unbestimmte Parameter linear enthält. Die Gleichung der Polare des Punktes A in Bezug auf einen Kegelschnitt des Systems ist

$$y_1 (U_{11} x_1' + U_{12} x_2' + U_{13} x_3') + y_2 (U_{12} x_1' + U_{22} x_2' + U_{23} x_3') + y_3 (U_{13} x_1' + U_{23} x_2' + U_{33} x_3') = 0$$

und wird also durch die Coordinaten des Punktes B erfüllt; die Polare jedes der Punkte A, B geht somit durch den andern Punkt und die Hesse'sche Curve der Curve dritter Ordnung ist somit zugleich die Jacobi'sche Curve (a. a. O. Art. 360.) des Systems der Polarkegelschnitte. Weil A und B in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Systems conjugierte Pole sind, so werden sie in ihrer Verbindungslinie von allen den besagten Kegelschnitten harmonisch getrennt, d. h. diese Punktepaare bilden eine Involution, deren Doppelpunkte in A und B liegen. Somit können auch die beiden Punkte, in welchen diese Gerade je einen Kegelschnitt des Systems schneidet, nur in A oder in B zusammenfallen; und somit kann, für das Zerfallen in zwei gerade Linien, die sich in AB durchschneiden, nur entweder A oder B der Schnittpunkt derselben sein, wenn nicht AB selbst eine dieser Linien ist. Die Hesse'sche Curve einer Curve dritter Ordnung ist selbst eine Curve dritter Ordnung und wird also von der geraden Linie AB in drei Punkten, d. h. noch in einem dritten Punkte C ausser A und B geschnitten. Jeder Punkt der Hesse'schen Curve ist, wie wir gesehen, der Durchschnitt von zwei Geraden, in welche ein gewisser Polarkegelschnitt des Systems zerfällt, und es folgt somit aus dem soeben bewiesenen, dass von den zwei Geraden dieser Art, welche sich in C durchschneiden, AB selbst die eine sein muss. Damit entspringt aus dem System der Punkte, deren Ort die Hesse'sche Curve ist, ein System von Geraden, nämlich der Paare von Linien, welche die Polarkegelschnitte der Punkte der Hesse'schen Curve sind. Jede Linie des Systems schneidet die Hesse'sche Curve in drei Punkten, von denen zwei entsprechende Punkte der Hesse'schen Curve sind und deren dritter C, den Durchschnittspunkt der Geraden mit ihrer conjugierten, wir als den ergänzenden Punkt bezeichnen können.

178. Die von dem System der eben erwähnten Geraden umhüllte Curve ist von Cayley studiert worden und Cremona hat sie deshalb als die Cayley'sche Curve der Curve

dritter Ordnung bezeichnet [33]). Sie ist von der dritten Classe, weil durch einen beliebigen Punkt P der Ebene nicht mehr als drei von jenen Geraden gehen können. Ein Punkt M nämlich dessen Polarkegelschnitt durch P geht, liegt nach Art. 61. nothwendig in der Polarlinie von P und damit der Polarkegelschnitt in gerade Linien zerfalle, muss M in der Hesse'schen Curve liegen; es giebt daher immer nur drei Punkte M, deren Polarkegelschnitt sich auf ein Paar von geraden Linien reduciert, von denen die eine durch P geht. Da die Curve keine Doppeltangente und keine stationäre Tangente besitzen kann, so ist sie von der sechsten Ordnung. Jede Linie des Systems verbindet ein Paar entsprechende Punkte der Hesse'schen Curve (Art. 177.); die Cayley'sche Curve kann daher ebenso gut betrachtet werden als die Enveloppe der geraden Linien, in welche die Polarkegelschnitte der Punkte der Hesse'schen Curve zerfallen, wie als die Enveloppe der Geraden, welche die correspondierenden Punkte der Hesse'schen Curve verbinden. Im Falle der Curven höherer Ordnung jedoch ist die Enveloppe der Verbindungslinien der entsprechenden Punkte A, B (Art. 70.) von der Enveloppe der geraden Linien verschieden, in welche Polarkegelschnitte zerfallen können.

Die Cayley'sche Curve kann auch als die Enveloppe der Geraden betrachtet werden (Art. 177.), welche vom System der Polarkegelschnitte in Involution geschnitten werden. Es ist aus Art. 337. der „Kegelschnitte" ersichtlich, wie die Gleichung dieser Enveloppe gebildet werden kann und dass sie von der dritten Classe ist. (Vergleiche a. a. O. Art. 361.)

179. Wir suchen ferner die vier Pole einer Tangente der Hesse'schen Curve mit Berührungspunkt A in Bezug auf die Curve dritter Ordnung; sie sind offenbar die Durchschnittspunkte des Polarkegelschnitts von A mit dem Polarkegelschnitt des nächstfolgenden Punktes A' der Hesse'schen Curve. Der Polarkegelschnitt von A ist das Paar der geraden Linien BL, BN und der Polarkegelschnitt von A' ist ein demselben nächstbenachbartes Linienpaar; nun schneidet BL die nächstfolgende Gerade zu BN im Punkte B und BN die nächstfolgende Gerade zu BL in demselben Punkte

und BL, BN schneiden die ihnen respective zunächst folgenden Geraden in den Berührungspunkten derselben mit ihrer Enveloppe; d. h. die gesuchten vier Pole sind der zweifach zählende Punkt B und die Berührungspunkte der Cayley'schen Curve mit den Geraden BL, BN.

Insbesondere ist also die Polarlinie eines Punktes der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Curve dritter Ordnung die Tangente der Hesse'schen Curve im correspondierenden Punkt. Man kann aus dem eben Entwickelten direct zeigen, dass die Cayley'sche Curve von der sechsten Ordnung ist. (Art. 178.) Denn die Gleichung des Ortes der Pole der Tangenten der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Curve dritter Ordnung wird gefunden, indem man die Bedingung ausdrückt, dass

$$x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3 = 0$$

die Hesse'sche Curve berührt. Diese Bedingung enthält die Grössen U_i im sechsten Grade und der fragliche Ort ist somit von der zwölften Ordnung; und weil nach dem Bewiesenen die Hesse'sche Curve zweifach zählend dem Orte angehört, also auch als zweifach auftretender Factor seiner Gleichung angehört, so ist der Rest, den die Cayley'sche Curve repräsentiert, von der Ordnung sechs.

180. Der Ort der Punkte, deren Polarlinien in Bezug auf eine Curve $U = 0$ eine andere Curve $V = 0$ berührten, schneidet die erstere Curve nothwendig in ihren Berührungspunkten mit denjenigen Tangenten, die sie mit der zweiten gemeinschaftlich hat, weil die Polarlinie eines Punktes von $U = 0$ die Tangente von $U = 0$ in diesem Punkte ist und nach der Voraussetzung für einen Punkt des Ortes die Polarlinie auch $V = 0$ berührt. Wir sahen aber so eben, dass für $U = 0$ als eine Curve dritter Ordnung und $V = 0$ als ihre Hesse'sche Curve der Ort aus der Cayley'schen und der zweifach zählenden Hesse'schen Curve zusammengesetzt ist. Die Curve dritter Ordnung und die Hesse'sche Curve haben als je von der sechsten Classe sechs und dreissig gemeinschaftliche Tangenten und wir sehen nun, dass dieselben aus den achtzehn Tangenten von $U = 0$ in den Schnitt-

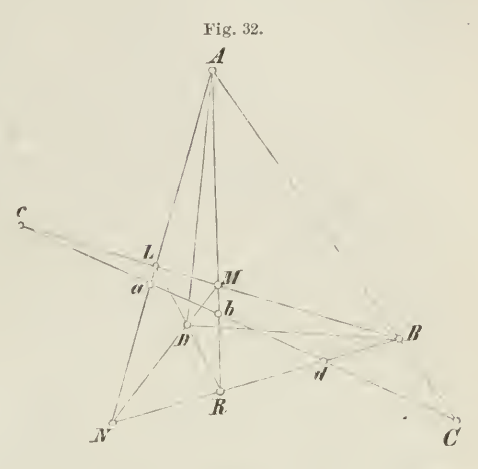
punkten dieser Curve mit der Cayley'schen Curve und aus den Tangenten von $U = 0$ in ihren Schnittpunkten mit der Hesse'schen Curve bestehen, wobei die Letztere d. i. die neun stationären Tangenten je für zwei zu zählen sind. Und in der That haben wir schon in Art. 46. bemerkt, dass jede stationäre Tangente einer Curve als eine Doppeltangente derselben zu betrachten sei, weil sie sowohl den ersten mit dem zweiten als den zweiten mit dem dritten Punkt verbindet; bei Zählung der gemeinschaftlichen Punkte oder Tangenten zweier Curven zählt ein Rückkehrpunkt wie ein Doppelpunkt und respective eine stationäre wie eine Doppeltangente für zwei. (Vergl. Art. 47.) Der Polarkegelschnitt eines Inflexionspunktes A besteht nach Art. 171. aus der Inflexionstangente selbst und der harmonischen Polare von A, und der dem Punkte A correspondierende Punkt B ist daher der Durchschnittspunkt der Inflexionstangente mit der harmonischen Polare. Und die Tangente der Hesse'schen Curve in B ist die Polare von A in Bezug auf die Curve dritter Ordnung, d. h. die Inflexionstangente selbst. Somit sind die neun Punkte, wo die Inflexionstangenten die Hesse'sche Curve berühren, diejenigen Punkte, wo jede Inflexionstangente die entsprechende harmonische Polare schneidet.

Es kann aus dem Bewiesenen geschlossen wird aber später unabhängig gezeigt werden, dass das Problem, eine Curve dritter Ordnung zu finden, von welcher eine gegebene Curve dritter Ordnung die Hesse'sche Curve ist, drei Lösungen hat. Denn weil die Inflexionspunkte beiden Curven gemein sind (Art. 174.), so kennt man neun Punkte der fraglichen Curve dritter Ordnung, welche für acht Bedingungen zählen, und dieselbe wäre somit durch die Kenntniss der Tangente in einem dieser Punkte A vollständig bestimmt. Was aber soeben bewiesen wurde, zeigt, dass diese Tangente jede von den drei Tangenten sein kann, welche von A an die Curve gelegt werden können (Art. 172.).

181. Die Tangenten der Hesse'schen Curve in correspondierenden Punkten A, B schneiden sich in einem Punkte derselben Curve. Wenn die Linien BL, BN den Polarkegelschnitt von A und die Linien AR, AN den Polarkegelschnitt von B bilden, so sind die Punkte

L, M, N, R die vier Pole der Linie AB und die gemeinschaftlichen Punkte sämmtlicher den Punkten von AB entsprechenden Polarkegelschnitte. Wenn also dieser Polarkegelschnitt in zwei gerade Linien zerfallen soll, so können diese nur die Geraden LR, MN sein und der Durchschnittspunkt D derselben ist also ein Punkt der Hesse'schen Curve und der correspondierende zu dem dritten Schnittpunkt C der geraden Linie AB mit derselben. Aber die Tangente der Hesse'schen Curve in B ist die Polare von A in Bezug auf die Curve dritter Ordnung, welche nach Art. 60. auch seine Polare in Bezug auf den Polarkegelschnitt von A, d. h. das Linienpaar BL, BN ist, d. h. diese Tangente ist nach den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks die Linie BD; und in gleicher Art ist die Tangente in A die Linie AD.

Fig. 32.



Wenn die Hesse'sche Curve und ein Punkt A in ihr gegeben sind, so gestattet das Problem, den entsprechenden Punkt B zu finden, drei Lösungen (vergl. Art. 152.); denn wenn wir die Tangente in A ziehen, welche die Curve überdiess in D schneidet, so kann B der Berührungspunkt einer der drei von AD verschiedenen Tangenten sein, welche von D aus an die Curve gehen. Diese drei Lösungen entsprechen den drei verschiedenen Curven dritter Ordnung, für welche die gegebene Curve die Hesse'sche Curve sein kann.

182. Die Berührungspunkte der Cayley'schen Curve mit den vier geraden Linien BL, BN, AR, AN liegen in einer Geraden. Die Pole von AD in Bezug auf die Curve dritter Ordnung sind die Durchschnittspunkte der Polarkegelschnitte von A und D, d. h. des Paares BL,

BN mit dem aus AB und einer durch C gehenden conjugierten Geraden Ca bestehenden Paare; die vier Pole sind daher der zweifach zählende Punkt B und die beiden Punkte, in welchen Ca die Geraden BL, BM schneidet. Da aber AD eine Tangente der Hesse'schen Curve ist, so folgt aus Art. 179., dass die letzteren beiden Pole die Berührungspunkte der Geraden BL, BM mit ihrer Enveloppe sind. Und in gleicher Weise liegen die Berührungspunkte von AR, AN in derselben geraden Linie. Da diese gerade Linie selbst eine Tangente der Cayley'schen Curve ist, so sind ihre sechs Schnittpunkte mit derselben damit vollständig nachgewiesen. Mit andern Worten: Jede Tangente der Cayley'schen Curve ist die eine von einem Paar von Geraden, das einen Polarkegelschnitt repräsentiert, und dessen andere Linie zwei entsprechende Punkte der Hesse'schen Curve mit einander verbindet; die vier geraden Linien, welche die Polarkegelschnitte dieser zwei Punkte bilden, gehen respective durch die vier Punkte, in welchen die gegebene Tangente die Cayley'sche Curve noch weiter schneidet.

Um ferner den Berührungspunkt einer gegebenen Tangente mit der Cayley'schen Curve zu bestimmen, verbinden wir den ergänzenden Punkt in der gegebenen Tangente mit dem correspodierenden Punkte der Hesse'schen Curve und bestimmen zu dieser Geraden die conjugierte; sie schneidet die gegebene Tangente in dem verlangten Punkte. Aber wir können sofort eine noch einfachere Regel ableiten. Denn da die beiden letzterwähnten Linien einen Polarkegelschnitt bilden und jeder Polarkegelschnitt die Verbindungslinie correspondierender Punkte harmonisch theilt, so haben wir nur die drei Punkte zu nehmen, in welchen die gegebene Tangente die Hesse'sche Curve schneidet, nämlich die beiden correspondierenden Punkte und den ergänzenden Punkt, und den dem letztern in Bezug auf die beiden erstern harmonisch conjugierten Punkt zu bestimmen.

183. Wir wollen die vorstehend entwickelten Regeln auf den Fall anwenden, wo A ein Inflexionspunkt ist und B der correspondierende Punkt, somit der Durchschnittspunkt der Inflexionstangente mit der harmonischen Polare. Dann ist der Polarkegelschnitt von B ein durch A gehendes Linien-

paar und der von A besteht aus der Inflexionstangente und der harmonischen Polare. Um die Punkte zu finden, in welchen diese vier Linien die Cayley'sche Curve berühren, nehmen wir den Punkt, in welchem die Linie AB die Hesse'sche Curve zum dritten mal schneidet, d. h. den Punkt B, weil AB die Hesse'sche Curve berührt, und die durch B gehende zu AB conjugierte Linie, in welcher die vier Berührungspunkte liegen, ist die harmonische Polare. Somit ist der Berührungspunkt der Inflexionstangente mit der Cayley'schen Curve ihr Durchschnittspunkt mit der harmonischen Polare oder (Art. 180.) die Cayley'sche und die Hesse'sche Curve berühren einander, und haben die neun Inflexionstangenten zu ihren gemeinschaftlichen Tangenten. Die Cayley'sche Curve als eine Curve dritter Classe ohne Singularitäten hat neun Rückkehrpunkte und die eben entwickelte Construction zeigt, dass die harmonischen Polaren die neun entsprechenden Rückkehrtangenten sind.

184. Es ist gezeigt worden, dass die Tangente der Hesse'schen Curve in irgend einem Punkte A diese Curve ferner in dem Punkte D schneidet, wo sie die Polare von A in Bezug auf die Curve dritter Ordnung trifft. Wir schliessen daraus, dass die Tangente einer Curve dritter Ordnung in irgend einem Punkte A diese Curve überdiess in dem Punkte schneidet, wo sie die Polare von A in Bezug auf eine Curve trifft, die die gegebene zu ihrer Hesse'schen Curve hat. Da eine solche Curve dritter Ordnung durch die Inflexionspunkte der gegebenen Curve geht, so ist ihre Gleichung von der Form

$$\alpha U + \beta H = 0$$

und die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes x_i in Bezug auf sie ist

$$\alpha\left(x_1 \frac{dU'}{dx_1'} + x_2 \frac{dU'}{dx_2'} + x_3 \frac{dU'}{dx_3'}\right) + \beta\left(x_1 \frac{dH'}{dx_1'} + x_2 \frac{dH'}{dx_2'} + x_3 \frac{dH'}{dx_3'}\right) = 0.$$

So ergiebt sich, dass der weitere Durchschnittspunkt einer Curve dritter Ordnung mit einer ihrer Tangenten durch Combination der Gleichungen — wir bezeichnen die Differentiale durch Indices —

$$x_1 U_1' + x_2 U_2' + x_3 U_3' = 0,$$
$$x_1 H_1' + x_2 H_2' + x_3 H_3' = 0$$

bestimmt ist; in andern Worten, dass der Tangentialpunkt eines Punktes x_i' in der Curve dritter Ordnung der Durchschnittspunkt der Tangente der Curve mit der Polare desselben Punktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve ist; wir können auch direct die Coordinaten x_i des Tangentialpunktes in Function der x_i' ausdrücken, denn sie sind offenbar den Determinanten

$$U_2 H_3 - U_3 H_2, \quad U_3 H_1 - U_1 H_3, \quad U_1 H_2 - U_2 H_1$$

proportional, welche Functionen vierten Grades in den x_i' sind.

185. Die Polarlinien der Punkte einer gegebenen Geraden

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

umhüllen einen Kegelschnitt, den wir als den Polarkegelschnitt der Geraden bezeichnen können. Die Gleichung der Polare eines Punktes x_i' kann in der Form

$$U_{11} x_1'^2 + U_{22} x_2'^2 + U_{33} x_3'^2 + 2 U_{23} x_2' x_3' + 2 U_{31} x_3' x_1' + 2 U_{12} x_1' x_2' = 0$$

geschrieben werden, und das Problem, die Enveloppe dieser Linie unter der Bedingung

$$\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' = 0$$

zu finden, ist identisch (Art. 96.) mit dem der Aufstellung der Bedingung, unter welcher eine gerade Linie einen Kegelschnitt berührt. Die Gleichung der fraglichen Enveloppe ist daher

$$\mathbf{U}_{11} \xi_1^2 + \mathbf{U}_{22} \xi_2^2 + \mathbf{U}_{33} \xi_3^2 + 2\mathbf{U}_{23} \xi_2 \xi_3 + 2\mathbf{U}_{31} \xi_3 \xi_1 + 2\mathbf{U}_{12} \xi_1 \xi_2 = 0,$$

wenn wir den $\mathbf{U}_{ik}$ dieselbe Bedeutung beilegen wie den A_{ik} in der Theorie der Kegelschnitte nämlich, dass

$$\mathbf{U}_{11} = U_{22} U_{33} - U_{23}^2, \quad \mathbf{U}_{22} = U_{33} U_{11} - U_{31}^2, \text{ etc.}$$

sind; also Functionen zweiten Grades in den Coordinaten x_i. Es ist offenbar, dass der Polarkegelschnitt einer Linie auch als der Ort derjenigen Punkte hätte definiert werden können, deren Polarkegelschnitte die gegebene Linie berühren.

Wenn die Methode des Art. 88. zur Bestimmung dieser Enveloppe angewendet wird, so hängt die Lösung von den Gleichungen

$$U_{11}x_1' + U_{12}x_2' + U_{13}x_3' = \lambda\,\xi_1\,,$$
$$U_{12}x_1' + U_{22}x_2' + U_{23}x_3' = \lambda\,\xi_2\,,$$
$$U_{13}x_1' + U_{23}x_2' + U_{33}x_3' = \lambda\,\xi_3$$

ab, welche nach Art. 324. der „Anal. Geom. d. Kegelschn.“ die Gleichungen sind, durch welche der Pol der gegebenen Geraden in Bezug auf

$$x_1'\,U_1 + x_2'\,U_2 + x_3'\,U_3 = 0$$

bestimmt wird. Der Polarkegelschnitt einer geraden Linie ist also auch der Ort der Pole dieser Geraden in Bezug auf die Polarkegelschnitte aller ihrer Punkte, wie auch aus geometrischen Betrachtungen geschlossen werden konnte.

186. Weil die Polarlinie eines Punktes einer Geraden in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung dieselbe ist, wie die in Bezug auf das Dreieck der Tangenten der Curve in ihren Schnittpunkten mit diesen geraden Linien, so ist auch der Polarkegelschnitt der Linie der nämliche in Bezug auf diess Dreieck, wie in Bezug auf die Curve. Wenn die fraglichen drei Tangenten durch

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

dargestellt sind, so wird der Polarkegelschnitt einer Linie (Art. 166.) als die Enveloppe von

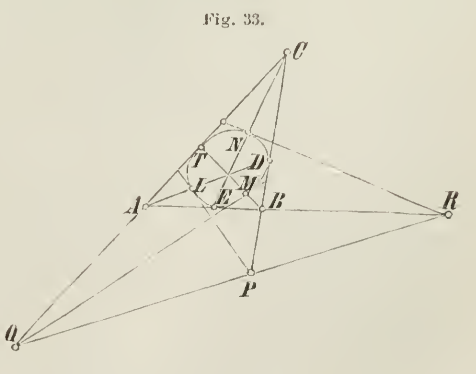
$$x_1 x_2' x_3' + x_2 x_3' x_1' + x_3 x_1' x_2' = 0$$

unter der Bedingung

$$\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' = 0$$

gefunden; und diese ist (vergl. „Kegelschn.“ Art. 157.)

Fig. 33.



$$(\xi_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (\xi_2 x_2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\xi_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Man sieht daraus, dass für P, Q, R als die Schnittpunkte der Curve dritter Ordnung mit der gegebenen Geraden und für ABC als das von den entsprechenden Tangenten der Curve gebildete Dreieck der Polarkegelschnitt der

geraden Linie die Seiten dieses Dreiecks in den Punkten D, E, F berührt, welche den Punkten P, Q, R in Bezug auf die Paare BC, CA, AB respective harmonisch conjugiert sind. Dass der Polarkegelschnitt durch die Tangenten der Curve dritter Ordnung in P, Q, R berührt wird, ist a priori offenbar, weil dieselben besondere Lagen der Linie sind, deren Enveloppe gesucht wird.

187. Es folgt aus der Definition, dass die von einem Punkte aus an den Polarkegelschnitt einer Geraden gehenden Tangenten die Polaren der beiden Punkte sind, in denen der Polarkegelschnitt des Punktes die gerade Linie schneidet. Der Polarkegelschnitt eines Punktes schneidet somit eine gegebene gerade Linie in reellen oder nicht reellen Punkten, je nachdem der Punkt ausser- oder innerhalb des Polarkegelschnitts der Geraden liegt, weil ein Punkt als ausserhalb eines Kegelschnitts gelegen bezeichnet wird, so lange von ihm zwei reelle Tangenten an denselben gehen. Wir haben schon früher bemerkt, dass für einen Punkt des Polarkegelschnitts einer geraden Linie der Polarkegelschnitt diese gerade Linie berührt.

Da nun speciell der Polarkegelschnitt eines Doppelpunktes das Tangentenpaar der Curve in demselben ist, so liegt für den Polarkegelschnitt jeder beliebigen Geraden in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung mit Knotenpunkt der Knotenpunkt ausserhalb, für den in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung mit conjugiertem oder isoliertem Punkt innerhalb; hat die Curve aber einen Rückkehrpunkt, so geht der Polarkegelschnitt jeder Geraden durch denselben hindurch.

188. Aus den vorhergehenden Definitionen und aus Art. 136. folgt, dass für die gegebene Linie als die unendlich entfernte Gerade der Ebene der Polarkegelschnitt zu erklären ist als die Enveloppe der Durchmesser der Curve dritter Ordnung, als der Ort der Centra der Diametralkegelschnitte derselben und als der Ort derjenigen Punkte, deren Polarkegelschnitt eine Parabel ist. Seine Gleichung wird gefunden, in dem man in der Formel des Art. 185. ξ_1 und ξ_2 gleich Null setzt, und ist somit

$$\mathrm{U}_{33} = 0 \quad \text{oder} \quad U_{11}\, U_{22} - U_{12}{}^2 = 0.$$

Und man sieht aus Art. 186., dass diess die Gleichung der Ellipse ist, welche die drei Seiten des Dreiecks der Asymptoten in ihren Mittelpunkten berührt.

189. Wenn die gegebene Gerade die Curve dritter Ordnung berührt, so fällt sie, weil sie selbst die Polare des Berührungspunktes ist, mit einer der Lagen der umhüllenden Linie des Art. 185. zusammen und berührt also den Polarkegelschnitt; und eine gerade Linie kann ihren Polarkegelschnitt in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung ohne singulären Punkt nur in dieser Voraussetzung berühren. Deshalb kann hiervon zur Bildung der Gleichung der Curve dritter Ordnung in Liniencoordinaten Gebrauch gemacht werden. Weil $\mathfrak{U}_{11}, \mathfrak{U}_{22}, \ldots$ Functionen zweiten Grades in den Coordinaten sind, so kann die Gleichung

$$\mathfrak{U}_{11}\xi_1^2 + \cdots = 0$$

des Polarkegelschnitts in der Form

$$\mathfrak{U}_{11}'x_1^2 + \mathfrak{U}_{22}'x_2^2 + \mathfrak{U}_{33}'x_3^2 + 2\mathfrak{U}_{23}'x_2x_3 + 2\mathfrak{U}_{31}'x_3x_1 \\ + 2\mathfrak{U}_{12}'x_1x_2 = 0$$

geschrieben werden, wo $\mathfrak{U}_{11}', \ldots$ Functionen vom zweiten Grade in den ξ_i sind; und die Bedingung, unter welcher derselbe die gerade Linie ξ_i berührt, ist

$$(\mathfrak{U}_{22}'\mathfrak{U}_{33}' - \mathfrak{U}_{23}'^2)\,\xi_1^2 + \cdots = 0,$$

vom sechsten Grade in den ξ_i, die Bedingung der Berührung der Geraden mit der Curve dritter Ordnung.

Wenn die gegebene Gerade die Cayley'sche Curve berührt, so geht, weil sie mit einer andern geraden Linie zusammen den Polarkegelschnitt eines gewissen Punktes bildet, der Polarkegelschnitt jedes ihrer Punkte durch diesen Punkt und die Enveloppe des Art. 185. reduciert sich folglich auf einen Punkt.

190. Indem wir zur Betrachtung von zwei Curven dritter Ordnung $U=0$, $V=0$ vorgehen, erörtern wir zuerst das Problem der Bestimmung eines Punktes, der in Bezug auf beide dieselbe Linie zur Polare hat, oder was dasselbe ist, dessen Polare in Bezug auf alle die Curven dritter Ordnung $U + \lambda V = 0$ dieselbe ist. Damit

$$x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3 = 0$$

und

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 = 0$$

dieselbe gerade Linie darstellen, müssen wir haben

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \frac{U_3}{V_3}$$

oder

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0, \; U_2 V_3 - U_3 V_2 = 0, \; U_3 V_1 - U_1 V_3 = 0;$$

und wir ersehen aus der ersten Form dieser Gleichungen, dass die drei Gleichungen in der zweiten Form zwei Gleichungen äquivalent sind, und dass die Curven vierter Ordnung, welche die Gleichungen der zweiten Form repräsentieren, gemeinsame Punkte besitzen müssen. Es sind aber nicht alle ihre Durchschnittspunkte ihnen gemeinsam, weil alle die Werthe, welche Zähler und Nenner irgend eines der drei Brüche verschwinden machen, zweien der resultierenden Gleichungen genügen, aber nicht der dritten Gleichung. Rechnen wir also von den sechszehn gemeinsamen Punkten zweier Curven dritter Ordnung, z. B. den durch die ersten beiden Gleichungen dargestellten, die der dritten nicht auch angehörigen ab, nämlich die vier den Kegelschnitten $U_2 = 0$, $V_2 = 0$ gemeinsamen, so bleiben die zwölf Punkte übrig, welche allen gemeinsam sind und das vorgelegte Problem lösen. Wir wollen bemerken, dass allgemein für die U_i als Functionen m^{ten} und die V_i als Functionen n^{ten} Grades in den Coordinaten das System

$$U_1 : V_1 = U_2 : V_2 = U_3 : V_3$$

drei Curven der Ordnung $(m + n)$ darstellt, welche

$$m^2 + mn + n^2$$

gemeinschaftliche Punkte haben.

190. Weil die Discriminante einer cubischen Form vom zwölften Grade in den Coefficienten derselben ist (Art. 69.), so giebt es im Allgemeinen zwölf Werthe von λ, für welche die Discriminante von

$$U + \lambda V = 0$$

verschwindet, weil die Bestimmungsgleichung für λ durch Substitution von $a + \lambda a'$ für jeden Coefficienten a als eine Gleichung zwölften Grades erhalten wird. (Vergl. „Anal.

Geom. d. Kegelschn." Art. 270.) Die Coordinaten des Doppelpunktes in irgend einer durch die vorige Gleichung dargestellten Curve dritter Ordnung genügen nach Art. 69. den drei Gleichungen

$$U_1 + \lambda V_1 = 0, \quad U_2 + \lambda V_2 = 0, \quad U_3 + \lambda V_3 = 0.$$

Und das System von Gleichungen, welches durch die Elimination von λ zwischen je zweien derselben entsteht, ist genau das des vorigen Artikels, sodass man den Satz erhält: Durch die Durchschnittspunkte zweier Curven dritter Ordnung $U = 0$, $V = 0$ gehen zwölf Curven dritter Ordnung mit singulärem Punkt und die Polare eines jeden der zwölf Punkte ist dieselbe für alle Curven des Büschels $U + \lambda V = 0$. Diese Punkte sind die kritischen Centra des Büschels genannt worden,

192. Wenn drei Curven dritter Ordnung

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

gegeben sind, so genügen die Coordinaten des Doppelpunktes irgend einer Curve dritter Ordnung in dem System

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0$$

— Netz oder Bündel, Gebilde zweiter Stufe — den Gleichungen

$$\lambda U_1 + \mu V_1 + \nu W_1 = 0, \quad \lambda U_2 + \mu V_2 + \nu W_2 = 0,$$
$$\lambda U_3 + \mu V_3 + \nu W_3 = 0,$$

und durch Elimination von λ, μ, ν erhalten wir als den Ort dieser Doppelpunkte die Jacobi'sche Curve des Netzes

$$U_1 (V_2 W_3 - V_3 W_2) + U_2 (V_3 W_1 - V_1 W_3)$$
$$+ U_3 (V_1 W_2 - V_2 W_1) = 0.$$

Wenn die drei Curven dritter Ordnung

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

einen gemeinsamen Punkt haben, so ist dieser ein Doppelpunkt in ihrer Jacobi'schen Curve; denn wenn die in x und y niedrigsten Glieder in U, V, W respective sind

$$ax + by, \quad a'x + b'y, \quad a''x + b''y,$$

so sind die in die Jacobi'sche Determinante eintretenden Glieder unter dem zweiten Grade in x und y

$$\begin{vmatrix} a, & b, & ax + by \\ a', & b', & a'x + b'y \\ a'', & b'', & a''x + b''y \end{vmatrix}$$

und ihre Gesammtheit verschwindet identisch. Daher ist der Ort der Doppelpunkte aller Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten, welche durch sieben feste Punkte möglich sind, eine Curve sechster Ordnung, die diese sieben Punkte zu Doppelpunkten hat, weil man

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

als irgend drei der durch diese sieben Punkte gehenden Curven dritter Ordnung denken darf. Und die Doppelpunkte der Curven dritter Ordnung durch acht gegebene Punkte können als die gemeinsamen Punkte zweier Oerter sechster Ordnung bestimmt werden, welche im eben bezeichneten Sinne den ersten sieben und den letzten sieben gegebenen Punkten entsprechen; da sie sechs gemeinschaftliche Doppelpunkte besitzen, so ist die Anzahl ihrer übrigen gemeinsamen Punkte $= 36 - 24$, d. h. zwölf, in Uebereinstimmung mit dem Resultat des letzten Artikels.

193. In manchen Fällen kann die Lage einiger unter den zwölf kritischen Centren leicht nachgewiesen werden. So ist es für das System

$$\lambda x_1 x_2 x_3 + uvw = 0,$$

wo

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

gerade Linien darstellen; denn

$$x_1 x_2 x_3 = 0 \quad \text{und} \quad uvw = 0$$

sind Curven des Systems und ihre Doppelpunkte

$$x_1 x_2 = 0, \quad x_2 x_3 = 0, \quad x_3 x_1 = 0;$$
$$uv = 0, \quad vw = 0, \quad wu = 0$$

sind Doppelpunkte desselben und somit sechs von seinen kritischen Centren. Wir wollen etwas genauer das System

$$\lambda x_1 x_2 x_3 + u^2 v = 0$$

untersuchen, indem wir zeigen, dass es ausser den Punkten

$$x_1 x_2, \; x_2 x_3, \; x_3 x_1, \; uv$$

nur drei kritische Centra hat; es ist diess dieselbe Gleichung,

aus welcher für den Fall, wo $u = 0$ die unendlich entfernte Gerade ist, und also $v = 0$ ihre beigeordnete Gerade, ferner

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

die Asymptoten der Curve sind, von Plücker eine Classification der Curven dritter Ordnung hergeleitet worden ist. Wir können für irgend eine Lage der Linien

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ v = 0$$

die Formen studieren, welche die Curve annimmt für verschiedene Werthe des Parameters λ; und man übersieht leicht, dass jeder Curve mit Knotenpunkt in der Reihe ein Formenwechsel der Curven entspricht. So sahen wir in Art. 39., dass eine Curve dritter Ordnung mit isoliertem Punkt der Grenzfall einer Curve ist, die ein Oval als Theil enthält; und wenn für einen gewissen Werth der Constanten die Curve zwei reelle Aeste hat, die sich in einem Knotenpunkt durchschneiden, so macht das Beispiel der Kegelschnitte leicht deutlich, dass für ein kleines Wachsthum im Werthe der Constanten die Curve getrennte Theile in zweien der durch die vorher sich schneidenden Aeste gebildeten Scheitelwinkel und für eine geringe Abnahme desselben Werthes getrennte Theile im andern Paar dieser Scheitelwinkel zeigen kann. Daraus erhellt die Wichtigkeit der kritischen Centra für diese Art der Untersuchung der Formen der Curven dritter Ordnung.

194. Weil die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf $u^2 v = 0$ durch den Punkt

$$u = 0,\ v = 0$$

geht, so muss jeder Punkt, der dieselbe Polare in Bezug auf

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

hat, im Polarkegelschnitt von

$$u = 0,\quad v = 0$$

in Bezug auf

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

liegen und dieser letztere ist daher a priori ein Ort der kritischen Centra. Um dieselben vollständig zu bestimmen, setzen wir

$$u \equiv x_1 + x_2 + x_3\,,\quad v \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

und bemerken überdiess, dass unser Resultat in passendster Form erscheint, wenn wir

$$\lambda x_1 x_2 x_3 + u^2 v$$

vor der Differentiation durch u^2 dividieren; denn wir erhalten dann durch die Differentiation nach x_1, x_2, x_3 respective

$$\frac{\lambda x_2 x_3 (x_1 - x_2 - x_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)^3} = a_1, \quad \frac{\lambda x_2 x_3 (x_2 - x_3 - x_1)}{(x_1 + x_2 + x_3)^3} = a_2,$$
$$\frac{\lambda x_2 x_3 (x_3 - x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2 + x_3)^3} = a_3,$$

also

$$\frac{a_1 x_1}{x_1 - x_2 - x_3} = \frac{a_2 x_2}{x_2 - x_3 - x_1} = \frac{a_3 x_3}{x_3 - x_1 - x_2};$$

und die Form der Gleichungen zeigt, dass das Problem auf die Auffindung der kritischen Centra eines Systems von zwei Kegelschnitten zurückgeführt ist und dass die drei geforderten Punkte die Ecken des gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Dreiecks oder das gemeinsame Tripel harmonischer Pole der Kegelschnitte

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 x_3 - 2x_3 x_1 - 2x_1 x_2 = 0$$

sind; wo überdiess der letztere Kegelschnitt der Polarkegelschnitt von $u = 0$ in Bezug auf

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

ist, d. h. insbesondere für u als unendlich entfernt der das Asymptoten-Dreieck in den Mittelpunkten seiner Seiten berührende Kegelschnitt. Es können zwei kritische Centra zusammenfallen, wenn dieser Kegelschnitt von dem andern

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$$

berührt wird, d. h. der Ort solcher kritischer Doppelcentra ist der Polarkegelschnitt von $u = 0$ für

$$x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Die Bedingung der Berührung dieser beiden Kegelschnitte ist aber nach der gewöhnlichen Regel

$$(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)^3 = 27 a_1^2 a_2^2 a_3^2,$$

oder unter Ersetzung der a_i durch die ξ_i

$$\xi_1^{-\frac{1}{3}} + \xi_2^{-\frac{1}{3}} + \xi_3^{-\frac{1}{3}} = 0;$$

diess ist die Tangentialgleichung der Enveloppe der begleitenden Geraden von $u = 0$ für das Zusammenfallen von zwei kritischen Centren; sie entspricht (vergl. das Beispiel des Art. 90.) der Gleichung in Punktcoordinaten

$$x_1^{\frac{1}{4}} + x_2^{\frac{1}{4}} + x_3^{\frac{1}{4}} = 0$$ [34]).

195. Ein beliebiger Punkt der Curve

$$\lambda x_1 x_2 x_3 + u^2 v = 0$$

kann als Durchschnitt von $x_3 = \theta v$ mit

$$\theta \lambda x_1 x_2 + u^2 = 0$$

bestimmt werden. Für $u = 0$ als die unendlich entfernte Gerade bezeichnet die letztere Gleichung ein System von Hyperbeln, welche

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

zu Asymptoten haben, und nach einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel haben somit die durch diese Hyperbeln in einer geraden Linie $x_3 = \theta v$ bestimmten Segmente einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, nämlich den Berührungspunkt dieser Linie mit einer der Hyperbeln des Systems. Wenn die gerade Linie $x_3 = \theta v$ die Curve dritter Ordnung berührt oder durch einen ihr angehörigen Doppelpunkt geht, so muss sie die Hyperbel berühren und im letztern Falle ist das kritische Centrum eben der Berührungspunkt. Wenn man also eines der kritischen Centra mit den im Endlichen liegenden Schnittpunkten der Asymptoten mit der Curve durch gerade Linien verbindet, so sind die übrigen kritischen Centren die Mittelpunkte der Sehnen, welche die Curve dritter Ordnung in diesen Linien bestimmt.

III. Abschnitt.

Classification der Curven dritter Ordnung.

196. Wir wollen zuerst zeigen, dass die Gleichung jeder Curve dritter Ordnung in die Form

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3$$

gebracht werden kann. Jede reelle Curve dritter Ordnung hat einen reellen Inflexionspunkt, weil die nicht reellen in Paaren auftreten müssen und die Gesammtzahl der Inflexionspunkte in allen Fällen ungerade ist, nämlich nach Art. 148. neun, drei oder eins. Denken wir nun die Gerade $x_3 = 0$ als Tangente im Inflexionspunkt, und $x_1 = 0$ als eine andere durch diesen Punkt gehende Gerade, so nimmt die Gleichung der Curve nach Art. 51., VII. die Form

$$x_3 \varphi = a x_1^3$$

an, in welcher φ eine Function zweiten Grades ist, setzen wir

$$x_2^2 + 2 l x_2 x_3 + 2 m x_2 x_1 + p x_1^2 + 2 q x_1 x_3 + r x_3^2.$$

Indem wir dann die Fundamentallinie x_2 so verändern, dass das neue x_2 die Gerade

$$x_2 + l x_3 + m x_1 = 0$$

des ersten Systems ist, bewirken wir das Verschwinden derjenigen Glieder von φ, die x_2 nur im ersten Gerade enthalten, und die Gleichung nimmt die vorausgesetzte Form an. Die geometrische Bedeutung der ausgeführten Transformation ist, dass wir für $x_1 = 0$, wie gesagt, die Tangente in einem reellen Inflexionspunkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und für $x_2 = 0$ die harmonische Polare (Art. 171.) dieses Inflexionspunktes wählen; denn wenn wir untersuchen, wo eine durch den Inflexionspunkt gehende Gerade die durch die obige Gleichung dargestellte Curve schneidet, so erhalten wir durch die Substitution $x_3 = \lambda x_1$ für x_2 Werthe, welche die Form $\pm \mu x_1$ haben, und damit zeigen, dass die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve in Bezug auf den Inflexionspunkt und ihren Schnittpunkt mit der Linie $x_2 = 0$ harmonisch conjugiert sind.

197. Bei der Classification von Curven können diejenigen Unterscheidungen als fundamental betrachtet werden, welche unzerstörbar sind durch Projection, oder mit andern Worten, welche nicht nur Curven sondern Kegel der-

selben Ordnung von einander unterscheiden. Unter den Curven zweiter Ordnung giebt es solche Unterschiede nicht, weil nur eine Art von Kegeln zweiten Grades existiert. Um zu erkennen, ob solche Unterschiede für die Curven dritter Ordnung existieren, reicht es hin, die Form ihrer Gleichung, in welche nach dem Beweis des letzten Artikels die Gleichung jeder solchen Curve übergeführt werden kann, darauf zu untersuchen, ob und welche durch Projection unzerstörbare Verschiedenheiten zwischen den durch sie dargestellten Curven existieren. Und da es sich nur um Verschiedenheiten handeln soll, welche durch Projection unzerstörbar sind, so können wir die Gerade $x_3 = 0$ im Unendlichen voraussetzen und die Form

$$x_2^2 = ax_1^3 + 3bx_1^2 + 3cx_1 + d$$

oder

$$y^2 = ax^3 + 3bx^2 + 3c + d$$

discutieren, als eine solche, welche eine Projection jeder gegebenen Curve dritter Ordnung darstellt. Wir bemerken, dass für einen im Unendlichen gelegenen Inflexionspunkt ein System durch ihn gehender Sehnen zum System paralleler Ordinaten und seine harmonische Polare zu einem dieselben halbierenden Durchmesser wird, wie denn in der That die obige Gleichung für jeden Werth von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y liefert.

Die vorige Gleichung ist früher in Art. 39. zum Theil discutiert worden und aus dem dort Gesagten erhellt, dass die durch sie dargestellten Curven in folgende fünf Haupt-Classen getheilt werden können: Die rechte Seite der Gleichung kann in drei ungleiche Factoren zerlegbar sein und diese Factoren können (I) alle reell sein. Die Curve besteht dann aus einem Oval und einem unendlichen Ast (Art. 39.). Oder (II) zwei Factoren sind nicht reell und der dritte Factor allein ist reell; das Oval verschwindet und der unendliche Ast bleibt allein übrig.

Die rechte Seite der Gleichung ist zerlegbar in zwei gleiche Factoren und einen dritten davon verschiedenen Factor, also von der Form $(x - \alpha)^2 (x - \beta)$. Dem entspringen die Fälle (III), $\alpha < \beta$, das Oval ist auf einen isolierten oder con-

jugierten Punkt reduciert; und (IV) $\alpha > \beta$, die Curve hat einen Knotenpunkt, das Oval und der unendliche Ast bilden eine continuierliche sich selbst durchschneidende Curve.

Die Factoren der rechten Seite sind sämmtlich gleich (V) und die Curve hat einen stationären oder Rückkehrpunkt (Art. 39.).

Newton hat den in diesem Artikel betrachteten Curven den Namen divergierende Parabeln gegeben und sein soeben begründeter Satz [35]) über dieselben sprach aus, dass jede Curve dritter Ordnung in eine der fünf divergierenden Parabeln projiciert werden kann.

198. Anstatt wie im letzten Artikel vorauszusetzen, dass die stationäre Tangente in unendlicher Ferne projiciert sei, können wir auch die harmonische Polare so projiciert voraussetzen; der Inflexionspunkt wird dann ein Centrum und jede durch ihn gehende Sehne wird in ihm halbiert. Vertauschen wir in der Gleichung des Art. 196. die Variabeln x_3 und x_2 und setzen wir dann $x_3 = 1$ und ebenso wie dort

$$x_1 = x, \quad x_2 = y$$

so erhalten wir die Gleichung für diesen Fall

$$y = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

die Gleichung einer Centralcurve. (Art. 132.) Wie im vorigen Artikel erkennen wir daraus die Existenz von fünf Arten der Centralcurven nach der Natur der Factoren der rechten Seite dieser Gleichung und begründen so die von Chasles [36]) gegebene Ergänzung des Newton'schen Satzes, dass nämlich jede Curve dritter Ordnung in eine der fünf Centralcurven dieser Ordnung projiciert werden kann.

199. Entsprechend diesen fünf Arten der Curven dritter Ordnung giebt es fünf wesentlich verschiedene Arten von Kegeln dritter Ordnung. Ein Kegel von irgend einer Ordnung kann zwei verschiedene Formen seines Mantels darbieten, nämlich 1) einen Mantel, welcher eine concentrische Kugel in zwei geschlossenen Curven so schneidet, dass jedem Punkte der einen Curve ein Punkt der andern Curve diame-

tral gegenüber liegt — wie eben der Kegel zweiter Ordnung es zeigt; und 2) einen Mantel, welcher eine concentrische Kugel in einer geschlossenen Curve schneidet, so dass jedem Punkte der Curve ein anderer Punkt der Curve diametral gegenüber liegt — die Ebene bietet das Beispiel eines solchen Kegels. Der Parabel (I) des Art. 197. entspricht ein Kegel, welcher einen Mantel der ersten und einen Mantel der zweiten Art vereinigt, der der Parabel (II) entsprechende zeigt nur den Mantel der zweiten Art. Die Singularitäten des Knotenpunktes, des isolierten und des stationären Punktes übertragen sich natürlich auf die Kegel.

Die eben besprochene Classification der Kegel dritter Ordnung kann leicht weiter fortgesetzt werden, wenn man will, Bei den Kegeln zweiter Ordnung giebt es nicht allein nur eine Art, sondern mit einigen Einschränkungen können auch je zwei gegebene Curven zweiter Ordnung als Schnitte eines und desselben Kegels angesehen werden. Diess ist nicht der Fall bei Curven dritter Ordnung; wir haben in Art. 168. gesehen, dass jede Curve dritter Ordnung eine gewisse numerische Characteristik hat, das Doppelverhältniss der vier Tangenten, welche von irgend einem Punkte der Curve an dieselbe gehen, und welches durch das Verhältniss der Invarianten $S^3 : T^2$ der biquadratischen Form ausgedrückt wird, welche diese Tangenten bestimmt. Weil diese Characteristik durch Projection unverändert bleibt, so können zwei Curven dritter Ordnung, für welche sie nicht denselben Werth hat, nicht aus demselben Kegel geschnitten werden; und der fragliche Parameter kann somit als eine Characteristik nicht nur der Curve, sondern auch des Kegels dritter Ordnung betrachtet werden, aus welchem jene geschnitten ist. Die fünf Arten von Kegeln dritter Ordnung, welche wir aufgezählt haben, können daher nach dem Werthe dieses Parameters beliebig weiter eingetheilt werden. Man hat solche Untereintheilungen gemacht, aber es kann ihre weitere Besprechung hier erspart werden. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden jedoch die Fälle $S = 0$, $T = 0$ discutiert werden und es ist dafür hiermit festgestellt, dass dieselben Familien nicht nur von Curven, sondern von Kegelflächen dritter Ordnung repräsentieren.

200. Wir wollen nun etwas genauer als in Art. 39. die Figur der Curve dritter Ordnung untersuchen, welche die in Art. 197. betrachtete Gleichung ausdrückt; dazu erscheint es zweckmässig, den Coordinatenanfang in die Mitte des Durchmessers des Ovals zu legen, so dass die Gleichung in der Form

$$ay^2 = (x^2 - m^2)(x - n)$$

geschrieben werden kann, mit $n > m$. Durch Differentiation finden wir, dass die den Maximalwerthen von y entsprechenden Werthe von x — für Punkte, deren Tangente der Axe der x parallel ist — durch die Gleichung

$$3x^2 - 2nx - m^2 = 0$$

bestimmt sind, also

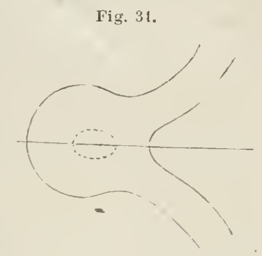
$$x = \tfrac{1}{3}\left\{n \pm \sqrt{(n^2 + 3m^2)}\right\}.$$

Wenn wir der Wurzel das negative Zeichen geben, so erhalten wir den dem höchsten Punkte des Ovals entsprechenden Werth der Abscisse und wir sehen aus dem negativen Zeichen desselben, dass das Oval nicht wie die Ellipse in Bezug auf beide Axen symmetrisch ist; sein höchster Punkt liegt auf derjenigen Seite der Axe, auf der sich der unendliche Ast nicht befindet. Das Oval ist symmetrisch in Bezug auf die Axe der x, nicht in Bezug auf die Axe der y, es steigt steiler auf an der einen und weniger steil an der andern Seite derselben. Je grösser n für einen gegebenen Werth von m ist, d. h. je grösser im Verhältniss die Distanz zwischen dem Oval und dem unendlichen Aste wird, desto mehr nähert sich das Oval der elliptischen zweifach symmetrischen Form, während anderseits seine Abweichung von dieser am grössten ist, wenn es sich mit dem unbegrenzten Theil zusammenschliesst, d. h. wenn die Curve einen Knotenpunkt hat; dann hat die Ordinate des höchsten Punktes ihren Fusspunkt in einem Drittel der Axe.

Wenn wir der Wurzel das positive Zeichen beilegen, so liegt der entsprechende Werth von x zwischen m und n und der zugehörige Werth von y ist nicht reell. Dazu zeigt die Form der Gleichung, dass der Berührungspunkt der Curve mit der unendlich fernen Geraden in der Geraden $x = 0$ —

nicht wie bei der Parabel $y^2 = px$ in der Geraden $y = 0$ — gelegen ist; die unendlichen Aeste der Curve dritter Ordnung nähern sich fortwährend dem Parallelismus mit der Axe y und es muss daher in endlicher Entfernung auf jeder Seite des Durchmessers ein Inflexionspunkt liegen, in welchem die Curve aus der Concavität gegen die Axe x in die Convexität übergeht. Daher der Name „divergierende Parabel". Die Form der Curve ist dann durch das Oval in Verbindung mit dem in der Figur rechts liegenden unendlichen Ast bezeichnet.

Fig. 31.



Wenn aber in der Gleichung $+m^2$ statt $-m^2$ steht, so giebt es kein Oval und der unendliche Ast ist entweder von der rechts oder von der links in der Figur angezeigten Form, d. h. es giebt oder es giebt nicht Punkte, für welche y ein Maximum ist und in welchen die Tangente der Axe x parallel geht, natürlich je nachdem $3m^2 \lesseqgtr n^2$ ist. Und es existiert überdiess der Uebergangsfall $3m^2 = n^2$, in welchem an jeder Seite der Axe x ein Inflexionspunkt mit zu ihr paralleler Tangente liegt.

Die Figuren der mit singulärem Punkt begabten Formen dürften eine weitere als die schon im Art. 39. gegebene Erläuterung nicht nöthig machen.

201. Wir kehren zu dem Falle zurück, in welchem die Curve ein Oval hat. Es ist offenbar, dass im Allgemeinen eine gerade Linie eine geschlossene Figur in einer geraden Zahl reeller Punkte schneiden muss, und dass daher jede gerade Linie, die das Oval der Curve dritter Ordnung einmal trifft, es noch zum zweiten mal und nicht öfter schneiden muss; denn eine Linie, die nach dem Innern des Ovals eintrat, muss dasselbe beim Austritt wieder durchsetzen und sie kann das Oval der Curve dritter Ordnung nicht viermal schneiden. Jede solche Gerade muss daher überdiess den unbegrenzten Theil der Curve einfach schneiden. Es folgt auch, dass keine Tangente der Curve das Oval ferner schneiden kann und daher, dass keiner der Inflexionspunkte im Oval liegen kann. Die Ansicht der Figur lehrt, dass von jedem

ausserhalb des Ovals gelegenen Punkt zwei Tangenten an dasselbe gehen.

Das Oval erscheint somit als eine stetige Reihe von Punkten, aus deren keinem, ausser der Tangente im Punkte selbst, eine reelle Tangente an die Curve gezogen werden kann; es ist daher jede Curve dritter Ordnung, die ein Oval enthält, von der im Art. 168. bezeichneten Classe, wo die vier Tangenten von jedem Punkte der Curve an dieselbe entweder sämmtlich reell oder sämmtlich nicht reell sind. Die Tangenten aus den Punkten des Ovals sind sämmtlich nicht reell, die Tangenten aus jedem Punkte des unendlichen Astes sind sämmtlich reell, zwei gehören dem Oval und zwei andere dem unendlichen Aste selbst an. In der That, jede Tangente in einem Punkte des unendlichen Astes muss denselben weiterhin schneiden, weil der dritte ihr und der Curve gemeinsame Punkt nicht in dem Oval liegen kann.

202. Das eben gesagte kann dazu dienen, die wesentliche Eigenschaft der Unicursal-Curven oder Curven vom Geschlecht Null zu erläutern. (Art. 44.) Die Coordinaten eines Punktes in einer solchen Curve können rational als Functionen eines Parameters ausgedrückt werden, so dass wir alle Punkte der Curve in einer stetigen Folge mit stets reellen Coordinaten erhalten, indem wir diesen Parameter in stetiger Folge alle Werthe vom negativ Unendlichen bis zum positiv Unendlichen durchlaufen lassen. Im gegenwärtigen Beispiel ist es im Gegentheil geometrisch evident, dass wir von irgend einem Punkte im Oval aus stetig fortschreitend zu ihm selbst zurückkommen, ohne durch irgend einen Punkt des unendlichen Astes zu gehen; und es ist algebraisch unmöglich, die Coordinaten irgend eines Punktes in Function eines Parameters anders als mit Hilfe einer Wurzelgrösse auszudrücken. Wir können z. B. setzen

$$z = 1,\ x = \theta,\ y = \sqrt{(a\theta^3 + 3b\theta^2 + 3c\theta + d)}.$$

Wir nennen darum die betrachtete Curve eine **zweitheilige** Curve, nämlich aus zwei getrennten stetigen Punktreihen bestehend.

Eine Curve der zweiten im Art. 197. betrachteten Art hat kein Oval und ist **eintheilig**, weil alle reellen Punkte

der Curve in einer stetigen Reihe einander folgen; aber die Curve ist nicht aus diesem Grunde unicursal oder vom Geschlecht Null, denn die Coordinaten eines Punktes können nicht rational in Function eines Parameters ausgedrückt werden; eine eintheilige Curve ist etwa ebenso wenig nothwendig unicursal, wie eine Gleichung, die nur eine reelle Wurzel hat, nothwendig eine lineare Gleichung ist. Eine Curve dritter Ordnung mit Knotenpunkt anderseits ist unicursal und eintheilig, alle Punkte der Curve folgen einander in einer bestimmten Ordnung in einfacher Reihe. Die Curve kann aber auch als aus einer Schleife und einem durch dieselbe in zwei Theile getrennten unendlichen Ast zusammengesetzt betrachtet werden; dann zeigt die Begründung des Art. 201., dass in der Schleife kein Inflexionspunkt liegen und keine Tangente dieselbe überdiess schneiden kann. Die Schleife enthält daher eine Reihe von Punkten, von deren keinem eine reelle Tangente an die Curve geht; während von jedem andern Punkte der Curve aus zwei reelle Tangenten an die Curve gehen, von denen die eine den Berührungspunkt in der Schleife, die andere im unendlichen Ast hat. So sind auch eine Curve dritter Ordnung mit isoliertem Punkt und eine solche mit Rückkehrpunkt gleichzeitig eintheilig und vom Geschlecht oder Defect Null.

203. Nachdem wir die Curven dritter Ordnung in fünf Arten getheilt haben, gehen wir dazu weiter, diese Arten in Species zu theilen nach der Natur ihrer unendlichen Aeste. Es ist offenbar, dass wir in jeder Art wenigstens vier Species haben werden, je nachdem die unendlich ferne Gerade die Curve schneidet a) in drei reellen und verschiedenen Punkten, b) in einem reellen Punkte und zwei nicht reellen, c) in einem reellen und und zwei zusammenfallenden Punkten, d) in drei zusammenfallenden Punkten. Wir müssen aber überdiess für die Curven dritter Ordnung mit einem singulären Punkt bei c) unterscheiden, ob die unendlich ferne Gerade eine eigentliche Tangente der Curve ist oder ob sie durch den Doppelpunkt derselben geht; und im Falle der Curven mit Knoten oder Rückkehrpunkt bei d), ob die unendlich ferne Gerade Tangente in einem Inflexionspunkt oder ob sie Tangente im Rückkehrpunkt oder eine Tangente im Doppel-

Doppelpunkt ist. Weiter ist es im Falle der zweitheiligen Curve dritter Ordnung oder der mit einem isolierten Punkt versehenen von Wichtigkeit bei a) und c) zu unterscheiden, ob die drei Punkte der Curve in der unendlich fernen Geraden sämmtlich zum unendlichen Ast, oder ob zwei von ihnen zum Oval oder der Schleife gehören, und nur der dritte zu dem unendlichen Aste. Die so in den Formen der Curve auftretenden Unterschiede sind so gross, dass die beiden Fälle wohl als verschiedene Species zu fassen sind. Aber damit sind auch die Verschiedenheiten aufgezählt, welche im Folgenden als Gründe für die Unterscheidung der Species benutzt worden sind.

Die einzigen andern Verschiedenheiten, welche ähnliche Ansprüche zu einer solchen Geltung haben dürften, betreffen die Frage, ob die unendlich fernen Punkte der Curve sämmtlich gewönliche Punkte oder ob einer ein Inflexionspunkt oder alle drei Inflexionspunkte sind. Da aber die Veränderungen geringer sind, welche durch sie in den Formen der Curve bedingt werden, und eine geringere Zahl der Species höchst wünschenswerth ist, so habe ich vorgezogen, die Curven nur nach den vorerwähnten Gesichtspunkten zu classificieren und die auf den letztgedachten Umstand zu gründende Unterscheidung als Varietät statt als Species zu behandeln.

Es erhellt übrigens, dass es in einigem Betracht willkürlich ist, wie viel Species von Curven dritter Ordnung unterschieden werden sollen, und dass Viel von dem Gesichtspunkt abhängt, unter welchem sie studiert werden.

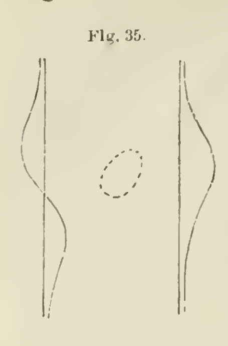
204. Für den Fall, wo die unendlich ferne Gerade eine stationäre Tangente der Curve ist, haben wir die Formen derselben früher studiert und die Figuren für andere Fälle können als Projectionen von je einer der Figuren dieses Falles betrachtet werden. Wir wollen mit zweitheiligen Curven beginnen und zuerst die Projection des Ovals betrachten. Wenn die in unendliche Ferne hinaus projicierte Linie das Oval nicht schneidet, so bleibt das Oval eine geschlossene Curve, während seine Projection, falls diese Linie es berührt oder in zwei reellen Punkten schneidet, dieselbe Art von roher Aehnlichkeit zu einer Parabel oder Hyperbel respective erhält,

welche das Oval selbst zur Ellipse hat, d. h. dass die Projection im erstern Falle wie die Parabel eine einfache Curve ist, deren Zweige in einer gemeinschaftlichen Richtung ins Unendliche gehen, ohne der Berührung mit einer endlichen Geraden zuzustreben, und dass sie im letztern Falle ein Paar von Curven bildet, welche zwei gemeinsame Asymptoten haben und in zweien der durch dieselben gebildeten Scheitelwinkel liegen — während sie allerdings in diesem wie in jenem Falle die Symmetrie der Kegelschnitte nicht besitzen. Die beiden so entstehenden unendlichen Aeste wollen wir kurz ein hyperbolisches Paar nennen, weil sie in der That nach wie vor als ein Ganzes von stetigem Zusammenhange bildend anzusehen sind. Die gewöhnliche Asymptote einer Curve hat einen positiven und negativen Ast derselben auf entgegengesetzten Seiten von ihr. Die Theorie der Projection lehrt uns die Enden einer geraden Linie im positiv Unendlichen und im negativ Unendlichen als Projection des nämlichen Punktes betrachten und zeigt uns ebenso die Aeste einer Curve, welche dieselbe Asymptote im positiven und im negativen Unendlichen berühren, als mit einander zusammenhängend. So wie das Oval eine geschlossene Curve ist, in der man von irgend einem ihrer Punkte aus in stetigem Laufe durch alle ihre Punkte zur Ausgangsstelle zurückkommt, so gilt diess auch für alle Projectionen des Ovals, und die hyperbolischen Aeste sind als eine continuierliche Curve zu betrachten, nämlich der Theil des einen Astes, welcher die Asymptote an ihrem positiven Ende berührt, als zusammenhängend mit dem Theil des andern Astes, welcher dieselbe Asymptote an ihrem negativen Ende berührt. Die Asymptoten selbst sind die Bilder derjenigen Tangenten des Ovals, deren Berührungspunkte mit demselben der in's Unendliche projicierten Geraden angehören.

205. Wir betrachten ferner die Projection des unendlichen Astes der Curve (Art. 197.), welcher von jeder Geraden entweder in einem reellen Punkte oder in drei solchen Punkten geschnitten wird. Sei zuerst die in's Unendliche projicierte Gerade eine solche, die die Curve nur einfach schneidet; dann werden die Aeste der projicierten Curve anstatt unbegrenzt auseinander zu gehen, der Berührung mit einer end-

lichen Asymptote in der Weise zustreben, wie diess die links liegende Curve der Figur zeigt. Diese Curve, welche wir weiterhin kurz als Serpentine bezeichnen wollen, muss offenbar drei Inflexionspunkte haben; denn sie ist convex gegen die Asymptote im positiv Unendlichen an der einen und ebenso convex gegen dieselbe Asymptote im negativ Unendlichen an ihrer andern Seite, weil jede Curve zu ihrer Tangente an beiden Seiten des Berührungspunktes convex ist; sie muss aus der ersteren Convexität in Concavität übergehen, um sodann die Asymptote zu durchschneiden; sie muss sich neuerdings wenden, um sich nicht ohne Ende von der Asymptote zu entfernen und zum dritten male, um der andern Seite der Asymptote an deren negativem Ende ihre Convexität zuzuwenden. Die Punkte der durch diese Figur bezeichneten Curve bilden eine stetige Reihe, denn es wird aus dem im letzten Art. 204. Entwickelten erhellen, dass die Aeste der Curve in ihrer Berührung mit der Asymptote im positiv und negativ Unendlichen als zusammenhängend zu betrachten sind. Der Punkt im Unendlichen der Serpentine ist als ein gewöhnlicher Punkt zu denken. Wenn derselbe aber ein Inflexionspunkt wäre, so würden die Aeste der Curve gegen das positiv und negativ Unendliche hin nicht wie in diesem Falle auf entgegengesetzten Seiten der Asymptote liegen, sondern an der nämlichen Seite derselben, wie es in der rechts verzeichneten Form der Fall ist. Wir wollen dieselbe als die conchoidale Form bezeichnen.

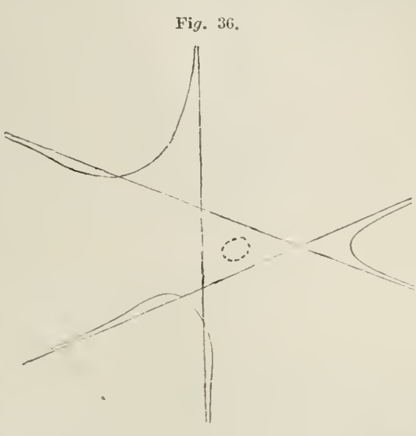
Fig. 35.



206. Wir denken zweitens die in's Unendliche projicierte Gerade als eine den unendlichen Ast in drei gewöhnlichen Punkten schneidende. Eine solche Gerade theilt die Curve in drei Theile, von denen der eine keinen Inflexionspunkt, der zweite einen und der dritte zwei Inflexionspunkte enthält. Die Projection der Curve zerfällt daher in drei unendliche Aeste, von denen der eine, den wir eine einfache Hyperbel nennen wollen, keinen Inflexionspunkt hat und seine Asymptoten nicht durchschneidet; während der zweite, welchen

wir als **einfach inflectierte Hyperbel** bezeichnen können, die eine Asymptote durchsetzt und somit einen Inflexionspunkt hat, und der dritte, eine **zweifach inflectierte Hyperbel** nach derselben Redeweise, beide Asymptoten durchsetzt und daher zwei Inflexionen hat [37]). Keine zwei von diesen Theilen bilden ein hyperbolisches Paar, wohl aber bilden alle drei zusammen eine continuierliche Reihe. So gehen wir in der Figur beginnend mit dem Niedersteigen im verticalen Aste der zweifach inflectierten Hyperbel durch das negativ Unendliche nach dem positiv Unendlichen derselben Asymptote, durch den einfach inflectierten Ast in's Unendliche der zweiten Asymptote, von da durch die einfache Hyperbel zum Unendlichen der dritten Asymptote und mit der zweifach inflectierten Hyperbel zum Ausgangspunkt zurück.

Fig. 36.



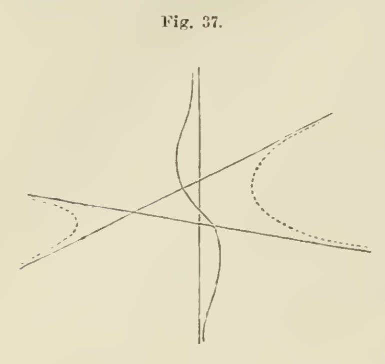
Wenn einer der unendlich entfernten Punkte ein Inflexionspunkt ist, so wird entweder die einfach inflectierte Hyperbel zur einfachen oder die doppelt inflectierte zur einfach inflectierten; wenn alle drei Inflexionspunkte im Unendlichen liegen, so besteht die Curve aus drei einfachen Hyperbeln.

Curven dritter Ordnung mit drei hyperbolischen Zweigen nannte **Newton** überschüssig hyperbolisch, weil sie einen solchen Zweig mehr als die Kegelschnitte enthalten; die mit einem unendlichen Ast wie im letzten Artikel nannte er unvollständig hyperbolisch und die durch die unendlich ferne Gerade berührten, welche ausserdem eine endlich angebbare Asymptote haben, parabolisch-hyperbolische Curven dritter Ordnung.

207. Wir können nun die folgenden Species der zweitheiligen Curven dritter Ordnung aufstellen.

1. Die im Unendlichen projicierte Gerade schneidet das Oval zweifach und den anderen Theil der Curve einfach; wenn der letzte Punkt a) ein gewöhnlicher Punkt ist, so besteht die Curve aus einer Serpentine und einem hyperbolischen Paar, wie in der Figur. Wenn der letzte Punkt b) ein Inflexionspunkt wäre, so wird nur die Serpentine in die conchoidale Form übergeführt.

Fig. 37.



2. Die im Unendlichen projicierte Gerade schneidet die Curve in drei reellen Punkten, von denen keiner dem Oval angehört. Wenn die Punkte a) sämmtlich gewöhnliche Punkte sind, so ist die Gestalt der Curve die in der Figur des Art. 206. gegebene; wenn einer der Punkte ein Inflexionspunkt ist, so besteht die Curve entweder b) aus einem Oval mit zwei einfachen Hyperbeln und einer doppelt inflectierten Hyperbel oder c) aus einem Oval mit einer einfachen Hyperbel und zwei einfach inflectierten Hyperbeln. In allen diesen Fällen liegt das Oval innerhalb des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks und die Curven können ferner unterschieden werden nach der Lage der Hyperbeln in den Winkeln, welche das Asymptotendreieck enthalten oder wie in der Figur in den Scheitelwinkeln derselben.

Fig. 38.



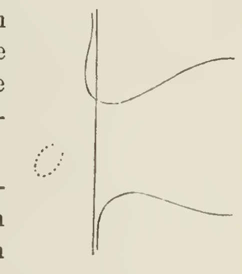
3. Die im Unendlichen projicierte Gerade schneidet die Curve in zwei nicht reellen Punkten, und wir erhalten a) ein Oval mit einer Serpentine oder b) mit einem conchoidalen Ast. (Art. 205.)

4. Die unendlich ferne Gerade berührt das Oval, welches dann eine parabolische Form annimmt und a) von einer Serpentine oder b) von einem conchoidalen Zweige begleitet wird.

5. Die unendlich ferne Gerade berührt den andern Theil der Curve und das Oval bleibt eine geschlossene Figur, wäh-

rend der andere Theil der Curve in parabolischer Form auseinander geht. Wenn a) der dritte Punkt im Unendlichen ein gewöhnlicher ist, so durchsetzt der eine Zweig die Asymptote und hat zwei Inflexionen, während der andere Zweig nur eine Inflexion besitzt. Wenn derselbe b) ein Inflexionspunkt wäre, so haben beide Aeste die Asymptote an derselben Seite und jeder derselben zeigt nur eine Inflexion.

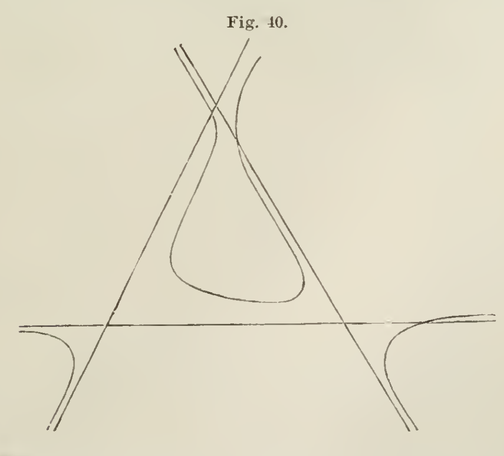
Fig. 39.



6. Die unendlich ferne Gerade schneidet die Curve in drei zusammenfallenden Punkten, der Fall, von welchem wir im Art. 200. ausgegangen sind.

208. Wir kommen nun zur Classification der eintheiligen Curven dritter Ordnung ohne singuläre Punkte und erkennen zunächst, dass nichts den Species (1) und (4) des letzten Artikels hier Entsprechendes existieren kann. Wir haben somit nur vier Species solcher eintheiliger Curven, nämlich überschüssig und unvollständig hyperbolische, parabolisch-hyperbolische und die divergierende Parabel, je nachdem die Punkte der Curve im Unendlichen sämmtlich reell und verschieden sind, oder zwei nicht reell, zwei zusammenfallend,

Fig. 40.



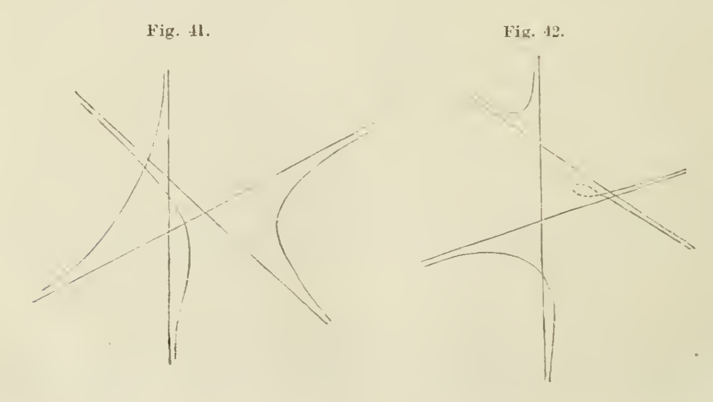
alle drei zusammenfallend. Bei jeder Species können die-

selben Varietäten aufgezählt werden wie im letzten Artikel und die Figuren desselben können sie darstellen, wenn wir das Oval in ihnen unterdrücken. Aber zur ferneren Erläuterung geben wir eine Figur für einen Fall, wo die begleitende Gerade die Seiten des Asymptoten-Dreiecks schneidet und wo zwei kritische Centra (Art. 193.) im Innern des Dreiecks liegen. Wir haben dann einen Theil der doppelt inflectierten Hyperbel in sackähnlicher Form im Innern des Dreiecks und es ist leicht zu erkennen, dass durch eine Aenderung im Werthe der Constanten die Oeffnung des Sackes geschlossen und ein Doppelpunkt in dem einen der kritischen Centra erzeugt werden kann, während durch eine weitere Aenderung derselben ein getrenntes Oval entstehen mag, welches zuletzt in den conjugierten Punkt im andern kritischen Centrum zusammenschrumpft.

In gleicher Art haben wir dieselben vier Species von Curven dritter Ordnung mit einem isolierten Punkt und dazu eine fünfte, für welche der isolierte Punkt im Unendlichen ist. Die Figuren für zweitheilige Curven dritter Ordnung reichen zur Illustration dieser Classe hin, wenn wir das Oval in einem conjugierten Punkt zusammen gezogen voraussetzen. Die Formen, welche dem Fall des unendlich fernen isolierten Punktes entsprechen, weichen nicht bedeutend von denen ab, für welche die unendlich ferne Gerade die Curve in einem reellen Punkte und zwei nicht reellen Punkten schneidet.

209. Von Curven dritter Ordnung mit Knotenpunkt haben wir die folgenden Species.

Fig. 41. Fig. 42.



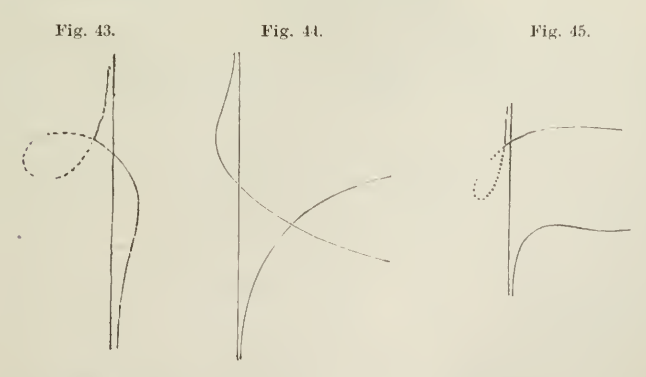
1. Die unendlich ferne Gerade schneidet die Schleife in zwei reellen Punkten; dem entspricht die Verbindung von zwei einfachen Hyperbeln und einer inflectierten Hyperbel, wie in der links stehenden Figur. Die Verfolgung der Curve in ihrem Gange durch das Unendliche zeigt, dass sie aus einem continuierlichen Zuge besteht. Es entstehen zwei Varietäten, je nachdem der dritte Punkt der unendlich fernen Geraden ein gewöhnlicher oder ein Inflexionspunkt ist; im letzteren Falle sind alle die Hyperbeln einfache.

2. Von den drei reellen Punkten im Unendlichen liegt keiner in der Schleife; es entsteht eine eingeschriebene, eine gemischte und eine umgeschriebene Hyperbel, von denen die letztere im Innern des Asymptotendreiecks eine Schleife bildet. Zwei Varietäten, je nachdem im Unendlichen eine Inflexion ist oder nicht.

3. Die unendlich ferne Gerade schneidet die Curve in zwei nicht reellen Punkten; mit zwei Varietäten wie vorher. (Fig. 43.)

4. Die unendlich ferne Gerade berührt die Schleife und

5. Sie berührt den sich ausbreitenden Theil der Curve. Die Figuren erklären sich selbst und wir bemerken nur, dass im ersteren Falle zwei Varietäten entspringen, indem die Curve ganz auf derselben Seite der Asymptote liegt, wenn sie im Unendlichen eine Inflexion hat.


Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45.

Ist ein Doppelpunkt im Unendlichen und giebt es folglich zwei parallele Asymptoten, so liegt der dritte unendlich ferne Punkt entweder

6. Auf dem sich ausbreitenden Theil oder

7. In der Schleife. Im erstern Falle ist der Inflexions-

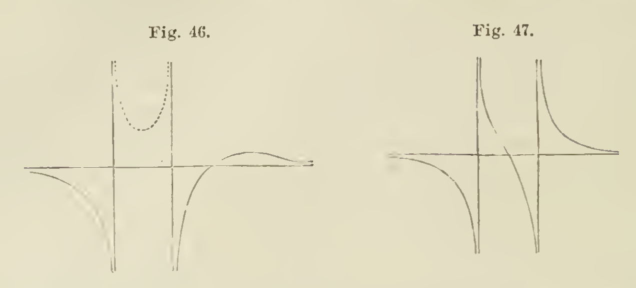


Fig. 46. Fig. 47.

punkt ausserhalb der parallelen Asymptoten, im letztern Falle zwischen denselben. Wenn auch die Inflexion im Unendlichen wäre, so würden beide Zweige im erstern Falle auf derselben Seite der Asymptote liegen.

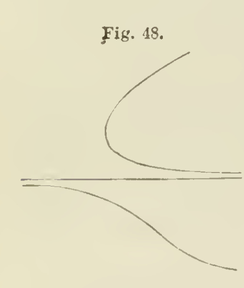


Fig. 48.

8. Die unendlich entfernte Gerade berührt in einem Inflexionspunkt und wir erhalten die divergierende Parabel vom Art. 200.

9. Die unendlich entfernte Gerade berührt in einem Doppelpunkt und wir erhalten eine Curve von beistehend gegebener Form, die man die Trident-Curve nennt.

210. Von den Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt giebt es offenbar keine Species, welche denen unter (1), (4) und (7) des letzten Artikels entsprechen. Die Species dieser Curven sind daher:

1. Drei reelle Punkte im Unendlichen, zwei Varietäten.

2. Ein reeller Punkt und zwei nicht reelle Punkte im Unendlichen, zwei Varietäten.

3. Die unendlich ferne Gerade als gewöhnliche Tangente, zwei Varietäten.

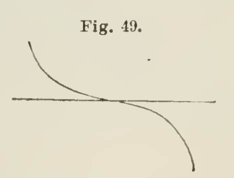
4. Die Spitze im Unendlichen, zwei Varietäten.

5. Die unendlich ferne Gerade als stationäre Tangente.

6. Die unendlich ferne Gerade als Rückkehrtangente.

Die Figuren für die Fälle (1), (2), (3) können mit Hilfe der Figuren des letzten Artikels leicht vergegenwärtigt werden,

indem man die in diesen Figuren punktirte Schleife unterdrückt und den Knoten- in einen Rückkehrpunkt überführt. Die Figur für den Fall (4) entsteht aus der links liegenden Figur des Art. 209. mit zwei parallelen Asymptoten, indem man die letztern vereinigt und den zwischen ihnen gelegenen Zweig unterdrückt denkt. Wir haben dann eine einfache Asymptote mit zwei unendlichen Aesten auf entgegengesetzten Seiten aber an dem nämlichen Ende derselben. Die Figur des Falles (5), die semicubische Parabel $my^2 = x^3$, ist in Art. 39. gegeben worden. Endlich geben wir hier die Figur des Falles (6), die cubische Parabel $m^2 y = x^3$.


Fig. 49.

211. Trotz der schon ziemlich grossen Zahl der Species wird es nicht schwierig erscheinen, die entwickelte Classification zu übersehen und zu erinnern, wenn man bemerkt, dass nichts Andres gethan worden ist, als die Fünf-Theilung des Art. 197. mit der Theilung des Art. 203. nach der Natur der unendlich fernen Punkte zu combinieren. Es bleibt übrig, einiges über frühere Classificationen der Curven dritter Ordnung zu sagen. Die erste wurde von Newton in dem Werke „Enumeratio linearum tertii ordinis“ [38]) gemacht und ist im Wesentlichen mit der hier gegebenen übereinstimmend, ausgenommen darin, dass er, was wir als Varietäten bezeichnet haben, zu eigenen Species macht, und darin, dass wir in dem Falle eines durch zwei Asymptoten berührten hyperbolischen Astes nicht beachtet haben, in welchem der durch dieselben gebildeten Scheitelwinkel der Ast liegt, während Newton die Fälle unterscheidet, wo er in dem durch die dritte Asymptote durchsetzten oder in dem Scheitelwinkel desselben liegt. Die Fälle, wo drei reelle Asymptoten sich in einem Punkte schneiden, sind als besondere Species betrachtet. Durch die Beachtung dieser Unterscheidungen ist die Zahl der Species auf acht und siebenzig erhöht. Newton geht den umgekehrten Weg der Entwicklung insofern, als er nicht wie wir die Fünf-Theilung zur primären macht und die von den unendlichen Aesten abhängende zur secundären.

Newton's Methode der Reduction der allgemeinen Gleichung ist die folgende: Wenn eine der Axen parallel

zur reellen Asymptote genommen wird, so verschwindet der Coefficient sagen wir von y^3 und die Gleichung der Curve hat die Form

$$y^2(ax+b)+y(fx^2+gx+h)+px^3+qx^2+rx+s=0.$$

Nun ist der Ort der Mittelpunkte der der Asymptote parallelen Sehnen offenbar

$$2axy+2by+fx^2+gx+h=0,$$

und wenn wir die Axen zu den Asymptoten dieser Hyperbel transformiert voraussetzen, so verschwinden die Glieder b, f, g und diess zeigt an, dass dieselbe Transformation die Gleichung der Curve dritter Ordnung auf die Form

$$xy^2+hy=px^3+qx^2+rx+s$$

oder mit Newton's Buchstaben

$$xy^2+ey=ax^3+bx^2+cx+d$$

zurückführt. Diess ist Newton's allgemeinste Form. Wenn jedoch in der Gleichung, wie wir sie geschrieben haben, a und b verschwinden, so ist der Ort nicht eine Hyperbel, sondern eine gerade Linie und je nachdem diese 1. die Linie $x=0$ oder 2. eine willkürliche Gerade ist, welche man für $y=0$ wählen kann, oder 3. die unendlich ferne Gerade, wird die Gleichung der Curve auf die respectiven Formen

$$xy=ax^3+bx^2+cx+d,\quad y^2=ax^3+bx^2+cx+d,$$
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

gebracht. Der einzige scheinbar abweichende Fall ist der, wo die Gleichung in der von uns gewählten Form $a=0$ hat und der Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen eine Parabel ist; aber in diesem Fall giebt es eine andere reelle Asymptote, für welche der Ort der Mittelpunkte der zu ihr parallelen Sehnen eine Hyperbel ist, und die Reduction vollzieht sich wie im ersten Falle, nur dass der Coefficient von x^3 in der transformierten Gleichung verschwindet. Newton's Resultate sind aus der Discussion dieser vier Formen erhalten. Wenn $y=\varphi(x)$ die Gleichung irgend einer Curve ist, so nannte Newton die Curve $xy=\varphi(x)$ einen Hyperbolismus dieser Curve; so nannte er also Curven dritter Ordnung, die einen Doppelpunkt im Unendlichen haben, und deren Gleichung daher in die Form

$$xy^2+ey=cx+d$$

gesetzt werden kann, Hyperbolismen der Ellipse, Hyperbel oder Parabel, weil die eben geschriebene Gleichung auf die eines Kegelschnitts zurückkommt, wenn man darin xy durch y ersetzt.

212. Wir haben früher der in seinem „System der analytischen Geometrie“ enthaltenen Discussion der Curven dritter Ordnung von Plücker Erwähnung gethan. In derselben ist die Natur der unendlich fernen Punkte der primäre Grund der Classification. Indem er mit dem Falle von drei reellen Asymptoten beginnt, wo die Gleichung der Curve von der Form

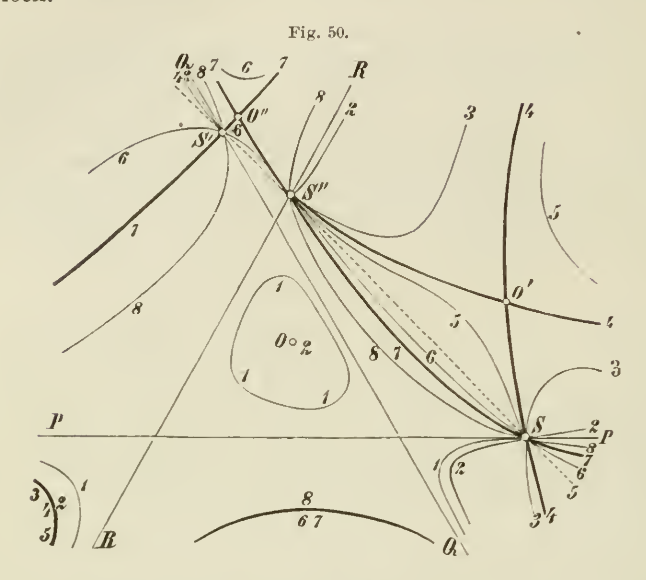
$$x_1 x_2 x_3 = ku^2 v$$

ist, werden zuerst die Fälle unterschieden, wo die Asymptoten sich in einem Punkte schneiden und wo sie ein Dreieck bilden; dann werden alle möglichen Lagen der begleitenden Linie $v = 0$ untersucht, ob sie das Dreieck durchsetzt, oder durch eine Ecke geht oder ausserhalb desselben bleibt, ob zwei kritische Centra (Art. 193.) zusammenfallen, etc. Er bezeichnet alle die Curven, die durch die obige Gleichung für irgend eine gegebene Lage der Geraden $x_i = 0$, $v = 0$, dargestellt werden können, als eine Gruppe und indem dem k alle möglichen Werthe ertheilt werden, treten die in derselben Gruppe enthaltenen Species hervor. Man wird das an der Figur der ersten Plücker'schen Gruppe besser übersehen, die wir hier reproducieren und die dem Falle entspricht, wo die begleitende Linie alle drei Seiten des asymptotischen Dreiecks in der Verlängerung schneidet, und wo drei reelle kritische Centren, das eine im Innern und zwei ausserhalb des Dreiecks vorhanden sind. Fig. 1. repräsentiert eine zweitheilige Curve von der oben mit I., 2 bezeichneten Species. Durch einen Wechsel im Werthe von k zieht sich das Oval in einen Punkt zusammen, und wir erhalten 2. die Curve mit isoliertem Punkt III., 1. Mit weiterer Aenderung von k wird die Curve 3. eintheilig, nämlich II., 1. und die Aeste entfernen sich weiter von ihren Asymptoten. In 4. durchsetzen die Aeste die andern Asymptoten und die Curve erhält einen Knotenpunkt, IV., 2.

Fig. 5. ist zweitheilig I., 1. Fig. 6. ist in unserer Auf-

zählung die Species 5, Fig. 7. ist 4. Fig. 8. ist 3, nur mit anderer Lage der Aeste in Bezug auf das asymptotische Dreieck.

Fig. 50.



Plücker's Gruppeneintheilung ist durch Cayley wieder untersucht worden [39]) und derselbe hat auch eine Vergleichung zwischen den Species von Newton und von Plücker gegeben, welcher letztere 219 zählt. Eine genauere Aufzählung dieser Classification kann hier nicht gegeben werden. Es muss die Erwähnung hinreichen, dass im Falle der parabolischen Curven die osculierende asymptotische Parabel eine wichtige Rolle spielt, eine Parabel, welche durch fünf auf einander folgende Punkte der Curve in ihrem Berührungspunkt mit der unendlich entfernten Geraden geht. Die Gleichung der Curve kann in die Form

$$x_1 (x_2^2 + 2x_3x_1 + x_3^2) = x_3^2 (ax_2 + bx_3)$$

gebracht werden, wo offenbar die Parabel

$$x_2^2 + 2x_3x_1 + x_3^2 = 0$$

die Curve in dem fünffach zählenden Punkte $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ schneidet. Die Gruppen werden dann durch die Lage der

osculierenden Parabel in Bezug auf die lineare Asymptote $x_1 = 0$ und die begleitende Linie

$$ax_2 + bx_3 = 0$$

gebildet.

IV. Abschnitt.

Curven dritter Ordnung vom Geschlecht Null.

213. Wir haben in „Anal. Geom. d. Kegelschn." Art. 237 f. gesehen, wie sehr die Rechnung dadurch erleichtert wird, dass die Coordinaten eines Punktes der Curve als Functionen eines Parameters ausgedrückt werden können und es ist in Art. 44. bewiesen worden, dass diess im Falle einer Curve vom Geschlecht oder Defect Null oder einer Unicursal-Curve stets möglich ist. Von der Anwendung dieses Princips auf Curven dritter Ordnung geben wir hier Beispiele. Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt kann stets auf die Form

$$x_1^2 x_3 = x_2^3$$

reduciert werden, wo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ der Rückkehrpunkt, $x_1 = 0$ die Rückkehrtangente und $x_3 = 0$ die stationäre Tangente ist. Ein beliebiger Punkt der Curve kann daher als der Durchschnittspunkt der Strahlen

$$\theta x_1 = x_2, \quad \theta^2 x_2 = x_3 \; *);$$

oder mit andern Worten, die Coordinaten eines Punktes der Curve können durch $1, \theta, \theta^3$ repräsentiert werden, wenn θ ein veränderlicher Parameter ist. Die gerade Verbindungslinie zweier Punkte θ, θ' der Curve hat dann die Gleichung

$$\theta\theta' (\theta + \theta') x_1 - (\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2) x_2 + x_3 = 0$$

---

*) Diese Gleichungen als auf Tangential- oder Liniencoordinaten bezogen, geben den Satz: Wenn J der Inflexionspunkt, C der Rückkehrpunkt und T der Durchschnitt ihrer Tangenten ist, so schneidet eine beliebige Tangente AB die Seiten des Dreiecks JCT so, dass

$$\overline{JA}^2 : \overline{AT}^2 = k\,(TB : BC)$$

ist. Für die unendlich ferne Gerade als eine Tangente ist $k = 1$. (Vergl. „Anal. Geom. d. Kegelschn." Art. 295.)

und für das Zusammenfallen von θ und θ' ergiebt sich die Gleichung der Tangente

$$2\theta^3 x_1 - 3\theta^2 x_2 + x_3 = 0.$$

Wenn wir die Durchschnittspunkte einer geraden Linie

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

mit der Curve suchen, so erhalten wir durch die Substitution $1, \theta, \theta^3$ für x_1, x_2, x_3 die Gleichung

$$a_1 + a_2\theta + a_3\theta^3 = 0$$

und da in dieser cubischen Gleichung das zweite Glied fehlt, so lernen wir, dass die Parameter von drei Punkten der Curve in einer Geraden durch die Relation

$$\theta + \theta' + \theta'' = 0$$

verbunden sind. Insbesondere ist der Tangentialpunkt von θ durch -2θ und der Berührungspunkt der von θ ausgehenden Tangente durch $-\frac{1}{2}\theta$ gegeben.

Wenn wir ebenso die Substitution $1, \theta, \theta^3$ für x_1, x_2, x_3 in die Gleichung einer Curve p^{ter} Ordnung machen, so wird das Glied θ^{3p-1} in der Gleichung fehlen und die Relation, welche die Parameter der $3p$ Durchschnittspunkte dieser Curve mit der Curve dritter Ordnung verbindet, besteht in dem Verschwinden ihrer Summe. Daher ist der Parameter des Restpunktes zu einem Punktesystem die negative Summe und der des beigeordneten Restes die Summe der Parameter der verschiedenen Punkte desselben; und die die Theorie der Reste betreffenden Sätze der Art. 159. f. erhellen so als unmittelbar evident für Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt. Wenn man die Parameter der Punkte $A, B, \ldots$ durch $a, b, \ldots$ bezeichnet, so ist z. B. die Bedingung dafür, dass sechs Punkte der Curve in einem Kegelschnitt liegen,

$$a + b + c + d + e + f = 0,$$

welches sogleich den Satz des Art. 155. giebt, dass für vier feste Punkte einer Curve dritter Ordnung A, B, C, D die Verbindungslinie der Punkte E, F, in welchen ein durch jene Punkte gehender Kegelschnitt die Curve ferner schneidet, durch den festen Punkt

$$a + b + c + d$$

geht, und dass dieser Punkt construiert werden kann, indem man die Punkte durch eine Gerade verbindet, in welchen die geraden Linien

$$AB, \; CD$$

die Curve ferner schneiden, weil

$$-(a+b)-(c+d)+(a+b+c+d)=0$$

ist. So werden ferner verschiedene Constructionen für den neunten Durchschnittspunkt der Curve mit einer durch acht ihrer Punkte gehenden Curve dritter Ordnung aus der Betrachtung der Gleichung

$$(a+b+c+d)+(e+f+g+h)+i=0$$

erhalten.

214. Die Parameter der Punkte, deren Tangenten durch einen gegebenen Punkt x_i gehen, werden durch Substitution seiner Coordinaten in

$$2\theta^3 x_1 - 3\theta^2 x_2 + x_3 = 0$$

gefunden; und da in der erhaltenen cubischen Gleichung der Coefficient von θ verschwindet, so ist die Summe der reciproken Werthe ihrer Wurzeln Null, d. h. die Parameter $\theta, \theta', \theta''$ von drei Punkten der Curve, deren Tangenten ein Büschel bilden, genügen der Relation

$$\theta^{-1}+\theta'^{-1}+\theta''^{-1}=0.$$

Und da in derselben Art die Bedingung, unter welcher

$$2\theta^3 x_1 - 3\theta^2 x_2 + x_3 = 0$$

eine Curve p^{ter} Classe berührt, eine Relation p^{ten} Grades unter den Coefficienten $2\theta^3, 3\theta^2, 1$ ist, und also das Glied θ nicht enthalten kann, so ergiebt sich allgemein, dass die $3p$ Punkte, deren Tangenten eine feste Curve p^{ter} Classe berühren, durch die Relation $\Sigma\,(\theta^{-1})=0$ verbunden sind. Wir geben einige Anwendungen dieser Methode.

Beispiel 1. Man soll den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangentenpaare einer Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt finden, deren Berührungssehnen durch einen festen Punkt γ der Curve gehen. Man hat zwischen den drei Gleichungen

$$2\alpha^3 x_1 - 3\alpha^2 x_2 + x_3 = 0, \quad 2\beta^3 x_1 - 3\beta^2 x_2 + x_3 = 0,$$
$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

mit bekanntem γ die Grössen α, β zu eliminieren und findet

$$\gamma\,(2\gamma x_1 + 3x_2)^2 + 2x_1x_3 = 0\,,$$

die Gleichung eines Kegelschnitts.

Beispiel 2. Wenn ein Polygon von gerader Seitenzahl in eine Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt eingeschrieben ist, und alle seine Seiten bis auf eine durch feste Punkte der Curve gehen, so geht auch die letzte Seite durch einen festen Punkt der Curve. Bezeichnen wir die Parameter der Ecken durch $a_1, a_2, \ldots$ und die der festen Punkte durch $b_1, b_2, \ldots$ und wählen wir der Einfachheit wegen den Fall eines Vierecks, weil der allgemeine Beweis daraus erhellt, so haben wir die Gleichungen

$$a_1 + b_1 + a_2 = 0\,,\quad a_2 + b_2 + a_3 = 0\,,\quad a_3 + b_3 + a_4 = 0\,,$$
$$a_4 + b_4 + a_1 = 0.$$

Durch Addition und Subtraction erhalten wir

$$b_1 + b_3 = b_2 + b_4\,,$$

d. h. die Verbindungslinien der Punkte B_1, B_3 und B_2, B_4 schneiden sich in der Curve, oder wenn drei der Punkte bekannt sind, so ist es auch der vierte. Der Satz ist für alle Curven dritter Ordnuug wahr, weil der gegebene Beweis sich sofort in die Sprache der Theorie der Reste übertragen lässt; die Punktepaare B_1, B_3; B_2, B_4 sind beigeordnete Reste, für welche das System der Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 ein gemeinschaftlicher Rest ist.

Es ergiebt sich als ein specieller Fall dieses Satzes, dass für ein Polygon von ungerader Seitenzahl, dessen Seiten durch feste Punkte der Curven gehen, auch die Tangente in jeder Ecke durch einen festen Punkt der Curve geht, und dass somit das Problem, ein solches Polygon zu construieren, dessen Seiten durch feste Punkte einer Curve dritter Ordnung ohne singulären Punkt gehen, vier Lösungen gestattet.

Beispiel 3. Man soll die Quasi-Evolute bestimmen unter der Voraussetzung, dass die beiden festen Punkte in der Curve liegen. (Vergl. Beisp. 5., Art. 99.). Die Gleichung der Quasi-Normale ist nach Art. 107.

$$(\beta^2 + \beta\theta - 2\theta^2)\left\{\theta\alpha\,(\theta + \alpha)\,x_1 - (\theta^2 + \theta\alpha + \alpha^2)\,x_2 + x_3\right\}$$
$$+ (\alpha^2 + \alpha\theta - 2\theta^2)\left\{\theta\beta\,(\theta + \beta)\,x_1 - (\theta^2 + \theta\beta + \beta^2)\,x_2 + x_3\right\} = 0.$$

Wenn wir sie durch die Substitution $\theta = \dfrac{\alpha - \beta\lambda}{1 - \lambda}$ umformen, so erhalten wir in Uebereinstimmung mit Art. 108. eine biquadratische Gleichung in λ, in welcher die beiden äussersten Glieder an jedem Ende nur respective durch einen constanten Factor sich unterscheiden und deren Discriminante daher neben den die Tangenten in α und β repräsentierenden Factoren eine Curve von der vierten Ordnung darstellt.

215. Es erübrigt, einige bemerkenswerthe Beispiele von Curven dritter Ordnung und dritter Classe zu erwähnen. Wir haben früher die semi-cubische Parabel erwähnt, welche die Evolute der Parabel zweiten Grades ist. Ihre Gleichung

$$py^2 = x^3$$

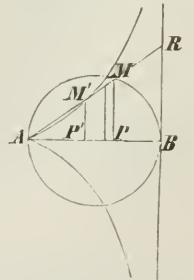
zeigt, dass der Rückkehrpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten und der Inflexionspunkt im Unendlichen liegt. In der cubischen Parabel anderseits

$$p^2y = x^3$$

liegt der Inflexionspunkt im Anfangspunkt und der Rückkehrpunkt im Unendlichen. In der cubischen Parabel ist der Anfangspunkt ein Centrum und alle Durchmesser der Curve fallen mit der Axe der y zusammen; denn wenn wir eine Gerade $y = mx + n$ ziehen, so ist die Summe der Werthe der x gleich Null.

Zu den Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt gehört auch die Cissoide des Diocles, welche dieser Geometer zur Bestimmung der zwei mittleren Proportionalen erdacht hatte. Sie kann als der Ort eines Punktes M' definiert werden, wo der Radius vector des Kreises AM durch eine Ordinate $P'M'$ geschnitten wird, für die $AP' = BP$ ist. Wir müssen haben

Fig. 51.



$$AM' = RM$$

und daher

$$\varrho = AR - AM$$

oder

$$\varrho = 2r \sec\omega - 2r \cos\omega = 2r \tan\omega \sin\omega$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$x(x^2 + y^2) = 2ry^2$$

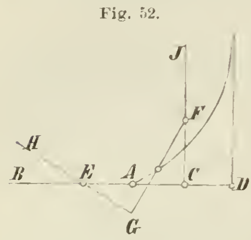
oder

$$(2r - x)y^2 = x^3.$$

Daher ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein Rückkehrpunkt und $x = r$ eine Asymptote, welche die Curve in einem unendlich fernen Inflexionspunkt trifft. Newton hat für die Erzeugung der Curve durch eine stetige Bewegung folgende elegante Construction gegeben. Für einen rechten Winkel FGH habe der Schenkel FG eine

feste Länge, der Punkt F bewegt sich längs einer festen Geraden CJ, während der Schenkel GH durch einen festen Punkt E geht. Ein im Mittelpunkt von FG angebrachter Stift beschreibt die Cissoide. Der Beweis bleibt dem Leser

Fig. 52.



überlassen [40]). Die Cissoide ist auch der Ort, den man erhält, wenn man in jedem vom Scheitel ausgehenden Radius vector der Parabel den reciproken Werth seiner Länge abträgt; sie ist also auch der Ort des Fusspunktes einer Normalen vom Scheitel der Parabel auf die Tangente derselben; oder mit andern Worten: Wenn eine Parabel auf einer ihr gleichen Parabel rollt, so ist der Ort ihres Scheitels die Cissoide.

216. Wir können in wesentlich analoger Art auch die Coordinaten eines Punktes in einer Curve dritter Ordnung mit Knoten- oder isoliertem Punkt mittelst eines einzigen Parameters ausdrücken. Für den Doppelpunkt als Anfangspunkt ist die Gleichung von der Form

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + 3fx^2 + 6gxy + 3hy^2 = 0$$

und wir erhalten also für $y = \theta x$ rationale Ausdrücke für x und y in Function von θ.

Die Discussion gestaltet sich aber einfacher, wenn wir die Gleichung, wie stets möglich ist, in die Form transformiert denken

$$(x_1^2 \pm x_2^2)\, x_3 = x_1^3.$$

Dann ist $x_3 = 0$ die Tangente in dem einen reellen Inflexionspunkt, den die Curve haben muss, $x_1 = 0$ ist die Verbindungslinie des Inflexionspunktes mit dem Doppelpunkte und

$$x_1^2 \pm x_2^2 = 0$$

sind die Tangenten der Curve im Doppelpunkt, so dass das obere Zeichen dem Falle der Curve mit isoliertem Punkt, das untere dem Falle der Curve mit Knotenpunkt entspricht. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve sind proportional zu

$$(1 \pm \theta^2), \quad \theta\,(1 \pm \theta^2), \; 1.$$

Die Substitution dieser Grössen in die Gleichung einer willkürlichen Geraden

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

giebt zur Bestimmung der Parameter ihrer Schnittpunkte mit der Curve

$$(\xi_1 + \xi_3) + \xi_2 \theta \pm \xi_1 \theta^2 \pm \xi_2 \theta^3 = 0,$$

und diese Parameter $\theta', \theta'', \theta'''$ sind somit durch die Relation verbunden

$$\theta'\theta'' + \theta''\theta''' + \theta'''\theta' = \pm 1.$$

Wenn die Gerade in einem Inflexionspunkt berührt, so ist $\theta' = \theta'' = \theta'''$ und daher $\theta^2 = \pm \frac{1}{3}$, d. h. eine Curve dritter Ordnung mit isoliertem Punkt hat drei reelle Inflexionspunkte und eine solche mit Doppelpunkt einen reellen und zwei nicht reelle.

Die Gleichung der Verbindungslinie von zwei Punkten θ, θ' ist

$$(\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2 \pm 1)\, x_1 - (\theta + \theta')\, x_2 = \pm (1 \pm \theta^2)(1 \pm \theta'^2)\, x_3$$

und daher die Gleichung einer Tangente

$$(3\theta^2 \pm 1)\, x_1 - 2\theta x_2 = \pm (1 \pm \theta^2)^2\, x_3.$$

Wir erkennen daraus, dass für vier Punkte, deren Tangenten ein Büschel bilden, die Summe der entsprechenden Parameter verschwindet und dass für zwei derselben als gegeben die quadratische Bestimmungsgleichung der Parameter der beiden andern sofort gebildet werden kann. Die Anwendung dieser Methode auf Beispiele bietet keine Schwierigkeit. Wir haben in Art. 123., 1. die Curve dritter Ordnung mit Knotenpunkt von der Polargleichung

$$\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \tfrac{1}{3}\,\omega = m^{\frac{1}{3}}$$

bemerkt, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$27\,(x^2 + y^2)\, m = (4m - x)^3$$

ist, eine Curve mit drei Inflexionspunkten im Unendlichen, einem reellen und den beiden andern in den nicht reellen Kreispunkten der Ebene; der Knotenpunkt liegt in der Axe der x bei $x = -8m$.

217. Wenn eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt drei reelle Inflexionspunkte hat, so ist der isolierte Punkt der Pol ihrer Verbindungslinie in Bezug auf das Dreieck ihrer Tangenten. Sei

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = m x_1 x_2 x_3$$

die Gleichung der Curve, so müssen die Coordinaten des Doppelpunktes, falls ein solcher existiert, den durch Differentiation daraus entstehenden Gleichungen

$$3\,(x_1 + x_2 + x_3)^2 = m x_2 x_3 = m x_3 x_1 = m x_1 x_2$$

genügen; wir erhalten aus ihnen

$$x_1 = x_2 = x_3,$$

welches nach Art. 166. den angezeigten Satz ausspricht und wir haben somit für die Curve mit Doppelpunkt $m = 27$. Die Gleichung der Curve kann daher auch in der Form

$$x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}} = 0$$

geschrieben werden. Dann werden die Coordinaten eines Punktes zu

$$\theta^3,\ (1 - \theta)^3,\ -1$$

proportional und die Gleichung der entsprechenden Tangente ist

$$(1 - \theta)^2 x_1 + \theta^2 x_2 + \theta^2\,(1 - \theta)^2\, x_3 = 0.$$

V. Abschnitt.

Invarianten und Covarianten der Curven dritter Ordnung.

218. Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung ohne singulären Punkt kann immer auf die kanonische Form

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m x_1 x_2 x_3 = 0$$

reduciert werden, in welcher (Art. 23.) jedes der x_i drei Constanten implicite enthält, so dass in ihr mit Einschluss der Constanten m die zehn Constanten vorhanden sind, die nach dem Kennzeichen des Art. 24. eine cubische Form enthalten muss, um jede beliebige Curve dritter Ordnung darstellen zu können. Wir wollen jetzt zeigen, wie die Gleichung einer beliebigen Curve dritter Ordnung auf die bezeichnete Form

reduciert werden kann. Wenn ω eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet, so kann die reducierte Gleichung in der Form geschrieben werden

$$(x_1 + x_2 - 2mx_3)(\omega x_1 + \omega^2 x_2 - 2mx_3)(\omega^2 x_1 + \omega x_2 - 2mx_3) \\ + (1 + 8m^3)x_3^3 = 0,$$

aus welcher ersichtlich ist, dass die Linie

$$x_3 = 0$$

drei Inflexionspunkte verbindet und zugleich, dass das nämliche für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ ebenso nachgewiesen werden kann. Somit bilden diese drei Geraden eins der vier Systeme von drei Linien, welche wie wir in Art. 175. sahen durch die neun Inflexionspunkte gezogen werden können, und wir sehen so voraus, dass das Problem der Reduction der allgemeinen Gleichung der Curve dritter Ordnung auf die canonische Form vier Lösungen hat. (Art. 228.) Diese Form ist die, welche wir in unsern Untersuchungen über Curven dritter Ordnung immer gebrauchen wollen; zuvor müssen wir aber mindestens für den Nachweis der Reducierbarkeit die Invarianten der Gleichung in der allgemeinen Form bilden und wollen diese Letztere schreiben wie folgt

$$a x_1^3 + b x_2^3 + c x_3^3 + 3a_2 x_1^2 x_2 + 3a_3 x_1^2 x_3 + 3b_1 x_2^2 x_1 \\ 3b_3 x_2^2 x_3 + 3c_1 x_3^2 x_1 + 3c_2 x_3^2 x_2 + 6m x_1 x_2 x_3 = 0,$$

indem wir die Coefficienten als a, b oder c schreiben, je nachdem die höchst potenzierte Variable des Gliedes die erste, zweite oder dritte ist und den Index der andern Variabeln beifügen, die das Glied noch enthält, bei dem Product aller drei Variabeln aber, welches sich dieser Regel entzieht, einfach m setzen [11]).

219. Wir bilden zuerst die Gleichung der Hesse'schen Curve. Die zweiten Differentialquotienten der cubischen Form sind mit Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors sechs

$$\begin{aligned} U_{11} &= a x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, & U_{23} &= m x_1 + b_3 x_2 + c_2 x_3, \\ U_{22} &= b_1 x_1 + b x_2 + b_3 x_3, & U_{13} &= a_3 x_1 + m x_2 + c_1 x_3, \\ U_{33} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c x_3, & U_{12} &= a_2 x_1 + b_1 x_2 + m x_3; \end{aligned}$$

für die Discriminante

$$H = U_{11}U_{22}U_{33} + 2U_{23}U_{13}U_{12} - U_{11}U_{23}^2 - U_{22}U_{13}^2 - U_{33}U_{12}^2$$

erhält man daraus eine cubische Form mit den Coefficienten

$$\mathsf{a},\ \mathsf{b},\ \mathsf{c},\ \mathsf{a}_2,\ \mathsf{a}_3,\ \mathsf{b}_1,\ \mathsf{b}_3,\ \mathsf{c}_1,\ \mathsf{c}_2,\ \mathsf{m}$$

von folgenden Werthen

$$\begin{aligned}
\mathsf{a} &= ab_1c_1 + 2ma_2a_3 - am^2 - b_1a_3^2 - c_1a_2^2,\\
\mathsf{b} &= ba_2c_2 + 2mb_3b_1 - bm^2 - c_2b_1^2 - a_2b_3^2,\\
\mathsf{c} &= cb_3a_3 + 2mc_1c_2 - cm^2 - a_3c_2^2 - b_3c_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\mathsf{a}_2 &= abc_1 - 2ab_3m + ab_1c_2 - a_3^2b + a_2m^2 - a_2b_1c_1 + 2a_2a_3b_3 - a_2^2c_2,\\
3\mathsf{a}_3 &= acb_1 - 2ac_2m + ab_3c_1 - a_2^2c + a_3m^2 - a_3b_1c_1 + 2a_2a_3c_2 - a_3^2b_3,\\
3\mathsf{b}_1 &= abc_2 - 2a_3bm + ba_3c_1 - ab_3^2 + b_1m^2 - b_1a_2c_2 + 2b_1b_3a_3 - b_1^2c_1,\\
3\mathsf{b}_3 &= a_2bc - 2bc_1m + ba_3c_2 - cb_1^2 + b_3m^2 - b_3a_2c_2 + 2b_1b_3c_1 - a_3b_3^2,\\
3\mathsf{c}_1 &= ab_3c - 2a_2cm + ca_3b_1 - ac_2^2 + c_1m^2 - c_1a_3b_3 + 2c_1c_2a_2 - b_1c_1^2,\\
3\mathsf{c}_2 &= a_3bc - 2b_1cm + ca_2b_3 - bc_1^2 + c_2m^2 - c_2a_3b_3 + 2c_1c_2b_1 - a_2c_2^2,\\
6\mathsf{m} &= abc - (ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1) + 2m^3 - 2m(b_1c_1 + c_2a_2 + a_3b_3)\\
&\quad + 3(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2).
\end{aligned}$$

Insbesondere wird die Hesse'sche Curve von

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$$

durch

$$-m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (1 + 2m^3)x_1x_2x_3 = 0$$

dargestellt.

220. Wir können ebenso die Gleichung der Cayley'schen Curve bilden. Diese Contravariante drückt die Bedingung aus, unter welcher die gerade Linie

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$$

von den Kegelschnitten

$$U_1 = 0,\quad U_2 = 0,\quad U_3 = 0$$

und von dem ganzen durch sie bestimmten Netze von Kegelschnitten in Involution geschnitten wird. Man hat

$$\begin{aligned}
U_1 &= ax_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + 2mx_2x_3 + 2a_3x_1x_3 + 2a_2x_1x_2,\\
U_2 &= a_2x_1^2 + bx_2^2 + c_2x_3^2 + 2b_3x_2x_3 + 2mx_1x_3 + 2b_1x_1x_2,\\
U_3 &= a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + cx_3^2 + 2c_2x_2x_3 + 2c_1x_1x_3 + 2mx_1x_2,
\end{aligned}$$

und die fragliche Bedingung ist nach „Kegelschnitte“ Art. 337., 356.

$$\begin{vmatrix} c_1\xi_1^2-2a_3\xi_3\xi_1+a\xi_3^2, & c_1\xi_2^2-2m\xi_3\xi_2+b_1\xi_3^2, & c_1\xi_1\xi_2-m\xi_3\xi_1-a_3\xi_3\xi_2+a_2\xi_3^2 \\ c_2\xi_1^2-2m\xi_3\xi_1+a_2\xi_3^2, & c_2\xi_2^2-2b_3\xi_3\xi_2+b\xi_3^2, & c_2\xi_1\xi_2-b_3\xi_3\xi_1-m\xi_3\xi_2+b_1\xi_3^2 \\ c\xi_1^2-2c_1\xi_3\xi_1+a_3\xi_3^2, & c\xi_2^2-2c_2\xi_3\xi_2+b_3\xi_3^2, & c\xi_1\xi_3-c_2\xi_3\xi_1-c_1\xi_3\xi_2+m\xi_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder in entwickelter Form

$$\begin{aligned} P \equiv A\xi_1^3 + B\xi_2^3 + C\xi_3^3 + 3A_2\xi_1^2\xi_2 + 3A_3\xi_1^2\xi_3 + 3B_1\xi_2^2\xi_1 \\ + 3B_3\xi_2^2\xi_3 + 3C_1\xi_3^2\xi_1 + 3C_2\xi_1^2\xi_2 + 6M\xi_1\xi_2\xi_3 \end{aligned}$$

mit folgenden Werthen der Coefficienten

$$\begin{aligned}
A &= bcm - bc_1c_2 - cb_1b_3 - b_3c_2m + b_1c_2^2 + c_1b_3^2, \\
B &= cam - ca_2a_3 - ac_1c_2 - a_3c_1m + a_2c_1^2 + c_2a_3^2, \\
C &= abm - ab_1b_3 - ba_2a_3 - b_1a_2m + b_3a_2^2 + a_3b_1^2, \\
3A_2 &= -bca_3 - cb_1m + bc_1^2 + 2ca_2b_3 + 2c_2m^2 - 3b_3c_1m \\
&\quad + c_2a_3b_3 + b_1c_1c_2 - 2a_2c_2^2, \\
3A_3 &= -bca_2 - bc_1m + cb_1^2 + 2ba_3c_2 + 2b_3m^2 - 3c_2b_1m \\
&\quad + b_3a_2c_2 + b_1c_1b_3 - 2a_3b_3^2, \\
3B_1 &= -cab_3 - ca_2m + ac_2^2 + 2ca_3b_1 + 2c_1m^2 - 3a_3c_2m \\
&\quad + c_1a_3b_3 + a_2c_1c_2 - 2b_1c_1^2, \\
3B_3 &= -cab_1 - ac_2m + ca_2^2 + 2ab_3c_1 + 2a_3m^2 - 3c_1a_2m \\
&\quad + a_3b_1c_1 + a_2c_2a_3 - 2b_3a_3^2, \\
3C_1 &= -abc_2 - ba_3m + ab_3^2 + 2ba_2c_1 + 2b_1m^2 - 3a_2b_3m \\
&\quad + b_1a_2c_2 + a_3b_1b_3 - 2c_1b_1^2, \\
3C_2 &= -abc_1 - ab_3m + ba_3^2 + 2ab_1c_2 + 2a_2m^2 - 3a_3b_1m \\
&\quad + a_2b_1c_1 + a_2a_3b_3 - 2c_2a_2^2, \\
6M &= abc - (ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1) - 4m^3 \\
&\quad + 4m(b_1c_1 + c_2a_2 + a_3b_3) - 3(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2).
\end{aligned}$$

Für

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$$

ist die Gleichung der Cayley'schen Curve speciell

$$m(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) + (1 - 4m^3)\xi_1\xi_2\xi_3 = 0.$$

221. Wenn wir in der eben entwickelten Contravariante für die ξ_1, ξ_2, ξ_3 Symbole der Differentiation nach x_1, x_2, x_3 respective einsetzen und mit dem so gebildeten Symbol an der gegebenen cubischen Form U operieren, so ist nach Art. 94. der „Vorlesungen" das Resultat eine Invariante. Sie ist vom vierten Grade in den Coefficienten und wird durch S bezeichnet; ihre entwickelte Form ist

$$S = abcm - (bca_2a_3 + cab_1b_3 + abc_1c_2) - m(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1)$$
$$+ (ab_1c_2^2 + bc_2a_3^2 + ac_1b_3^2 + ba_2c_1^2 + cb_3a_2^2 + ca_3b_1^2) - m^4$$
$$+ 2m^2(b_1c_1 + c_2a_2 + a_3b_3) - 3m(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2)$$
$$- (b_1^2c_1^2 + c_2^2a_2^2 + a_3^2b_3^2) + (c_2a_2a_3b_3 + a_3b_3b_1c_1 + b_1c_1c_2a_2).$$

Wir drücken dieselbe Sache nur anders aus, wenn wir sagen, dass die Gleichung der Cayley'schen Curve in der Form

$$\Big(\xi_1^3 \frac{d}{da} + \xi_2^3 \frac{d}{db} + \xi_3^3 \frac{d}{dc} + \xi_1^2\xi_2 \frac{d}{da_2} + \xi_1^2\xi_3 \frac{d}{da_3} + \xi_2^2\xi_1 \frac{d}{db_1}$$
$$+ \xi_2^2\xi_3 \frac{d}{db_3} + \xi_3^2\xi_1 \frac{d}{dc_1} + \xi_3^2\xi_2 \frac{d}{dc_2} + \xi_1\xi_2\xi_3 \frac{d}{dm}\Big) S = 0$$

geschrieben werden kann. Wir haben in Art. 150. der „Vorlesungen" die symbolische Methode erwähnt[12], durch welche Aronhold diese Invariante S zuerst erhalten hat; brauchen wir für dieselbe das dort entwickelte Symbol

$$(123)\ (234)\ (341)\ (412),$$

so ist das entsprechende Symbol ihrer Evectante die linke Seite der Gleichung der Cayley'schen Curve

$$(123)\ (\xi 23)\ (\xi 31)\ (\xi 12).$$

Für die kanonische Form ist

$$S = m - m^4$$

und weil in Folge dessen S mit $m = 0$ verschwindet, oder wenn diese Gleichung die Form

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

hat, so entspricht das Verschwinden von S der Reducierbarkeit der Gleichung auf die Summe von drei Cuben.

222. Wenn eine Form

$$U = ax_1^n + bx_2^n + cx_3^n + \cdots$$

und eine Covariante V derselben von gleichem Grade

$$\mathrm{a}x_1^n + \mathrm{b}x_2^n + \mathrm{c}x_3^n + \cdots$$

bekannt sind, so kann man aus jeder Invariante von U die entsprechende Invariante von $U + \lambda V$ bilden und erhält in den Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ in ihrer Entwickelung neue Invarianten; man kann also in dem vorausgesetzten Falle aus jeder Invariante von U eine neue bilden, indem man an ihr die Operation

$$\mathfrak{a}\,\frac{d}{da} + \mathfrak{b}\,\frac{d}{db} + \mathfrak{c}\,\frac{d}{dc} + \cdots$$

vollzieht. Wenn wir diess Princip auf die cubische Form und ihre Hesse'sche Covariante anwenden, so können wir aus der Invariante S eine neue Invariante T vom sechsten Grade in den Coefficienten ableiten; oder was dasselbe sagt, wir können die neue Invariante T bilden, indem wir in die Gleichung der Cayley'schen Curve an Stelle der ξ_i Differentialsymbole substituieren und mit dem entstandenen Symbol an der Hesse'schen Covariante operieren. So erhalten wir für T den Werth

$$\begin{gathered}
a^2b^2c^2 - 6abc\,(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1) - 20\,abcm^3 \\
+ 12\,abcm\,(b_1c_1 + c_2a_2 + a_3b_3) + 6\,abc\,(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\
+ 4\,(a^2bc_2^3 + a^2cb_3^3 + b^2ca_3^3 + b^2ac_1^3 + c^2ab_1^3 + c^2ba_2^3) \\
+ 36\,m^2\,(bca_2a_3 + cab_1b_3 + abc_1c_2) \\
- 24\,m\,(bcb_1a_3^2 + bcc_1a_2^2 + cac_2b_1^2 + caa_2b_3^2 + aba_3c_2^2 + abb_3c_1^2) \\
- 3\,(a^2b_3^2c_2^2 + b^2c_1^2a_3^2 + c^2a_2^2b_1^2) \\
+ 18\,(bcb_1c_1a_2a_3 + cac_2a_2b_3b_1 + aba_3b_3c_1c_2) \\
- 12\,(bcc_2a_3a_2^2 + bcb_3a_2a_3^2 + cac_1b_3b_1^2 + caa_3b_1b_3^2 + aba_2c_1c_2^2 + abb_1c_2c_1^2) \\
- 12\,m^3\,(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1) \\
+ 12\,m^2\,(ab_1c_2^2 + ac_1b_3^2 + ba_2c_1^2 + bc_2a_3^2 + cb_3a_2^2 + ca_3b_1^2) \\
- 60\,m\,(ab_1b_3c_1c_2 + bc_1c_2a_2a_3 + ca_2a_3b_1b_3) \\
+ 12\,m\,(aa_2b_3c_2^2 + aa_3c_2b_3^2 + bb_3c_1a_3^2 + bb_1a_3c_1^2 + cc_1a_2b_1^2 + cc_2b_1a_2^2) \\
+ 6\,(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1)\,(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\
+ 24\,(ab_1b_3^2c_1^2 + ac_1c_2^2b_1^2 + bc_2c_1^2a_2^2 + ba_2a_3^2c_2^2 + ca_3a_2^2b_3^2 + cb_3b_1^2a_3^2) \\
- 12\,(aa_2b_1c_2^3 + aa_3c_1b_3^3 + bb_3c_2a_3^3 + bb_1a_2c_1^3 + cc_1a_3b_1^3 + cc_2b_3a_2^3) \\
- 8\,m^6 + 24\,m^4\,(b_1c_1 + c_2a_2 + a_3b_3) - 36\,m^3\,(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\
- 12\,m^2\,(b_1c_1c_2a_2 + c_2a_2a_3b_3 + a_3b_3b_1c_1) \\
- 24\,m^2\,(b_1^2c_1^2 + c_2^2a_2^2 + a_3^2b_3^2) \\
+ 36\,m\,(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2)\,(b_1c_1 + c_2a_2 + a_3b_3) - 6\,b_1c_1c_2a_2a_3b_3 \\
+ 8\,(b_1^3c_1^3 + c_2^3a_2^3 + a_3^3b_3^3) - 27\,(a_2^2b_3^2c_1^2 + a_3^2b_1^2c_2^2) \\
- 12\,(b_1^2c_1^2c_2a_2 + b_1^2c_1^2a_3b_3 + c_2^2a_2^2a_3b_3 + c_2^2a_2^2b_1c_1 + a_3^2b_3^2b_1c_1 + a_3^2b_3^2c_2a_2).
\end{gathered}$$

Für die kanonische Form reduciert sich diese Invariante auf

$$(1 - 20\,m^3 - 8\,m^6);$$

ihre symbolische Form ist

$$(123)\;(124)\;(235)\;(316)\;(456)^2.$$

Wir können aus ihr eine Evectante

$$\xi_1^3 \frac{dT}{da} + \xi_2^3 \frac{dT}{db} + \cdots = 0$$

bilden, deren Coefficienten in entwickelter Form zu geben unnöthig ist. Für die kanonische Form wird diese Contravariante, die wir Q nennen wollen

$$(1 - 10m^3)(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) - (30m^2 + 24m^5)\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3 = 0.$$

Jede andere Invariante der cubischen Form kann als eine rationale Function von S und T ausgedrückt werden. Man kann diess in derselben Art beweisen, wie der entsprechende Satz für die binäre biquadratische Form bewiesen worden ist [43]); wie denn überhaupt zwischen den Theorien der binären biquadratischen und der ternären cubischen Formen viele Analogien bestehen.

223. Die Methode zur Bildung der Gleichung der Reciproken einer Curve dritter Ordnung ist im Art. 91. erläutert worden. Wir geben hier das Resultat ihrer Anwendung auf die allgemeine Gleichung, jedoch nur die entwickelte Form derjenigen Glieder, welche von einander wesentlich verschiedenen sind und aus denen die fehlenden durch symmetrische Buchstabenvertauschung abgeleitet werden können.

$$\xi_1^6 \{b^2c^2 - 6bcb_3c_2 + 4bc_2^3 + 4cb_3^3 - 3b_3^2c_2^2\} + \cdot\cdot$$
$$+ 6\,\xi_1^5\xi_2 \{-bc^2b_1 + 2bcmc_2 + bcb_3c_1 - 4mcb_3^2 + 3cc_2b_3b_1 - 2bc_1c_2^2$$
$$+ 2mb_3c_2^2 + b_3^2c_1c_2 - 2b_1c_2^3\} + \cdot\cdot + 3\,\xi_1^4\xi_2^2 \{2bc^2a_2 - 4mbcc_1$$
$$+ 3c^2b_1^2 - 2bcc_2a_3 + 16m^2cb_3 - 12mcb_1c_2 + 4bc_1^2c_2 + 4ca_3b_3^2$$
$$- 6ca_2b_3c_2 - 6cb_1b_3c_1 - 4m^2c_2^2 - 8mb_3c_1c_2 - b_3^2c_1^2 - 2a_3b_3c_2^2$$
$$+ 4a_2c_2^3 + 12b_1c_1c_2^2\} + \cdot\cdot$$
$$+ 6\,\xi_1^4\xi_2\xi_3 \{bc(-4m^2 + 5b_1c_1 - 2a_3b_3 - 2c_2a_2)$$
$$+ b(2mc_1c_2 + 4a_3c_2^2 - 3b_3c_1^2) + c(2mb_1b_3 + 4a_2b_3^2 - 3c_2b_1^2)$$
$$- 8m^2b_3c_2 + 10m(b_3^2c_1 + c_2^2b_1) - 2a_3c_2b_3^2 - 2a_2b_3c_2^2 - 11b_1b_3c_1c_2\}$$
$$+ \cdot\cdot + 2\,\xi_1^3\xi_2^3 \{-abc^2 - 9c^2a_2b_1 + 3bcc_1a_3 + 3acb_3c_2 - 2ac_2^3 - 2bc_1^3$$
$$- 16cm^3 + cm(18b_1c_1 + 18c_2a_2 - 24a_3b_3) + 9c(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2)$$
$$+ 12m^2c_1c_2 + 6m(a_3c_2^2 + b_3c_1^2) + 6a_3b_3c_1c_2 - 18b_1c_1^2c_2 - 18a_2c_1c_2^2\}$$
$$+ \cdot\cdot + 6\,\xi_1^3\xi_2^2\xi_3 \{abcc_2 + 6bcma_3 - 4bca_2c_1 - 2acb_3^2 + ab_3c_2^2$$
$$+ 2mbc_1^2 - 5bc_1c_2a_3 + 4cm^2b_1 - 10cma_2b_3 + 2cb_1a_3b_3 - 6cb_1^2c_1$$

$$+ 9ca_2c_2b_1 + 8m^3c_2 - 16m^2b_3c_1 + 12ma_3b_3c_2 - 8ma_2c_2^2 - 2mb_1c_1c_2$$
$$- 4a_3b_3^2c_1 + 10b_1b_3c_1^2 + 13a_2b_3c_1c_2 - 11a_3b_1c_2^2\} + \cdots\cdots$$
$$+ 6\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2\{-4abcm + (bca_2a_3 + cab_1b_3 + abc_1c_2)$$
$$- 8m(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1)$$
$$+ 5(ab_1c_2^2 + ac_1b_3^2 + bc_2a_3^2 + ba_2c_1^2 + cb_3a_2^2 + ca_3b_1^2)$$
$$- 8m^4 + 4m^2(b_1c_1 + c_2a_2 + a_3b_3) + 18m(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2)$$
$$+ 4(b_1^2c_1^2 + c_2^2a_2^2 + a_3^2b_3^2)$$
$$- 19(b_1c_1c_2a_2 + c_2a_2a_3b_3 + a_3b_3b_1c_1)\} = 0.$$

Diese Contravariante ist die zweite Evectante von T, d. h. die Gleichung der Reciprokalcurve kann in der Form geschrieben werden:

$$\left(\xi_1^3\frac{d}{da} + \xi_2^3\frac{d}{db} + \xi_3^3\frac{d}{dc} + \xi_1^2\xi_2\frac{d}{da_2} + \xi_1^2\xi_3\frac{d}{da_3} + \xi_2^2\xi_3\frac{d}{db_3}\right.$$
$$\left. + \xi_2^2\xi_1\frac{d}{db_1} + \xi_3^2\xi_1\frac{d}{dc_1} + \xi_3^2\xi_2\frac{d}{dc_2} + \xi_1\xi_2\xi_3\frac{d}{dm}\right)^2 T = 0.$$

In Art. 91. ward schon die Gleichung für die kanonische Form gegeben

$$\xi_1^6 + \xi_2^6 + \xi_3^6 - (2 + 32m^3)(\xi_2^3\xi_3^3 + \xi_3^3\xi_1^3 + \xi_1^3\xi_2^3)$$
$$- 24m^2\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) - (24m + 48m^4)\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 = 0.$$

224. Die Invarianten der cubischen Form können auch mit Hilfe der Differentialgleichungen berechnet werden, welchen Invarianten genügen müssen. (Vergl. „Vorlesungen" Art. 102.) Es ist dazu zweckmässig, die Gleichung nach einer der Variabeln zu ordnen und sie also etwa zu schreiben

$$rx_3^3 + 3(a_0x_1 + a_1x_2)x_3^2 + 3(b_0x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + b_2x_2^2)x_3$$
$$+ (c_0x_1^3 + 3c_1x_1^2x_2 + 3c_2x_1x_2^2 + c_3x_2^3) = 0.$$

Wenn wir dann eine Invariante bilden wollen, deren Ordnung und Gewicht vorgeschrieben sind, so können wir ihren litteralen Theil ohne Rechnung schreiben; so muss z. B. S von der Form

$$r(c^2b) + (c^2a^2) + (cb^2a) + (b^4)$$

sein, wenn wir durch (c^2b) eine Function bezeichnen, die vom zweiten Grade in den Coefficienten c und vom ersten Grade in den Coefficienten b ist; wir wissen auch, dass sie eine Invariante dieser Ordnung von

$$b_0x_1^2 + \cdots \quad \text{und} \quad c_0x_1^3 + \cdots$$

oder von einer binären quadratischen und cubischen Form sein muss. Die Theorie der binären Formen erlaubt uns also die Form dieses Gliedes zu bestimmen und das Gleiche gilt für die übrigen Glieder. Die Invariante muss aber auch der Differentialgleichung

$$r\frac{d}{da_0} + \left(2a_0\frac{d}{db_0} + a_1\frac{d}{db_1}\right) + \left(3b_0\frac{d}{dc_0} + 2b_1\frac{d}{dc_1} + b_2\frac{d}{dc_2}\right) = 0$$

genügen, die ihre Coefficienten bestimmt. So findet man also

$$S = -r\,(c^2b) + (c^2a^2) + (cb^2a) - (b^2)^2$$

mit folgenden Werthen:

$$\begin{aligned}
(c^2b) &= (c_0c_2 - c_1^2)\,b_2 - (c_0c_3 - c_1c_2)\,b_1 + (c_1c_3 - c_2^2)\,b_0;\\
(c^2a^2) &= (c_0c_2 - c_1^2)\,a_1^2 - (c_0c_3 - c_1c_2)\,a_1a_0 + (c_1c_3 - c_2^2)\,a_0^2,\\
(cb^2a) &= a_0c_0b_2^2 - (c_0a_1 + 3c_1a_0)\,b_2b_1 + (a_0c_2 + a_1c_1)\,(2b_1^2 + b_0b_2)\\
&\quad - (a_0c_3 + 3a_1c_2)\,b_0b_1 + a_1c_3b_0^2;\ (b^2) = b_0b_2 - b_1^2.
\end{aligned}$$

In analoger Art findet man

$$\begin{aligned}
T = r^2\,(c^4) - 6\,r\,(c^3ba) + 4\,(c^3a^3) + 4r\,(c^2b^3) - 3\,(c^2b^2a^2)\\
- 12\,(b^2)\,(cb^2a) + 8\,(b^2)^3
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
(c^4) &= c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3 + 4c_3c_1^3 - 3c_1^2c_2^2 - 6c_0c_1c_2c_3,\\
(c^3ba) &= a_0b_0\,(c_0c_3^2 + 2c_2^3 - 3c_1c_2c_3)\\
&\quad + (a_1b_0 + 2a_0b_1)\,(2c_3c_1^2 - c_1c_2^2 - c_0c_2c_3)\\
&\quad + (a_0b_2 + 2a_1b_1)\,(2c_0c_2^2 - c_2c_1^2 - c_0c_1c_3)\\
&\quad + a_1b_2(c_3c_0^2 + 2c_1^3 - 3c_0c_1c_2),\ (c^3a^3) = a_0^3(c_0c_3^2 + 2c_2^3 - 3c_1c_2c_3)\\
&\quad + 3a_0^2a_1(2c_3c_1^2 - c_1c_2^2 - c_0c_2c_3) + 3a_0a_1^2(2c_0c_2^2 - c_2c_1^2 - c_0c_1c_3)\\
&\quad + a_1^3\,(c_3c_0^2 + 2c_1^3 - 3c_0c_1c_2),\quad (c^2b^3) - 3\,(b^2)\,(c^2b) = c_0^2b_2^3\\
&\quad - 6c_0c_1b_1b_2^2 + 6c_0c_2b_2\,(2b_1^2 - b_0b_2) + c_0c_3\,(6b_0b_1b_2 - 8b_1^3)\\
&\quad + 9c_1^2b_0b_2^2 - 18c_1c_2b_0b_1b_2 + 6c_1c_3b_0\,(2b_1^2 - b_0b_2) + 9c_2^2b_0^2b_2\\
&\quad - 6c_2c_3b_1b_0^2 + c_3^2b_0^3,\ (c^2b^2a^2) = c_0^2b_2^2a_1^2 - 2c_0c_1(b_2^2a_1a_0 + 2b_1b_2a_1^2)\\
&\quad - 2c_0c_2\,(b_0b_2a_1^2 + 2b_1^2a_1^2 - 10b_1b_2a_0a_1 + 4b_2^2a_0^2)\\
&\quad + 2c_0c_3\,(4b_0b_1a_1^2 + 4b_1b_2a_0^2 - 6b_1^2a_0a_1 - 3b_0b_2a_0a_1)\\
&\quad + c_1^2\,(8b_1^2a_1^2 + 9b_2^2a_0^2 - 12b_1b_2a_0a_1 + 4b_0b_2a_1^2)\\
&\quad + 2c_1c_2\,(b_0b_2a_0a_1 + 2b_1^2a_0a_1 - 6b_1b_2a_0^2 - 6b_0b_1a_1^2)\\
&\quad - 2c_1c_3\,(b_0b_2a_0^2 + 2b_1^2a_0^2 - 10b_0b_1a_0a_1 + 4b_0^2a_1^2)\\
&\quad + c_2^2\,(8b_1^2a_0^2 + 9b_0^2a_1^2 - 12b_1b_0a_0a_1 + 4b_0b_2a_0^2)\\
&\quad - 2c_2c_3\,(b_0^2a_0a_1 + 2b_0b_1a_0^2) + c_3^2b_0^2a_0^2;
\end{aligned}$$

wo das Letztere geschrieben werden kann

$$(c^2b^2a^2) = (cba)^2 + 4\,(c^2a^2)\,(b^2) - 8\,(c^2b)\,(a^2b)$$

mit

$$(cba) = c_3a_0b_0 - c_2\,(a_1b_0 + 2a_0b_1) + c_1\,(a_0b_2 + 2a_1b_1) - c_0\,a_1\,b_2,$$
$$(a^2b) = b_2a_0{}^2 - 2\,b_1a_0a_1 + b_0a_1{}^2.$$

225. Wenn die Curve einen Doppelpunkt enthält, so kann man denselben zum Anfangspunkt der Coordinaten wählen und erhält damit

$$m = a_0 = a_1 = 0,$$

so dass sich die Invariante S auf $-(b^2)^2$ und die Invariante T auf $8\,(b^2)^3$ reduciert; in der Bezeichnung des Art. 218. giebt diess die analoge Reduction für S auf $-(a_3b_3 - m^2)^2$ und für T auf $8\,(a_3b_3 - m^2)^3$, so dass für beiderlei Ausdrucksformen sich ergiebt, dass die Existenz eines Doppelpunktes $T^2 + 64S^3$ verschwinden macht. Diese Function ist somit die Discriminante der cubischen Form, wie sich später noch in anderen Arten ergeben wird. Wenn die Curve eine Spitze hat, so verschwindet (b^2) und daher sowohl S als T. Daher gehen durch sieben Punkte (Art. 163.) viermal sechs Curven dritter Ordnung mit Spitze. Für die kanonische Form wird die Discriminante

$$T^2 + 64\,S^3 = (1 + 8m^3)^3.$$

226. In den folgenden Artikeln setzen wir die kanonische Form voraus. Aus Art. 219. sehen wir, dass die Gleichung der Hesse'schen Curve von

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + 6\,m\,x_1x_2x_3 = 0$$

dieselbe Form hat und nur durch den Werth von m davon unterschieden wird, und dass somit das System der drei Fundamentallinien

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

durch die Schnittpunkte der Curve dritter Ordnung mit ihrer Hesse'schen Curve hindurchgeht, wie diess auch in anderer Weise in Art. 219. gezeigt wurde. Es ergiebt sich auch, dass die Gleichung der Hesse'schen Curve für die Hesse'sche Curve abermals von der nämlichen Form ist, dass also, wie ebenfalls schon im Art. 174. bewiesen worden ist, die In-

flexionspunkte einer Curve dritter Ordnung auch die Inflexionspunkte ihrer Hesse'schen Curve sind.

Jede Gleichung von der Form

$$\alpha (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \beta x_1 x_2 x_3 = 0$$

kann auf die Form

$$\lambda U + \mu H = 0$$

reduciert werden. Denn es ist

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6 m x_1 x_2 x_3 = U,$$
$$- m^2 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (1 + 2m^3) x_1 x_2 x_3 = H;$$

also auch

$$(1 + 8m^3)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = (1 + 2m^3) U - 6m H,$$
$$(1 + 8m^3) x_1 x_2 x_3 = m^2 U + H$$

und somit

$$(1 + 8m^3) \lambda = \alpha (1 + 2m^3) + \beta m^2,$$
$$(1 + 8m^3) \mu = - 6m\alpha + \beta.$$

Bilden wir aber die Gleichung der Hesse'schen Curve von

$$\lambda U + 6\mu H = 0,$$

d. h. von

$$(\lambda - 6\mu m^2)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\{\lambda m + \mu(1 + 2m^3)\} x_1 x_2 x_3 = 0,$$

so erhalten wir

$$- (\lambda - 6\mu m^2) \{\lambda m + \mu (1 + 2m^3)\}^2 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$
$$+ [(\lambda - 6\mu m^2)^3 + 2 \{\lambda m + \mu (1 + 2m^3)\}^3] x_1 x_2 x_3 = 0,$$

welches nach dem eben Bewiesenen von der Form

$$\lambda' U + \mu' H = 0$$

ist mit

$$(1 + 8m^3) \lambda' = - (1 + 2m^3)(\lambda - 6\mu m^2) \{\lambda m + \mu (1 + 2m^3)\}^2$$
$$+ m^2 [(\lambda - 6\mu m^2)^3 + 2 \{\lambda m + \mu (1 + 2m^3)\}^3],$$
$$(1 + 8m^3) \mu' = 6m (\lambda - 6\mu m^2) \{\lambda m + \mu (1 + 2m^3)\}^2$$
$$+ [(\lambda - 6\mu m^2)^3 + 2 \{\lambda m + \mu (1 + 2m^3)\}^3].$$

Mit den Werthen der Invarianten

$$S = m(1 - m^3), \quad T = 1 - 20m^3 - 8m^6$$

ergiebt sich, dass man hat

$$\lambda' = - 2S\lambda^2\mu - T\lambda\mu^2 + 8S^2\mu^3,$$
$$\mu' = \lambda^3 + 12S\lambda\mu^2 + 2T\mu^3$$

und da hiermit die λ', μ' in Function der Invarianten ausgedrückt sind, so gelten diese Relationen für alle durch Transformation entstehenden Formen der Gleichung der Curve, etc., und es ist somit die Hesse'sche Curve von

$$\lambda U + 6\mu H = 0$$

für U und H als die allgemeinen Werthe der Art. 218., 219. durch die Gleichung

$$\lambda' U + \mu' H = 0$$

dargestellt, wo λ' und μ' die eben gegebenen Werthe haben [44]).

Das Verhältniss $\lambda : \mu$ bestimmt sich aus dem Verhältniss $\lambda' : \mu'$, falls dasselbe gegeben ist, durch die Auflösung einer cubischen Gleichung, d. h. es giebt drei Curven dritter Ordnung, für welche eine gegebene Curve dritter Ordnung Hesse'sche Curve ist — wie schon im Art. 182. bemerkt wurde.

Weil sich als ein Specialfall des Vorigen die Gleichung der Hesse'schen Curve von der Hesse'schen Curve einer Curve dritter Ordnung

$$H(HU) \equiv 8S^2 U + 2TH = 0$$

ergiebt, so folgt, dass $T = 0$ die Bedingung ausdrückt, unter welcher die zweite Hesse'sche Curve mit der Originalcurve selbst zusammenfällt. Für $S = 0$, d. h. nach Art. 221. wenn die Gleichung auf die Summe von drei Cuben reducierbar ist, fällt die Hesse'sche Curve der Hesse'schen Curve mit dieser selbst zusammen und die Letztere besteht somit aus drei geraden Linien, wie wir sogleich zeigen werden.

227. Die Hesse'sche Curve schneidet die Originalcurve immer in den Inflexionspunkten, d. h. überall dort, wo drei aufeinanderfolgende Punkte derselben in einer geraden Linie liegen. Wenn die Curve keine eigentliche Curve ihrer Ordnung ist und eine gerade Linie als Theil enthält, so ist jeder Punkt der Letztern auch ein Punkt der Hesse'schen Curve; wenn insbesondere eine Curve dritter Ordnung aus drei geraden Linien besteht, so bilden diese Linien auch ihre Hesse'sche Curve. Man bestätigt diess, indem man die Hesse'sche Determinante von

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

bildet. In Folge dessen kann man das System von Bedingungen, unter welchem die allgemeine Gleichung dritten Grades drei Gerade darstellt, sofort aufstellen, indem man ausdrückt, dass die Coefficienten in der Gleichung der Hesse'schen Curve (Art. 219.) den entsprechenden Coefficienten der Originalgleichung proportional sind; also

$$\frac{\mathfrak{a}}{a} = \frac{\mathfrak{b}}{b} = \frac{\mathfrak{c}}{c} = \frac{\mathfrak{a}_2}{a_2} = \frac{\mathfrak{a}_3}{a_3} = \frac{\mathfrak{b}_1}{b_1} = \frac{\mathfrak{b}_3}{b_3} = \frac{\mathfrak{c}_1}{c_1} = \frac{\mathfrak{c}_2}{c_2} = \frac{\mathfrak{m}}{m},$$

fünf und vierzig Gleichungen, die mit neun Gleichungen äquivalent scheinen und doch in Wirklichkeit nur drei unabhängige Gleichungen vertreten. Denn nach Art. 91. der „Kegelschnitte" genügen drei Bedingungen, damit eine Gleichung dritten Grades mit neun unabhängigen Constanten ein System von drei geraden Linien mit nur sechs unabhängigen Constanten repräsentiert. Mittelst der im Art. 219. gegebenen Werthe von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ kann man leicht bestätigen, dass diese fünf und vierzig Gleichungen auf drei unabhängige Gleichungen sich reducieren lassen.

228. Da die Hesse'sche Curve von

$$\lambda U + 6\mu H = 0$$

durch

$$\lambda' U + \mu' H = 0$$

dargestellt wird, so repräsentiert die erstere Gleichung drei gerade Linien, wenn

$$6\mu : \lambda = \mu' : \lambda'$$

ist, d. h. nach Art. 226., wenn die Gleichung

$$\lambda^4 + 24 S\lambda^2\mu^2 + 8T\lambda\mu^3 - 48S^2\mu^4 = 0$$

erfüllt wird. Damit ist bewiesen, was gleichfalls früher schon ausgesprochen wurde, dass durch die Schnittpunkte der Curven $U = 0$ und $H = 0$ vier Systeme von drei geraden Linien gezogen werden können. Wenn man diese biquadratische Gleichung nach dem gewöhnlichen Verfahren auflöst [45]), so erhält man

$$\frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3},$$

wo t_1, t_2, t_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$t^3 + 12St^2 + 48S^2t - T^2 = 0$$

oder

$$(t + 4S)^3 = T^2 + 64S^3$$

sind. Damit lässt sich die Reduction auf die kanonische Form durchführen. Ist die Gleichung einer Curve dritter Ordnung gegeben, so bilden wir nach Art. 219. die Gleichung ihrer Hesse'schen Curve und berechnen nach Art. 221., 222. die Werthe ihrer Invarianten S und T. Dann lehrt uns das Vorige eine Gleichung

$$\lambda U + 6\mu H = 0$$

bilden, welche in drei lineare Factoren zerlegbar ist. Durch Auflösung einer cubischen Gleichung bestimmen wir diese Factoren X_1, X_2, X_3 und erhalten endlich durch Vergleichung der gegebenen Gleichung mit

$$a X_1^3 + b X_2^3 + c X_3^3 + 6 m X_1 X_2 X_3 = 0$$

zur Berechnung von a, b, c, m die hinreichende Anzahl von linearen Gleichungen. Das ist die Reduction der Gleichung einer Curve dritter Ordnung ohne singulären Punkt auf die kanonische Form.

229. Von den vier Tangenten, welche von einem Punkte der Curve dritter Ordnung an dieselbe gezogen werden können, fallen nur dann zwei zusammen, wenn die Curve einen Doppelpunkt hat, weil eine Curve dritter Ordnung Doppeltangenten nicht haben kann. Die Gleichung der vier Tangenten ist aber nach Art. 78.

$$\triangle^2 = 4\triangle' U$$

und für

$$U = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6 m x_1 x_2 x_3$$

sind

$$\begin{aligned}\triangle &= 3 \left\{x_1' (x_1^2 + 2 m x_2 x_3) + x_2' (x_2^2 + 2 m x_3 x_1) \right.\\ &\qquad \left. + x_3' (x_3^2 + 2 m x_1 x_2)\right\},\\ \triangle' &= 3 \left\{x_1 (x_1'^2 + 2 m x_2' x_3') + x_2 (x_2'^2 + 2 m x_3' x_1') \right.\\ &\qquad \left. + x_3 (x_3'^2 + 2 m x_1' x_2')\right\}.\end{aligned}$$

Indem wir in $\triangle^2 = 4\triangle' U$ die Variable x_3 gleich Null setzen, erhalten wir eine biquadratische Gleichung, welche die vier Schnittpunkte der Tangenten in der Fundamentallinie $x_3 = 0$ darstellt, und zwar

$$\begin{aligned}&3 (x_1' x_1^2 + x_2' x_2^2 + 2 m x_3' x_1 x_2)^2\\ &= 4 (x_1^3 + x_2^3) \left\{x_1 (x_1'^2 + 2 m x_2' x_3') + x_2 (x_2'^2 + 2 m x_3' x_1')\right\}\end{aligned}$$

oder

$$(x_1'^2 + 8m x_2' x_3') x_1^4 + 4(x_2'^2 - m x_3' x_1') x_1^3 x_2$$
$$- 6(x_1' x_2' + 2m^2 x_3'^2) x_1^2 x_2^2 + 4(x_1'^2 - m x_2' x_3') x_1 x_2^3$$
$$+ (x_2'^2 + 8m x_3' x_1') x_2^4 = 0.$$

Aus dem Gesagten erhellt, dass die Discriminante dieser biquadratischen Form die Discriminante der cubischen Gleichung als einen Factor enthalten muss. In Erinnerung daran, dass

$$x_1'^3 + x_2'^3 + x_3'^3 + 6m x_1' x_2' x_3' = 0$$

ist, finden wir die Invarianten s und t der biquadratischen Gleichung

$$s = 12(m^4 - m) x_3'^4 = -12 x_3'^4 S,$$
$$t = -(1 - 20m^3 - 8m^6) x_3'^6 = -x_3'^6 T.$$

Die Discriminante $27t^2 - s^3$ der biquadratischen Gleichung ist also

$$27 x_3'^2 (T^2 + 64 S^3)$$

und in der That ist die Discriminante der cubischen Gleichung

$$T^2 + 64 S^3.$$

230. Das Doppelverhältniss der vier durch die biquadratische Gleichung des letzten Artikels bestimmten Punkte stimmt mit dem Doppelverhältniss des Büschels der vier Tangenten überein. Bezeichnen wir aber durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die vier Wurzeln dieser Gleichung, so ist bis auf das Vorzeichen („Kegelschnitte“ Art. 338.) das Doppelverhältniss der durch sie bestimmten Elemente eines der Verhältnisse der Grössen

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta), \quad (\alpha - \gamma)(\beta - \delta), \quad (\alpha - \delta)(\beta - \gamma).$$

Wir können aber nach der Methode der symmetrischen Functionen die Gleichung bilden, welche diese Grössen bestimmt, und erhalten dieselbe für

$$a_0, \; 4a_1, \; 6a_2, \; 4a_3 \text{ und } a_4$$

als die Coefficienten der biquadratischen Gleichung in der Form

$$a_0^3 y^3 - 12 a_0 s y + 16 \sqrt{(s^3 - 27t^2)} = 0.$$

Da die gegenseitigen Verhältnisse der Wurzeln sich nicht

ändern, wenn wir sie mit einem Factor multiplicieren, so können wir setzen

$$a_0 y = 2 z s^{\frac{1}{2}}$$

und erkennen, dass die Doppelverhältnisse die gegenseitigen Verhältnisse der Wurzeln der Gleichung

$$z^3 - 3z + 2\sqrt{\left(1 - \frac{27t^2}{s^3}\right)} = 0$$

oder

$$z^3 - 3z + 2\sqrt{\left(1 + \frac{T^2}{64S^3}\right)} = 0$$

sind. Dieselben hängen somit nur von dem Verhältniss $T^2 : S^3$ ab und sind unabhängig von der Lage des Punktes in der Curve, von welchem aus die Tangenten gezogen sind. (Art. 168.) Für $T = 0$ wird die eben gefundene Gleichung

$$z^3 - 3z + 2 = 0,$$

und hat somit zwei gleiche Wurzeln, so dass eines der Verhältnisse derselben gleich der Einheit und das bezügliche Doppelverhältniss gleich -1 oder ein harmonisches Verhältniss wird.

Beispiel. Die durch die Ecken, die Gegenseitenschnittpunkte und Diagonalpunkte eines Vierecks gehenden Curven dritter Ordnung werden für das Dreieck der Gegenseitenschnittpunkte als Fundamentaldreieck und eine der Ecken als Einheitpunkt der projectivischen Coordinaten durch die Gleichung

$$a_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + a_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2) + a_3 x_3 (x_1^2 - x_2^2) = 0$$

dargestellt. Man hat für sie

$$S = -(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - a_1^2 a_2^2 - a_2^2 a_3^2 - a_3^2 a_1^2),$$

$$T = -\frac{15}{2}(2a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)(2a_2^2 - a_3^2 - a_1^2)(2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2)$$

und somit für ω als eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit

$$S = -(a_1^2 + \omega a_2^2 + \omega^2 a_3^2)(a_1^2 + \omega^2 a_2^2 + \omega a_3^2),$$

$$T = -\frac{15}{2}\left\{(a_1^2 + \omega a_2^2 + \omega^2 a_3^2)^3 + (a_1^2 + \omega^2 a_2^2 + \omega a_3^2)^3\right\}$$

und bildet daraus die Discriminante

$$R = \left\{3\omega(1-\omega)(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)(a_3^2 - a_1^2)\right\}^2,$$

so dass die Curve einen Doppelpunkt hat, wenn zwei, und eine Spitze, wenn alle drei Coefficienten gleich gross sind; und dass sie harmonisch ist, wenn die halbe Summe der Quadrate von zweien gleich dem Quadrat des dritten ist.

231. Mit Hilfe der kanonischen Form können wie in Art. 226. die Invarianten S und T von

$$\lambda U + 6\mu H = 0$$

oder von

$$(\lambda - 6\mu m^2)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\{m\lambda + \mu(1 + 2m^3)\} x_1 x_2 x_3 = 0$$

gebildet werden und wir finden ohne Schwierigkeit

$$S(\lambda U + 6\mu H) = S\lambda^4 + T\lambda^3\mu - 24 S^2\lambda^2\mu^2 - 4ST\lambda\mu^3 \\ - (T^2 + 48 S^3)\mu^4$$

und

$$T(\lambda U + 6\mu H) = T\lambda^6 - 96 S^2\lambda^5\mu - 60 ST\lambda^4\mu^2 \\ - 20 T^2\lambda^3\mu^3 + 240 S^2 T\lambda^2\mu^4 \\ - 48(ST^2 + 96 S^4)\lambda\mu^5 - 8(72 S^3 T + T^3)\mu^6.$$

Es giebt also in dem Büschel der durch die Gruppe der Inflexionspunkte gehenden Curven dritter Ordnung vier, deren Hesse'sche Curve aus drei Geraden besteht, und sechs harmonische Curven dritter Ordnung, wenn wir so die Curven von der Charakteristik -1 bezeichnen. Diese bilden drei Paare so, dass in jedem derselben die eine Curve die Hesse'sche der andern ist. Wenn wir mit Hilfe der erhaltenen Werthe von S und T die Discriminante R oder $T^2 + 64 S^3$ bilden, so erhalten wir

$$R(\lambda U + 6\mu H) = R(\lambda^4 + 24 S\lambda^2\mu^2 + 8 T\lambda\mu^3 - 48 S^2\mu^4)^3;$$

der die ursprüngliche Discriminante multiplicierende Factor ist der Cubus der in λ, μ biquadratischen Function des Art. 228., wie zu erwarten und vorauszusehen war, weil so lange nicht die Originalcurve dritter Ordnung einen Doppelpunkt hat, die einzigen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten in dem durch die Inflexionspunkte gehenden Büschel die vier Systeme der sie verbindenden Geraden sind.

Die soeben für die Invarianten S und T von $\lambda U + 6\mu H$ gegebenen Werthe sind Covarianten dieser biquadratischen Form in λ, μ, nur durch die Factoren 4 und 2 respective von der Hesse'schen Covariante und von der Covariante J des Art. 141. der „Vorlesungen" abweichend; und die Coefficienten von U und H im Werthe von $H(\lambda U + 6\mu H)$ (Art. 226.) differieren nur durch numerische Factoren von den Differentialen derselben biquadratischen Form nach λ und nach μ respective.

Alle covarianten Curven dritter Ordnung können in der Form

$$\lambda U + \mu H = 0$$

dargestellt werden, wie die folgenden Beispiele erläutern mögen.

Beispiel 1. Wenn $U_{11}, U_{22}, \ldots$ die zweiten Differentiale und $\mathbf{U}_{11}, \mathbf{U}_{22}, \ldots$ die Minoren $U_{22}U_{33} - U_{23}^2$, etc. ihrer Determinante bezeichnen, wie in Art. 185. und wenn wir durch $H_{11}, \ldots, \mathbf{H}_{11}, \ldots$, die entsprechenden Grössen für die Hesse'sche Covariante ausdrücken, so ist

$$\mathbf{U}_{11}H_{11} + \mathbf{U}_{22}H_{22} + \mathbf{U}_{33}H_{33} + 2\mathbf{U}_{23}H_{23} + 2\mathbf{U}_{31}H_{31} + 2\mathbf{U}_{12}H_{12} = 0$$

eine covariante cubische Form. Wir haben die Werthe

$$U_{ii} = x_i, \quad U_{ik} = mx_j; \quad \mathbf{U}_{ii} = x_jx_k - m^2x_i^2, \quad \mathbf{U}_{ik} = m^2x_ix_k - mx_j^2;$$

$$H_{ii} = -6m^2x_i, \quad H_{ik} = (1 + 2m^3)\,x_j;$$

$$\mathbf{H}_{ii} = 36m^4x_jx_k - (1+2m^3)x_i^2, \quad \mathbf{H}_{ik} = (1+2m^3)^2x_ix_k + 6m^2(1+2m^3)x_j^2,$$

und erhalten die fragliche Covariante $= -2SU$. In der That konnte vorausgesehen werden, dass sie von SU nur durch einen numerischen Factor verschieden sei; denn sie ist eine Covariante vom fünften Grade in den Coefficienten und es muss also, damit sie von der Form

$$aU + bH$$

sei, a vom vierten und b vom zweiten Grade in den Coefficienten sein; aber es giebt keine Invariante vom zweiten Grade und S ist die einzige Invariante vom vierten Grade.

Beispiel 2. Berechne in derselben Weise die Covariante

$$\mathbf{H}_{11}U_{11} + \mathbf{H}_{22}U_{22} + \mathbf{H}_{33}U_{33} + 2\mathbf{H}_{23}U_{23} + 2\mathbf{H}_{31}U_{31} + 2\mathbf{H}_{12}U_{12}.$$

Sie ist

$$= -TU + 12SH.$$

232. Der Grad jeder Covariante einer cubischen Form in den Variabeln ist ein Vielfaches von drei und allgemeiner, wenn der Grad einer ternären Form ein Vielfaches von drei ist, so gilt diess auch für alle ihre Covarianten. Diess ergiebt sich unmittelbar aus der im XI. Kap. der „Vorlesungen" entwickelten symbolischen Methode; denn jedes Symbol (123) vermindert den Grad der Function, an welcher man damit operiert, um drei und der Grad dieser Letztern ist bei Anwendung dieser Methode ein Vielfaches vom Grade der Originalfunction.

Man erkennt leicht, dass die Gleichung jeder cubischen Covariante von

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$$

von der Form

$$\alpha (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \beta x_1 x_2 x_3 = 0$$

ist, die wie wir sahen auf die Form

$$\lambda U + \mu H = 0$$

reducibel ist. Um aber Covarianten von höheren Graden ausdrücken zu können, ist es nöthig, eine dritte fundamentale Covariante zu bilden. Die, welche wir wählen wollen, kann in folgender Art definiert werden: Betrachten wir den Polarkegelschnitt eines Punktes

$$U_{11} x_1^2 + \cdots = 0$$

und den Polarkegelschnitt

$$H_{11} x_1^2 + \cdots = 0$$

desselben Punktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve, so giebt es einen zu diesen beiden Kegelschnitten covarianten Kegelschnitt von der Gleichung

$$(\mathbf{U}_{22}\mathbf{H}_{33} + \mathbf{H}_{22}\mathbf{U}_{33} - 2\mathbf{U}_{23}\mathbf{H}_{23})\, x_1^2 + \cdots = 0$$

(„Kegelschnitte" Art. 354.); und die Bedingung, unter welcher derselbe durch den Pol geht, ist eine Covariante der cubischen Form. Weil $\mathbf{U}_{22}$, $\mathbf{U}_{33}$, etc. die Variabeln im zweiten Grade enthalten, so ist diese Covariante vom sechsten Grade in den Veränderlichen und weil $\mathbf{U}_{22}, \mathbf{U}_{33}, \ldots$ vom zweiten und $\mathbf{H}_{22}, \mathbf{H}_{33}, \ldots$ vom sechsten Grade in den Coefficienten sind, so ist sie vom achten Grade in den Coefficienten. Der Werth dieser Covariante für die allgemeine Gleichung der Curve dritter Ordnung ist noch nicht ermittelt worden; wenn wir aber die für $\mathbf{U}_{11}, \mathbf{U}_{22}, \ldots$ im letzten Artikel gegebenen Werthe benutzen, so erhalten wir als ihren der kanonischen Form entsprechenden Werth 4Θ mit

$$\begin{aligned}\Theta \equiv 3m^3 (1 + 2m^3)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 \\ - m(1 - 20m^3 - 8m^6)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)\, x_1 x_2 x_3 \\ - 3m^2 (1 - 20m^3 - 8m^6)\, x_1^2 x_2^2 x_3^2 \\ - (1 + 8m^3)^2 (x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3)\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\equiv m^3 (2 + m^3)\, U^2 - m(1 + 2m^3)\, UH + 3m^2 H \\ - (1 + 8m^3)^2 (x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3).\end{aligned}$$

Es giebt noch zwei andere Covarianten, die von den

nämlichen Graden in Variabeln und Coefficienten sind, wie Θ, und welche gleichen Werth für die Wahl als fundamentale Covariante sechster Ordnung haben. Die erste von ihnen repräsentiert den Ort eines Punktes, dessen Polarlinie in Bezug auf die Hesse'sche Curve den Polarkegelschnitt desselben Punktes in Bezug auf die Originalcurve dritter Ordnung berührt; ihre Gleichung ist also für

$$H_1, \; H_2, \; H_3$$

als die Differentialquotienten der Hesse'schen Curve

$$\mathfrak{u}_{11} H_1^2 + \mathfrak{u}_{22} H_2^2 + \mathfrak{u}_{33} H_3^2 + 2\mathfrak{u}_{23} H_2 H_3 + 2\mathfrak{u}_{31} H_3 H_1 + 2\mathfrak{u}_{12} H_1 H_2 = 0.$$

Man kann diese Covariante mit Hilfe der Formel $\Theta S' - F$ im Art. 356. Beisp. 1. der „Kegelschnitte" als Function von Θ ausdrücken; denn man hat für Θ, S' und F respective zu setzen

$$-2SU, \; 6H, \; 4\Theta$$

und erhält so ihren Werth

$$= -4(\Theta + 3SUH).$$

Endlich ist eine dritte Covariante derselben Art der Ausdruck für den Ort eines Punktes, dessen Polare in Bezug auf die Curve dritter Ordnung seinen Polarkegelschnitt in Bezug auf die Hesse'sche Curve derselben berührt; von der Gleichung

$$\mathfrak{H}_{11} U_1^2 + \mathfrak{H}_{22} U_2^2 + \mathfrak{H}_{33} U_3^2 + 2\mathfrak{H}_{23} U_2 U_3 + 2\mathfrak{H}_{31} U_3 U_1 + 2\mathfrak{H}_{12} U_1 U_2 = 0,$$

welche nach der Formel $\Theta' S - F$ a. a. O. berechnet wird, indem man Θ', S, F durch

$$-TU + 12SH, \; U, \; 4\Theta$$

ersetzt, so dass sie also wird

$$-(TU^2 - 12SUH + 4\Theta).$$

233. Jede Covariante von

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6m x_1 x_2 x_3$$

ist offenbar eine symmetrische Function von x_1, x_2, x_3 und kann daher in Function von

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3, \; x_1 x_2 x_3, \; x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3$$

also auch in Function von U, H, Θ in Verbindung mit den Invarianten ausgedrückt werden. Allein nicht jede Covariante

ist eine rationale Function von U, H, Θ; in der That können wir wie in Art. 143. der „Vorlesungen“ eine Covariante bilden, von der das Quadrat, jedoch nicht sie selbst, eine rationale Function dieser Grössen ist. Sind die Coefficienten der cubischen Gleichung

$$\begin{gathered}\varrho^3 - (1 + 8m^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,\varrho^2 \\ + (1 + 8m^3)^2 (x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3)\,\varrho \\ - (1 + 8m^3)^3 x_1^3 x_2^3 x_3^3 = 0\end{gathered}$$

durch p, q, r respective bezeichnet, so ist nach der Theorie der cubischen Gleichungen für

$$\begin{gathered}J = (1 + 8m^3)^3 (x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3)(x_1^3 - x_2^3) \\ J^2 = p^2 q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4rp^3.\end{gathered}$$

Mittelst der Ausdrücke von p, q, r in Function von U, H, Θ finden wir durch Substitution

$$\begin{gathered}J^2 = 4\Theta^3 + TU^2\Theta^2 \\ + \Theta(-4S^3U^1 + 2STU^3H - 27S^2U^2H^2 - 18TUH^3 + 108SH^4) \\ - 16S^4U^5H - 11S^2TU^1H^2 - 4T^2U^3H^3 + 54STU^2H^1 \\ - 432S^2UH^5 - 27TH^6.\end{gathered}$$

Man kann diese Identität in der Form schreiben

$$4\Theta(\Theta + \lambda U^2)(\Theta + \mu U^2) = J^2 + H\Phi,$$

aus welcher man erkennt, dass das System

$$\Theta(\Theta + \lambda U^2)(\Theta + \mu U^2) = 0$$

von $H = 0$ berührt wird, so dass die Curve $H = 0$ jede der durch die drei Factoren dargestellten Curven berührt oder durch die je zweien von ihnen gemeinschaftlichen Punkte hindurchgeht. Da aber $\Theta = 0$, $U = 0$ und $H = 0$ keinen zu allen dreien gemeinsamen Punkt haben, so muss $\Theta = 0$ von $H = 0$ berührt werden. Das System $J = 0$, welches durch die Berührungspunkte geht, besteht aus den harmonischen Polaren der neun Inflexionspunkte.

Wir geben zur Erläuterung der Art, wie alle andern Covarianten in Function von U, H, Θ ausgedrückt werden können, zwei Beispiele.

Beispiel 1. Man soll die Gleichung der neun Inflexionstangenten bilden. Wir sahen im Art. 218., dass die Inflexionstangenten durch

$$U - (1 + 8m^3)\,x_1^3 = 0, \quad U - (1 + 8m^3)\,x_2^3 = 0, \\ U - (1 + 8m^3)\,x_3^3 = 0$$

dargestellt werden. Die Multiplication dieser drei Factoren giebt

$$U^3 - (1 + 8m^3)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)\,U^2$$
$$+ (1 + 8m^3)^2 (x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 + x_1^3x_2^3)\,U - (1 + 8m^3)^3 x_1^3x_2^3x_3^3 = 0$$

und wenn wir für

$$(1 + 8m^3)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3),\ (1 + 8m^3)^2 (x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 + x_1^3x_2^3)$$

und
$$(1 + 8m^3)\,x_1x_2x_3$$

die vorher angezogenen Werthe einsetzen, so finden wir als die verlangte Gleichung der neun Tangenten

$$5SU^2H - H^3 - U\Theta = 0;$$

wir ersehen aus derselben, dass die Curven $H = 0$ und $\Theta = 0$, von denen wir vorher bewiesen, dass sie sich berühren, die neun Inflexionstangenten zu ihren gemeinsamen Tangenten haben.

Beispiel 2. Man soll die Gleichung der Cayley'schen Curve in Punktcoordinaten entwickeln. Wir haben die Reciproke von

$$m(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) + (1 - 4m^3)\,\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$$

zu bilden, welche nach Art. 220. ihre Gleichung in Liniencoordinaten ist, und bilden dieselbe nach Art. 223.; die Grössen

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3, \text{ etc.}$$

können dann in Function von U, H, Θ ausgedrückt werden und man erhält das Resultat in der Form

$$4S\Theta - TH^2 - 16S^2UH = 0.$$

234. In analoger Art kann jede Contravariante der cubischen Form in Function von drei fundamentalen Contravarianten ausgedrückt werden und wir können als solche drei die drei früher entwickelten wählen, nämlich die Evectanten von S und T aus den Art. 220., 222., die wir P und Q nannten und durch welche jede contravariante cubische Form ausgedrückt werden kann; und die Reciproke F aus Art. 223.

Wir können wie in Art. 231. die Invarianten von

$$\lambda P + \mu Q = 0$$

bilden, d. h. in der kanonischen Form für

$$\{m\lambda + (1 - 10m^3)\mu\}(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3)$$
$$+ \{(1 - 4m^3)\lambda - 6m^2\mu(5 + 4m^3)\}\,\xi_1\xi_2\xi_3 = 0;$$

und wir finden

$$S(\lambda P + \mu Q) \equiv (192S^3 - T^2)\lambda^4 + 768S^2T\lambda^3\mu$$
$$+ 216(3ST^2 - 64S^4)\lambda^2\mu^2 + 216(T^3 - 64TS^3)\lambda\mu^3$$
$$- 1296(5S^2T^2 + 64S^5)\mu^4;$$
$$T(\lambda P + \mu Q) \equiv (T^3 + 576S^3T)\lambda^6 + 288(5S^2T^2 - 192S^5)\lambda^5\mu$$
$$+ 540(3ST^3 - 320S^4T)\lambda^4\mu^2 + 540(T^4 - 448T^3S^2)\lambda^3\mu^3$$

$$- 19440 (7 S^2 T^3 - 64 S^5 T) \lambda^2 \mu^4$$
$$- 11664 (3 S T^4 - 32 S^4 T^2 + 2048 S^7) \lambda \mu^5$$
$$- 5832 (T^5 + 40 S^3 T^3 + 2560 S^6 T) \mu^6;$$
$$R (\lambda P + \mu Q) = \{S \lambda^4 + T \lambda^3 \mu + 72 S^2 \lambda^2 \mu^2 + 108 S T \lambda \mu^3$$
$$+ 27 (T^2 - 16 S^3) \mu^4\}^3 R^2.$$

Wieder sind dabei, wie in Art. 231., die Functionen vom vierten und sechsten Grade in λ, μ, welche in den Werthen von S und T auftreten, die Covarianten der biquadratischen Form, deren Cubus in dem Werthe von

$$R (\lambda P + \mu Q)$$

erscheint. Ferner ist

$$H (\lambda P + \mu Q) = \{T \lambda^3 + 144 S^2 \lambda^2 \mu + 324 S T \lambda \mu^2$$
$$+ 108 (T^2 - 16 S^3) \mu^3\} P - \{4 S \lambda^3 + 3 T \lambda^2 \mu + 144 S^2 \lambda \mu^2$$
$$+ 108 S T \mu^3\} Q$$

und die Factoren von P und Q in diesem Ausdruck sind die Differentiale derselben biquadratischen Form nach μ und λ.

235. In derselben Art können wir die Contravarianten P und Q von $\lambda U + 6 \mu H$ bilden und finden

$$P (\lambda U + 6 \mu H) = \lambda^3 P + \lambda^2 \mu Q - 12 S P \lambda \mu^2$$
$$+ 4 (S Q - T P) \mu^3,$$
$$Q (\lambda U + 6 \mu H) = \lambda^5 Q - 60 S P \lambda^4 \mu - 30 T P \lambda^3 \mu^2$$
$$- 10 T Q \lambda^2 \mu^3 - 120 (2 S^2 Q - S T P) \lambda \mu^4$$
$$+ 24 \{S T Q - (T^2 + 24 S^3) P\} \mu^5.$$

Wenn wir nun die Werthe der Invarianten S und T von $\lambda U + 6 \mu H$ in Art. 231. durch s und t bezeichnen, so ergiebt sich, dass die vorigen Werthe nur durch die Factoren

$$3 (T^2 + 64 S^3) \quad \text{und} \quad (T^2 + 64 S^3)$$

respective von

$$(48 S^2 P + T Q) \frac{ds}{d\lambda} + (3 T P - 4 S Q) \frac{ds}{d\mu}$$

und

$$(48 S^2 P + T Q) \frac{dt}{d\lambda} + (3 T P - 4 S Q) \frac{dt}{d\mu}$$

verschieden sind.

Indem wir ferner ebenso die Contravarianten von P und Q von $\lambda P + \mu Q$ bilden, erhalten wir die Resultate

$$P(\lambda P + \mu Q) \equiv \lambda^3 (8S^2 U - TH) + 18\lambda^2\mu (STU + 8S^2H)$$
$$+ 9\lambda\mu^2 \{(T^2 - 32S^3) U + 12STH\}$$
$$- 54\mu^3 \{4S^2 TU - (T^2 + 32S^3) H\};$$
$$Q(\lambda P + \mu Q) \equiv \lambda^5 \{16S^2 TU + (T^2 + 192S^3) H\}$$
$$+ 30\lambda^4\mu \{S(T^2 - 64S^3) U + 16S^2 TH\}$$
$$+ 15\lambda^3\mu^2 \{T(T^2 - 320S^3) U + 48ST^2 H\}$$
$$- 270\lambda^2\mu^3 \{16S^2T^2 U - T(T^2 - 64S^3) H\}$$
$$- 1620\lambda\mu^4 \{ST^3 U + 4S^2 (T^2 - 64S^3) H\}$$
$$- 324\mu^5 \{(T^4 + 24T^3S^3 + 512S^6) U - 6ST(T^2 + 128S^3) H\}.$$

Wenn wir dann die Invarianten S und T von $(\lambda P + \mu Q)$ in Art. 234. durch s und t respective bezeichnen, so differieren diese letzterhaltenen Werthe nur durch Factoren von

$$(48S^2 U + 18TH) \frac{ds}{d\lambda} + (TU - 24SH) \frac{ds}{d\mu}$$

und

$$(48S^2 U + 18TH) \frac{dt}{d\lambda} + (TU - 24SH) \frac{dt}{d\mu}$$

respective. Zu diesen Formeln fügen wir endlich die Ausdrücke der Reciproken von $(\lambda U + 6\mu H)$ und $(\lambda P + \mu Q)$ hinzu, welche respective sind

$$(\lambda^4 + 24S\lambda^2\mu^2 + 8T\lambda\mu^3 - 48S^2\mu^4) F - 24\mu(\lambda^3 + 2T\mu^3) P^2$$
$$- 24\mu^2 (\lambda^2 - 4S\mu^2) PQ - 8\lambda\mu^3 Q^2$$

und

$$4\{S\lambda^4 + T\lambda^3\mu + 72S^2\lambda^2\mu^2 + 108ST\lambda\mu^3 + 27(T^2 - 16S^3)\mu^4\}\Theta$$
$$- \{T\lambda^4 + 216ST\lambda^2\mu^2 + 108(T^2 - 64S^3)\lambda\mu^3 - 3888TS^2\mu^4\} H^2$$
$$- \{16S^2\lambda^4 + 32ST\lambda^3\mu + 18T^2\lambda^2\mu^2 + 216S(T^2 + 32S^3)\mu^4\} UH$$
$$+ \{64S^3\lambda^3\mu + 144S^2T\lambda^2\mu^2 + 108ST^2\lambda\mu^3 + 27T(T^2 + 16S^3)\mu^4\} U^2.$$

236. Wir entwickeln ferner eine nützliche identische Gleichung. Wenn man in die cubische Form an Stelle der Variabeln x_1, x_2, x_3 die $x_i + \lambda x_i'$ einsetzt, so kann das Resultat der Substitution in der Form

$$U + 3\lambda S_x + 3\lambda^2 P_x + \lambda^3 U'$$

geschrieben werden, nach welcher $S_x = 0$ den Polarkegelschnitt und $P_x = 0$ die Polargerade des Punktes x_i' in Bezug auf die Curve dritter Ordnung $U = 0$ darstellen. Für die kanonische Form ist also

$$S_x \equiv (x_1{}^2 + 2m x_2 x_3)\, x_1' + (x_2{}^2 + 2m x_3 x_1)\, x_2' + (x_3{}^2 + 2m x_1 x_2)\, x_3'$$

und

$$P_x \equiv (x_1'^2 + 2m x_2' x_3')\, x_1 + (x_2'^2 + 2m x_3' x_1')\, x_2 + (x_3'^2 + 2m x_1' x_2')\, x_3.$$

Wenn wir dann das Resultat einer gleichen Substitution in die Gleichung der Hesse'schen Curve $H = 0$ in der analogen Form

$$H + 3\lambda \Sigma_x + 3\lambda^2 \Pi_x + \lambda^3 H'$$

schreiben, d. h. wenn wir durch $\Sigma_x = 0$ und $\Pi_x = 0$ den Polarkegelschnitt und die Polarlinie von x_i' in Bezug auf die Hesse'sche Curve darstellen, so bestätigt die Benutzung der kanonischen Form ohne Schwierigkeit die identische Gleichung

$$3\,(S_x \Pi_x - \Sigma_x P_x) \equiv H'U - HU'.$$

Daraus folgt, dass für x_i' als einen Punkt der Curve, d. h. $U' = 0$ die Gleichung der Curve $U = 0$ in der Form

$$S_x \Pi_x - \Sigma_x P_x = 0$$

geschrieben werden kann.

Aus dieser Form ziehen wir unmittelbar die folgenden Ergebnisse:

a) Die geraden Linien $P_x = 0$ und $\Pi_x = 0$ schneiden sich in der Curve dritter Ordnung, d. h. der Tangentialpunkt von x_i' oder der dritte Schnittpunkt der ihm entsprechenden Tangente mit der Curve ist der Durchschnittspunkt von $P_x = 0$ mit der Polare $\Pi_x = 0$ von x_i' in Bezug auf die Hesse'sche Curve. (Vergl. Art. 184.)

b) Die Berührungspunkte der vier vom Punkte x_i' noch an die Curve dritter Ordnung gehenden Tangenten, d. h. die Durchschnittspunkte der Curven $S_x = 0$ und $U = 0$ sind auch die Durchschnittspunkte von $S_x = 0$ mit $\Sigma_x = 0$, d. h. die Schnittpunkte der beiden Polarkegelschnitte von x_i' in Bezug auf die Curve selbst und ihre Hesse'sche Curve.

c) Die Gleichung

$$S_x \Pi_x - \Sigma_x P_x = 0$$

entspringt durch Elimination des Parameters θ zwischen den Gleichungen

$$S_x + \theta \Sigma_x = 0 \quad \text{und} \quad P_x + \theta \Pi_x = 0,$$

von denen die erste einen Kegelschnitt in dem durch die

Schnittpunkte von $S_x = 0$ und $\Sigma_x = 0$ gehenden Büschel und die zweite die Polare des Punktes x_i' in Bezug auf ihn bezeichnet. Somit kann die gegebene Curve dritter Ordnung als der Ort der Berührungspunkte der Tangenten betrachtet und hervorgebracht werden, welche von einem Punkte x_i' an die Kegelschnitte eines Büschels gezogen werden können.

d) Wenn die Gleichung $S_x + \theta \Sigma_x = 0$ zwei gerade Linien repräsentiert, so geht die durch $P_x + \theta \Pi_x = 0$ dargestellte Gerade durch den Durchschnittspunkt derselben; dieser Durchschnittspunkt ist daher ein Punkt der Curve dritter Ordnung und $P_x + \theta \Pi_x = 0$ bezeichnet die Tangente derselben in ihm. Die vier Berührungspunkte der von x_i' aus an die Curve gehenden Tangenten bilden somit ein Viereck, dessen drei Diagonalpunkte in der Curve dritter Ordnung liegen und die mit x_i' cotangentialen Punkte sind (vergl. Art. 151.), d. h. die Punkte, deren Tangenten sich mit der seinigen an demselben Punkte der Curve durchschneiden.

237. Diese identische Gleichung kann [47]) dazu dienen, die Gleichung des Kegelschnitts zu bilden, der durch fünf auf einander folgende Punkte der Curve dritter Ordnung hindurchgeht. Weil $S_x = 0$ die Curve berührt und $P_x = 0$ die gemeinschaftliche Tangente beider Curven bezeichnet, so ist die allgemeine Gleichung eines die Curve dritter Ordnung $U = 0$ in x_i' berührenden Kegelschnitts

$$S_x - \xi_x P_x = 0$$

für ξ_x als das Polynom

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 ,$$

welches durch Vergleichung mit Null eine beliebige Gerade ausdrückt. Unter Benutzung der entwickelten Identität kann aber die Gleichung der Curve dritter Ordnung in der Form geschrieben werden

$$\Pi_x (S_x - \xi_x P_x) = P_x (\Sigma_x - \xi_x \Pi_x),$$

aus welcher wir erkennen, dass die vier Punkte, in welcher der berührende Kegelschnitt

$$S_x - \xi_x P_x = 0$$

die Curve ferner schneidet, seine Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt

$$\Sigma_x - \xi_x \Pi_x = 0$$

sind; so dass, wenn dieser letztere Kegelschnitt durch den Punkt x_i' geht, der erstere drei aufeinander folgende Punkte der Curve dritter Ordnung enthält. Durch Substitution der x_i' für die x_i erhalten wir aber $\Sigma_x' = \Pi_x' = H'$ und die Bedingung, unter welcher $\Sigma_x - \xi_x \Pi_x = 0$ durch den Punkt x_i' geht, ist somit $\xi_x' = 1$. Damit dann

$$S_x - \xi_x P_x = 0$$

durch vier aufeinander folgende Punkte der Curve geht, muss

$$\Sigma_x - \xi_x \Pi_x = 0$$

die Gerade $P_x = 0$ zur Tangente im Punkte x_i' haben; die Tangente von

$$\Sigma_x - \xi_x \Pi_x = 0$$

oder die Polare von x_i' in Bezug auf diese Curve ist aber durch

$$2\Pi_x - \xi_x' \Pi_x - \xi_x \Pi_x' = 0$$

oder wegen $\xi_x' = 1$ und $\Pi_x' = H'$ durch $\Pi_x - H' \xi_x = 0$ dargestellt und damit die linke Seite dieses Ausdrucks zu P_x proportional sei, muss man haben

$$\xi_x = \theta P_x + \frac{1}{H'} \Pi_x.$$

Die allgemeine Gleichung eines durch vier auf einander folgende Punkte der Curve gehenden Kegelschnitts ist somit

$$S_x - \theta P_x^2 - \frac{1}{H'} P_x \Pi_x = 0$$

und

$$\Sigma_x - \theta P_x \Pi_x - \frac{1}{H'} \Pi_x^2 = 0$$

geht durch die beiden Punkte, in denen der erste Kegelschnitt die Curve dritter Ordnung ferner schneidet; die Gleichung derselben ist damit als reducibel auf die Form

$$\Pi_x \left(S_x - \theta P_x^2 - \frac{1}{H'} P_x \Pi_x\right) = P_x \left(\Sigma_x - \theta P_x \Pi_x - \frac{1}{H'} \Pi_x^2\right)$$

erkannt.

238. Weil diese beiden Kegelschnitte die Gerade $P_x = 0$ zur gemeinschaftlichen Tangente im nämlichen Punkte haben, so kann durch Addition ihrer mit passenden Constanten multiplicierten Gleichungen ein durch P_x theilbares Resultat

erhalten werden und der andere Factor desselben repräsentiert dann die gerade Linie, welche die beiden letzten Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Curve dritter Ordnung verbindet. Es ist dazu nöthig, μ so zu bestimmen, dass

$$\mu S_x + \Sigma_x - \frac{1}{H'} \Pi_x^2$$

durch P_x theilbar wird und wir thun diess, indem wir die Discriminante dieser Grösse gleich Null setzen. Die Berechnung dieser Discriminante giebt aber

$$\mu^3 H' + 4\mu^2 \frac{\Theta'}{H'}$$

und unsere Grösse zerfällt also in Factoren, wenn

$$\mu = -\frac{4\Theta'}{H'^2}$$

ist. Da einer der Factoren P_x ist, so gilt für M_x als den andern die Identität

$$\mu S_x + \Sigma_x - \frac{1}{H'} \Pi_x^2 = M_x P_x .$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die am Ende des letzten Artikels gegebene Gleichung der Curve dritter Ordnung in die Form

$$(\Pi_x + \mu P_x)\left(S_x - \theta P_x^2 - \frac{1}{H'} P_x \Pi_x\right)$$
$$= P_x^2 \left\{M_x - \frac{\mu}{H'} \Pi_x - \theta\,(\Pi_x + \mu P_x)\right\}$$

transformiert werden, deren Form aussagt, dass

$$\Pi_x + \mu P_x = 0$$

die Tangente im Tangentialpunkt des gegebenen Punktes der Curve dritter Ordnung ist, und dass $M_x - \frac{\mu}{H'} \Pi_x = 0$ durch den zweiten Tangentialpunkt des gegebenen Punktes hindurchgeht. (Vergl. Art. 156.)

239. Damit der Kegelschnitt durch fünf aufeinander folgende Punkte der Curve geht, müssen die Coordinaten x_i' der Gleichung

$$M_x - \frac{\mu}{H'} \Pi_x - \theta\,(\Pi_x + \mu P_x) = 0$$

genügen. Die einzige Schwierigkeit liegt darin, das Resultat

der Substitution von x_i' in die Function M_x zu bestimmen. Wenn wir aber die Gleichung

$$\mu S_x + \Sigma_x - \frac{1}{H'} \Pi_x^2 = M_x P_x$$

nach x_1, x_2 oder x_3 differentiieren, und in das Ergebniss die x_i' für die x_i einsetzen, indem wir bemerken, dass

$$\frac{dS_x'}{dx_1'} = 2\frac{dP_x'}{dx_1'}, \quad \frac{d\Sigma_x'}{dx_1'} = 2\frac{d\Pi_x'}{dx_1'}$$

ist, erhalten wir $M_x' = 2\mu$ und es ist also das Resultat der Substitution der x_i' für die x_i in

$$M_x - \frac{\mu}{H'} \Pi_x - \theta(\Pi_x + \mu P_x) = 0$$

durch $\mu - \theta H' = 0$ ausgedrückt, so dass weil μ gleich $-\frac{H'^2}{4\Theta'}$ bestimmt wurde, $\theta = -\frac{4\Theta'}{H'^3}$ sich ergiebt. Damit ist das Problem vollständig gelöst.

240. Wir erwähnen eine andere allgemeine Form, auf welche die Gleichung einer Curve dritter Ordnung gebracht werden kann, nämlich der Form

$$a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 = 0$$

für

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

(Art. 10.). Der Polarkegelschnitt eines beliebigen Punktes x_i' ist nun durch

$$a_1 x_1' x_1^2 + a_2 x_2' x_2^2 + a_3 x_3' x_3^2 + a_4 x_4' x_4^2 = 0$$

gegeben und wird für den Punkt

$$x_1' = 0, \quad x_2' = 0$$

ein Linienpaar durch den Schnittpunkt von

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \text{ etc.},$$

man erkennt also, dass die Punkte

$$x_1 x_2, \; x_3 x_4; \quad x_1 x_3, \; x_2 x_4; \quad x_1 x_4, \; x_2 x_3$$

entsprechende Punktepaare in der Hesse'schen Curve sind.

Diese Form der Gleichung enthält elf Constanten implicite und ist daher eine, auf welche die allgemeine Gleichung einer Curve dritter Ordnung in unendlich vielen Arten reduciert werden kann.

Die Werthe der Invarianten für diese Form sind

$$S = - a_1 a_2 a_3 a_4 ,$$

$$T = a_2^2 a_3^2 a_4^2 + a_3^2 a_4^2 a_1^2 + a_4^2 a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2^2 a_3^2$$
$$- 2 a_1 a_2 a_3 a_4 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4) ;$$

man bildet die Discriminante durch Elimination der x_i zwischen den nach x_1, x_2, x_3, x_4 genommenen Differentialen

$$a_1 x_1^2 = a_4 x_4^2 , \quad a_2 x_2^2 = a_4 x_4^2 , \quad a_3 x_3^2 = a_4 x_4^2 ,$$

und erhält die x_i proportional den Reciproken von

$$a_1^{\frac{1}{2}}, \; a_2^{\frac{1}{2}}, \; a_3^{\frac{1}{2}}, \; a_4^{\frac{1}{2}} ;$$

damit aber durch Substitution in

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

die Discriminante

$$(a_2 a_3 a_4)^{\frac{1}{2}} + (a_3 a_4 a_1)^{\frac{1}{2}} + (a_4 a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} + (a_1 a_3 a_4)^{\frac{1}{2}} = 0 ,$$

welche von den Wurzeln befreit wie vorher giebt

$$R = T^2 + 64 S^3 = 0 \text{ [48]}.$$

Die Hesse'sche Covariante ist in diesem Falle

$$\Sigma a_2 a_3 a_4 x_2 x_3 x_4 = 0 ,$$

die Evectante von S oder die Cayley'sche Curve ist

$$\Sigma a_2 a_3 a_4 (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4) = 0 ,$$

die erste Evectante von T ebenso

$$\Sigma a_3^2 a_4^2 (a_1 - a_2)(\xi_1 - \xi_2)^3$$
$$- \Sigma a_1 a_2 a_3 a_4^2 (2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)(2\xi_2 - \xi_3 - \xi_1)(2\xi_3 - \xi_1 - \xi_2) = 0$$

und die zweite Evectante von T oder die Reciprokalcurve

$$\Sigma a_3^2 a_4^2 (\xi_1 - \xi_2)^6 - 2 \Sigma a_2 a_3 a_4^2 (\xi_1 - \xi_2)^3 (\xi_1 - \xi_3)^3$$
$$+ 2 a_1 a_2 a_3 \left\{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4) - (\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3)\right\}$$
$$\times \left\{(\xi_1 - \xi_4)(\xi_3 - \xi_2) - (\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)\right\}$$
$$\times \left\{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3) - (\xi_1 - \xi_3)(\xi_4 - \xi_2)\right\} .$$

241. Endlich wollen wir mit einigen Bemerkungen über den Fall schliessen, wo die Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt. Wenn eine Curve entweder zwei Doppelpunkte oder eine Spitze besitzt, so verschwindet nicht nur ihre Discriminante, sondern es verschwinden auch die Functionen, welche man aus ihrem allgemeinen Ausdruck in den Coefficienten der Originalgleichung

durch Differentiation nach jedem dieser Coefficienten erhält (Vergl. „Vorlesungen" Art. 43., 69.) In der That folgt aus dem Ausdruck der Discriminante

$$T^2 + 64 S^3 = 0$$

der cubischen Form, dass ihre Differentiale durch

$$2T \frac{dT}{da} + 192\, S^2 \frac{dS}{da}, \quad 2T \frac{dT}{db} + 192\, S^2 \frac{dS}{db}, \text{ etc.}$$

dargestellt werden und also bei der Existenz einer Spitze, d. h. mit $S = 0$, $T = 0$ (Art. 225.) sämmtlich verschwinden. Wenn die Curve zwei Doppelpunkte hat, d. h. wenn die Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt, so besteht die Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{dT}{da} : \frac{dS}{da} = \frac{dT}{db} : \frac{dS}{db} = \frac{dT}{dc} : \frac{dS}{dc}, \text{ etc.};$$

diese Gleichungen, jede vom Grade acht in den Coefficienten, bilden das System der Bedingungen, unter welchen die allgemeine Gleichung dritten Grades in zwei Factoren zerlegbar ist.

242. Die vorigen Bedingungen können in einer andern bemerkenswerthen Form geschrieben werden. Sie entspringt aus der Bemerkung, dass jeder Doppelpunkt einer Curve auch ein Doppelpunkt ihrer Hesse'schen Curve ist, so dass seine Coordinaten den durch Differentiation der Gleichungen der Curve und ihrer Hesse'schen Curve nach den x_i entstehenden Gleichungen genügen müssen. Im Falle der Curve dritter Ordnung sind aber diese Differentiale sämmtlich vom zweiten Grade in den Variabeln und man kann zwischen ihnen die Grössen

$$x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_2 x_3,\ x_3 x_1,\ x_1 x_2$$

linear eliminieren und erhält die Discriminante in Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} a, & b_1, & c_1, & m, & a_3, & a_2 \\ a_2, & b, & c_2, & b_3, & m, & b_1 \\ a_3, & b_3, & c, & c_2, & c_1, & c \\ \mathrm{a}, & \mathrm{b}_1, & \mathrm{c}_1, & \mathrm{m}, & \mathrm{a}_3, & \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{a}_2, & \mathrm{b}, & \mathrm{c}_2, & \mathrm{b}_3, & \mathrm{m}, & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_3, & \mathrm{b}_3, & \mathrm{c}, & \mathrm{c}_2, & \mathrm{c}_1, & \mathrm{c} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir haben auch in Art. 227. gesehen, dass die Bedingungen für die Existenz von drei Doppelpunkten in der

Curve ausgedrückt werden, indem man eine der drei ersten Reihen und die entsprechende unter den letzten drei horizontalen Reihen dieser Determinante nimmt und jede Determinante gleich Null setzt, welche aus zwei Verticalreihen dieses Systems gebildet ist. In derselben Art werden die Bedingungen, unter denen die Curve zwei Doppelpunkte hat, dadurch ausgedrückt, dass man irgend zwei unter den ersten drei Horizontalreihen mit den entsprechenden zweien der letzten drei verbindet und die aus irgend vier Verticalreihen dieses Systems gebildete Determinante gleich Null setzt. Zum Beweise bemerken wir, dass für $U \equiv \xi_x V$ mit

$$\xi_x \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

und $V = 0$ als Gleichung eines Kegelschnittes die Hesse'sche Curve von $U = 0$ in der Form

$$\lambda U + \mu \xi_x^3 = 0$$

erscheint — wie wir im nächsten Artikel beweisen wollen. Dann haben wir aber

$$\frac{dH}{dx_1} = \lambda \frac{dU}{dx_1} + 3\mu \xi_1 \xi_x^2, \quad \frac{dH}{dx_2} = \lambda \frac{dU}{dx_2} + 3\mu \xi_2 \xi_x^2$$

und somit

$$\xi_2 \frac{dH}{dx_1} - \xi_1 \frac{dH}{dx_2} - \xi_2 \lambda \frac{dU}{dx_1} + \xi_1 \lambda \frac{dU}{dx_2} = 0,$$

d. h. die Differentiale von H und U nach x_1 und x_2 respective sind durch eine lineare identische Relation verbunden und daher verschwindet die Determinante, welche man aus den Coefficienten von vier entsprechenden Gliedern in diesen Gleichungen bildet.

243. Die Hesse'sche Covariante von $\xi_x U = 0$, für $\xi_x = 0$ als eine Gerade und $U = 0$ als eine Curve beliebiger Ordnung kann in verschiedenen Wegen gebildet werden. Die zweiten Differentiale von $\xi_x U$ sind

$$\xi_x U_{11} + 2\xi_1 U_1, \; \xi_x U_{22} + 2\xi_2 U_2, \; \xi_x U_{33} + 2\xi_3 U_3,$$
$$\xi_x U_{23} + \xi_2 U_3 + \xi_3 U_2, \; \xi_x U_{31} + \xi_3 U_1 + \xi_1 U_3,$$
$$\xi_x U_{12} + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_1;$$

bildet man mit denselben die Hesse'sche Determinante und benutzt man zur Reduction die Gleichungen für homogene Functionen

$$(n-1)\, U_1 = U_{11} x_1 + U_{12} x_2 + U_{13} x_3, \text{ etc.}$$

so erhält man für die Hesse'sche Covariante von $\xi_x U = 0$ den Ausdruck

$$\frac{n^2}{(n-1)^2}\,\xi_x^3\,U - \frac{n}{(n-1)}\,\xi_x\,U F,$$

in welchem F die Function

$$(U_{22}\,U_{33} - U_{23}^2)\,\xi_1^2 + \cdots$$

(Art. 185.) bezeichnet, welche geometrisch dargestellt wird durch den Ort der Punkte, deren Polarkegelschnitte die gegebene Gerade berühren.

Allgemeiner findet man für die Hesse'sche Covariante von $U\,V$ nach demselben Verfahren den Ausdruck

$$\frac{(n+n'-1)^2}{(n'-1)^2}\,U^3 H' + \frac{(n+n'-1)^2}{(n-1)^2}\,V^3 H$$
$$- \frac{(n+n'-1)}{(n-1)\,(n'-1)}\,(U\,V^2\Theta + U^2\,V\Theta')$$
$$+ \frac{(n+n'-1)\,(n+n'-2)}{(n-1)\,(n'-1)}\,U\,V\,W,$$

in welchem wie in Art. 346. der „Kegelschnitte" Θ, Θ' respective

$$(U_{22}\,U_{33} - U_{23}^2)\,U_{11}' + \cdots, \quad (U_{22}'\,U_{33}' - U_{23}'^2)\,U_{11} + \cdots$$

repräsentieren und W die Covariante

$$(U_{22}\,U_{33}' + U_{22}'\,U_{33} - 2\,U_{23}\,U_{23}')\,U_1\,U_1' + \cdots$$

bezeichnet. Diese Form zeigt, dass die Durchschnittspunkte von $U = 0$ mit $V = 0$ Doppelpunkte der Hesse'schen Curve sind und dass die Tangenten der letztern in ihnen die bezüglichen Tangenten von $U = 0$ und $V = 0$ sind [49].

Sechstes Kapitel.

Curven vierter Ordnung.

244. Wir haben die Eintheilung der Curven dritter Ordnung durch die Combination der Unterscheidung nach projectivischen Characteren mit der Unterscheidung nach der Natur ihrer unendlichen Aeste begründet und können dieselben Classificationsprincipien auf die Curven vierter Ordnung anwenden. Aber die Zahl der Arten ist so gross und die Arbeit der Discussion ihrer Formen so bedeutend, dass es nutzlos erscheint, den Versuch einer Aufzählung zu unternehmen. Es wird hinreichend sein, die Aufmerksamkeit auf diejenigen Punkte zu lenken, welche bei einer vollständigen Aufzählung hauptsächlich in Betracht kommen. Eine Curve vierter Ordnung ist entweder ohne vielfache Punkte, oder sie hat einen Doppelpunkt, oder zwei oder drei Doppelpunkte, die einzeln oder alle zu Spitzen werden können. Danach entstehen zehn Arten, deren Plücker'sche Charactere und Defecte sind

	μ	δ	$\varkappa$	ν	τ	ι	D
I.	4	0	0	12	28	24	3
II.	4	1	0	10	16	18	2
III.	4	0	1	9	10	16	2
IV.	4	2	0	8	8	12	1
V.	4	1	1	7	4	10	1
VI.	4	0	2	6	1	8	1
VII.	4	3	0	6	4	6	0
VIII.	4	2	1	5	2	4	0
IX.	4	1	2	4	1	2	0
X.	4	0	3	3	1	0	0;

in jedem der letzten vier Fälle ist die Curve unicursal.

Jede Curve vierter Ordnung kann als einer dieser Arten angehörig betrachtet werden, aber es ist nöthig, einige besondere Formen zu beachten, welche aus der Vereinigung von Knotenpunkten und Spitzen hervorgehen.

Fig. 53.

1. Zwei zusammenfallende Knotenpunkte bringen eine Singularität hervor, die wir als Berührungsknoten bezeichnen wollen, in der That eine gewöhnliche zweipunktige Berührung von zwei Aesten der Curve. (Vergl. Fig. des Art. 38.) Wir bemerken, dass die gemeinschaftliche Tangente derselben in diesem Punkt unter den Doppeltangenten der Curve zweifach zu zählen ist. Die Curve gehört somit, wenn ausser dem Berührungsknoten keine andern singulären Punkte vorhanden sind, zur vierten unter den obigen Arten; aber $\delta = 2$ bedeutet eben den Berührungsknoten und $\tau = 8$ bezeichnet als Doppeltangenten die zweifach zu zählende Tangente im letztern und sechs andere Doppeltangenten.

2. Ein Knotenpunkt und eine Spitze erzeugen durch ihre Vereinigung die Singularität, welche als Knotenspitze bezeichnet werden kann und in Art. 58. als Schnabelspitze bezeichnet worden ist. Die betreffende Tangente zählt als

Fig. 54. Fig. 55.



Doppeltangente und als stationäre Tangente je einmal. Wenn also andre singuläre Punkte fehlen, so gehört eine Curve vierter Ordnung mit Knoten- oder Schnabelspitze zur V. Art mit den obigen Charakteristiken; $\delta = 1$, $\varkappa = 1$ bezeichnen aber beide eben die Knotenspitze und $\tau = 4$ die betreffende Tangente und drei andere Doppeltangenten, $\iota = 10$ dieselbe Tangente in der Spitze und neun andere stationäre Tangenten.

3. Drei Knotenpunkte können als auf einander folgende

Punkte einer Curve von endlicher Krümmung zusammenfallen und erzeugen einen Osculations-Knoten, einen Punkt, in welchem dreipunktige Berührung oder Osculation zwischen zwei Aesten der Curve stattfindet. Die Tangente im Osculationsknoten zählt als Doppeltangente der Curve dreifach; die Curve ist von der VII. Art mit den angegebenen Characteren, so jedoch, dass $\delta = 3$ den Osculationsknoten bezeichnet und $\tau = 4$ ausser der ihm entsprechenden Tangente nur eine andere Doppeltangente anzeigt.

4. Zwei Knotenpunkte und eine Spitze oder ein Berührungsknoten und eine Spitze als aufeinander folgende Punkte einer Curve von endlicher Krümmung erzeugen gleichfalls nicht einen dreifachen Punkt sondern die Singularität, die wir eben Berührungsknotenspitze nennen wollen, eine Osculation oder ein vierpunktiger Schnitt der beiden Aeste der Curve, die in einer Spitze sich verbinden. Die Curve ist von der VIII. Art; $\delta = 2$, $\varkappa = 1$ bezeichnen den singulären Punkt, $\tau = 2$ die entsprechende Tangente, die als Doppeltangente zweifach zählt, und $\iota = 4$ dieselbe Tangente als stationäre und ausser ihr drei andre stationäre Tangenten.

5. Drei Knotenpunkte können als Ecken eines unendlich kleinen Dreiecks zusammenfallen und erzeugen dann einen dreifachen Punkt mit drei verschiedenen Tangenten. Die Curve gehört zur VII. Art und von den obigen Characteren bezeichnet $\delta = 3$ eben den dreifachen Punkt.

6. Zwei Knotenpunkte und eine Spitze geben in Vereinigung einen dreifachen Punkt besonderer Art, in welchem ein gewöhnlicher Zweig der Curve durch eine Spitze hindurch geht. Die Curve gehört zur VIII. Art und unter ihren Characteren bezeichnen $\delta = 2$, $\varkappa = 1$ eben den dreifachen Punkt.

7. Wenn endlich ein Knotenpunkt und zwei Spitzen vereinigt sind, so entsteht ein dreifacher Punkt, der sich nicht sichtbar von einem gewöhnlichen Punkt der Curve unterscheidet; die Curve ist von IX. Art und von ihren Characteren bezeichnen $\delta = 1$, $\varkappa = 2$ eben den besonderen dreifachen Punkt.

245. Um die Unterscheidungen zwischen den verschiedenen hier aufgezählten Arten von Doppelpunkten zu erläutern, wollen wir voraussetzen, dass der Anfangspunkt der Coordinaten ein Doppelpunkt sei, dessen beide Tangenten mit der Geraden $y = 0$ zusammenfallen; dann ist die Gleichung der Curve vierter Ordnung von der Form

$$y^2 + u^{(3)} + u^{(4)} = 0$$

mit

$$u^{(3)} = ax^3 + bx^3y + cxy^2 + dy^3,$$
$$u^{(4)} = ex^4 + fx^3y + \cdots$$

Wir gehen nun wie in Art. 36. vor: Um die Form der Curve in der Nähe des Anfangspunktes zu bestimmen, substituieren wir $y = mx^\beta$ und bestimmen β so, dass zwei oder mehrere von den Exponenten des x gleich und kleiner als der Exponent irgend eines andern Gliedes sind und beachten nur die Glieder vom niedrigsten Grade in x.

Sei dann zuerst a nicht gleich Null; so finden wir

$$\beta = \frac{3}{2},$$

die Form der Curve in der Nähe des Anfangspunktes ist dieselbe wie die der Curve

$$y^2 + ax^3 = 0$$

und der Anfangspunkt ist eine gewöhnliche Spitze.

1. Sei $a = 0$. Es wird $\beta = 2$ und m wird durch die quadratische Gleichung

$$m^2 + bm + c = 0$$

bestimmt; die Curve hat zwei Aeste, deren Formen in der Nähe des Anfangspunktes mit denen der Curven

$$y = m_1x^2, \; y = m_2x^2$$

übereinstimmen, für m_1, m_2 als die Wurzeln der obigen Gleichung. Diese Aeste berühren einander und der Anfangspunkt ist ein Berührungsknoten.

2. Wenn die erhaltene quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat, so ist die Form der Gleichung der Curve

$$(y - mx^2)^2 + cxy^2 + dy^3 + fx^3y + \cdots = 0$$

und für den bisher benutzten Grad der Annäherung fallen

die beiden Aeste in der Nachbarschaft des Anfangspunktes zusammen. Um sie zu unterscheiden setzen wir

$$y = mx^2 + nx^\gamma$$

und bestimmen n und γ wie vorher m und β. Wir finden dann

$$\gamma = \frac{5}{2}, \quad n^2 = -(cm^2 + fm).$$

In der Nähe des Anfangspunktes ist daher die Form der Curve die von der Curve

$$y = mx^2 + nx^{\frac{5}{2}},$$

welche in Art. 58. erörtert wurde. Der Anfangspunkt ist also eine Schnabelspitze oder Knotenspitze.

3. Wenn jedoch in Hinzufügung zu den vorigen Bedingungen

$$f = -cm$$

ist, so erhält die Gleichung der Curve die Form

$$(y - mx^2)^2 + cxy\,(y \quad mx^2) + dy^3 + gx^2y^2 + \cdots = 0$$

und wir erhalten durch die Substitution

$$y = mx^2 + nx^\gamma$$

den Werth $\gamma = 3$ und zur Bestimmung von n die quadratische Gleichung

$$n^2 + cmn + m^2\,(dm + g) = 0.$$

Wenn n_1, n_2 die Wurzeln derselben sind, so besteht die Curve in der Nähe des Anfangspunktes aus zwei sich osculierenden Aesten, deren Formen durch die Gleichungen

$$y = mx^2 + n_1x^3, \quad y = m^2 + n_2x^3$$

dargestellt werden; osculierend, weil die Differenz dieser Werthe von y mit einer ungeraden Potenz von x beginnt und somit die Aeste sich im Anfangspunkt sowohl berühren als durchsetzen. Der Anfangspunkt ist ein Osculationsknoten.

4. Wenn aber wieder in Hinzufügung zu den früheren Bedingungen die letzterwähnte quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat, oder wenn überdiess

$$dm + g = \frac{1}{4}\,c^2$$

ist, so ist die Gleichung der Curve von der Form

$$(y - mx^2 - cxy - dy^2)^2 = Axy^3 + By^4$$

und wir finden auf dem vorher verfolgten Wege, dass ihre Form in der Nähe des Anfangspunktes durch die Gleichung

$$y = mx^2 + cmx^3 + px^{\frac{7}{2}}$$

bestimmt wird. Der Anfangspunkt ist dann eine Berührungsknotenspitze. Eine höhere Singularität kann in einer eigentlichen Curve vierter Ordnung der Knotenpunkt nicht haben, weil der nächste weitere Schritt A verschwinden machen und die Gleichung in zwei Gleichungen vom zweiten Grade zerfallen liesse.

Der Fall, in welchem der Anfangspunkt ein dreifacher Punkt ist, scheint der Erläuterung nicht weiter zu bedürfen.

246. Wir haben bisher die Unterscheidung zwischen reell und nicht reell ausser Betracht gelassen und wollen das Erforderliche nachtragen. Unter der Voraussetzung, dass die Curve vierter Ordnung selbst reell ist, können nicht reelle Doppelpunkte oder Spitzen nur in Paaren auftreten, d. h. man kann die Fälle unterscheiden von einem reellen Doppelpunkt, von zwei reellen oder zwei nicht reellen Doppelpunkten und von drei reellen oder von einem reellen und zwei nicht reellen Doppelpunkten, und ebenso für die Spitzen. Ein reeller Doppelpunkt ist aber immer entweder ein Knotenpunkt oder ein conjugierter Punkt. In Folge der Nothwendigkeit des Auftretens der nicht reellen Singularitäten in Paaren können die Unterscheidungen zwischen reell und nicht reell sich kaum bei den vorher besprochenen speciellen Singularitäten manifestieren, ausser etwa bei dem gewöhnlichen dreifachen Punkt, welcher ein Punkt mit drei reellen verschiedenen oder ein Punkt mit nur einer reellen Tangente neben zwei nicht reellen Tangenten sein kann, wo also im ersten Falle drei reelle Aeste der Curve sich in ihm schneiden, während er im letzten Fall der Durchschnitt von zwei reellen und zwei nicht reellen Aesten der Curve ist, oder ein conjugierter Punkt, durch welchen ein reeller Ast der Curve hindurch geht. Ein solcher Punkt ist nicht sichtbar verschieden von einem gewöhnlichen Punkt der Curve und erinnert in dieser Beziehung an den speciellen dreifachen Punkt unter 7., in Art. 244., unterscheidet sich von demselben aber wesentlich darin, dass im Falle des con-

jugierten Punktes im reellen Aste neben zwei nicht reellen Tangenten nur eine reelle Tangente, im Falle des speciellen dreifachen Punktes aber drei reelle zusammenfallende Tangenten vorhanden sind.

247. Wir haben aber noch von einigen andern Specialitäten zu reden. Ein Knotenpunkt kann in Bezug auf einen der Aeste, die durch ihn hindurch gehen, ein Inflexionspunkt sein, d. h. die Tangente des einen Astes im Doppelpunkt mit diesem drei (mit der Curve also vier) aufeinander folgende Punkte gemein haben; und er kann zugleich ein Inflexionspunkt in beiden Aesten sein. Ein solcher Doppelpunkt kann als die Vereinigung eines gewöhnlichen Doppelpunktes mit einem Inflexionspunkt oder andernfalls mit zwei Inflexionspunkten betrachtet werden und man kann ihn darnach entweder als einen e i n f a c h e n oder als einen d o p p e l t e n I n f l e x i o n s k n o t e n bezeichnen. Die so mit dem Knoten zusammenfallenden Inflexionen sind natürlich unter den Inflexionen der Curve zu zählen. Ein doppelter Inflexionsknoten besitzt Eigenschaften, die den in den Art. 171 f. begründeten Eigenschaften der Inflexionspunkte in Curven dritter Ordnung analog sind. Wenn wir im Allgemeinen den Ort der harmonischen Mittel in den durch einen Doppelpunkt der Curve vierter Ordnung gehenden Radien vectoren suchen, so erhalten wir aus der ihm als Coordinatenanfangspunkt entsprechenden Gleichung der Curve

$$u^{(4)} + u^{(3)} + u^{(2)} = 0$$

seine Gleichung in der Form

$$u^{(3)} + 2u^{(2)} = 0.$$

Der fragliche Ort wird daher eine gerade Linie, wenn $u^{(2)}$ als ein Factor in $u^{(3)}$ enthalten ist und der Doppelpunkt hat, weil eine harmonische Polare ihm entspricht, die in Art. 171. entwickelten Eigenschaften. Die Berührungspunkte der von ihm aus an die Curve gehenden Tangenten liegen in einer Geraden und es ist möglich, die Curve so zu projicieren, dass dieser Punkt ein Centrum wird, oder auch so, dass alle Sehnen von einer gewissen festen Richtung in den Punkten einer Geraden halbiert werden. Im letztern Fall ist die Form der Gleichung im Allgemeinen

$$y^2 (x - a)(x - b) = \pm A (x - c)(x - d)(x - e)(x - f).$$

Es unterliegt keinen Schwierigkeiten wie in Art. 39., 200. die verschiedenen möglichen Formen von Curven zu discutieren, welche dieser Gleichung entsprechen, je nach der Realität und nach den Grössenverhältnissen der $a, b, \ldots$, und daraus die möglichen verschiedenen Formen ihrer Projectionen abzuleiten.

248. Eine Curve vierter Ordnung kann als eine bei der Classification zu beachtende Singularität einen Undulationspunkt haben, d. h. einen Punkt, in welchem die Tangente vier aufeinander folgende Punkte mit der Curve gemein hat. Die Tangente der Curve in einem solchen Punkte vertritt zwei stationäre Tangenten und eine Doppeltangente. Eine Curve vierter Ordnung kann vier reelle Undulationspunkte haben, wie man aus der Gleichungsform

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = S^2$$

ersieht, in welcher $S = 0$ einen von den vier Geraden

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

berührten Kegelschnitt darstellt.

249. Damit ist die Aufzählung der durch Projection unzerstörbaren Charactere der Curven vierter Ordnung noch nicht geschlossen, welche bei einer vollständigen Classification Beachtung finden müssen. Wir erinnern uns, dass die Curven dritter Ordnung ohne singuläre Punkte in eintheilige und zweitheilige Curven zerfielen, je nachdem die reellen Punkte der Curve in einer stetigen Reihe geordnet erscheinen oder nicht. Es muss vorausgesetzt werden, dass ähnliche Unterschiede bei den Curven vierter Ordnung vorkommen und man kann leicht eine obere Grenze der Vieltheiligkeit einer solchen Curve bestimmen.

Um die Beweise formell vollständig zu machen, würde eine Unterscheidung zwischen den unendlichen Aesten und den in sich selbst zurückkehrenden sagen wir kurz den Ovalen zu machen sein; aber es ist statthaft, zunächst von den ersteren ganz abzusehen und nur auf die letzteren zu achten.

Dann erhellt sogleich, dass zwei Ovale, von denen das eine ganz vom andern umschlossen ist, die ganze reelle Curve

darstellen, weil jeder andere reelle Punkt unter den durch ihn gehenden Geraden solche gestatten würde, die fünf Punkte mit der Curve gemein hätten. Damit ist aber der Fall von mehr als zwei Ovalen, von denen keines die andern oder ein anderes umschliesst, durchaus nicht ausgeschlossen; wenn jedoch vier solche Ovale vorhanden wären, so ist sicher, dass sie die ganze reelle Curve darstellen, denn ein Kegelschnitt durch vier auf dieselben vertheilte Punkte schneidet sie in acht Punkten und kann nicht einen neunten Punkt der Curve ausserhalb derselben enthalten, während man ihn doch durch einen solchen legen könnte, falls einer vorhanden wäre. Wir schliessen daraus, dass eine Curve vierter Ordnung ohne singuläre Punkte höchstens viertheilig ist, weil kein Grund ersichtlich ist, weshalb sie nicht aus vier solchen getrennten Ovalen bestehen könnte. In der That ist die Existenz solcher Curven durch das in Art. 55. benutzte Beispiel der Gleichung

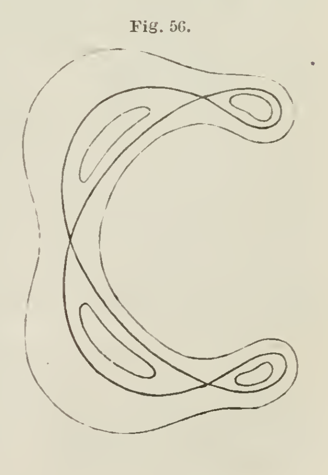
$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = c^4$$

mit $c < b$ ebenso wie durch folgendes von Plücker gegebene Beispiel bewiesen. Wenn

$$\Omega \equiv (y^2 - x^2)(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) - 2\left\{y^2 + x(x - 2)\right\}^2$$

ist, so wird durch $\Omega = 0$ eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten dargestellt, wie sie die Figur in der stärkeren Linie zeigt; die Gleichung $\Omega = k$ bezeichnet dann aber eine Curve, welche die Curve $\Omega = 0$ in keinem endlichen Punkte schneidet und um so weniger von ihrer Form abweicht, je kleiner wir $\varkappa$ voraussetzen, die aber ferner ganz innerhalb oder ausserhalb der Curve $\Omega = 0$ liegt, je nach dem Vorzeichen der Grösse k. Diese Curve ist eintheilig, wenn sie ganz ausserhalb der Curve $\Omega = 0$ gelegen ist; liegt sie ganz innerhalb derselben, so zerfällt sie in vier

Fig. 56.



meniskenförmige Ovalen, welche in den vier von der Curve $\Omega = 0$ umschlossenen Räumen liegen, von denen jedoch, wie man leicht sieht, je nach dem Werthe der Constanten eines und eventuell ein zweites nicht reell werden kann. Es kann also eine Curve vierter Ordnung ohne singuläre Punkte entweder eintheilig oder zweitheilig oder dreitheilig oder endlich viertheilig sein. Nach dem Vorhergehenden kann eine zweitheilige Curve vierter Ordnung aus zwei einander umschliessenden Ovalen bestehen, aber es kann weder eine viertheilige noch eine dreitheilige Curve vierter Ordnung zwei solche Ovalen als einen Theil enthalten.

In ganz analoger Art kann begründet werden, dass eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt entweder eintheilig, zwei- oder dreitheilig sein muss und eine solche Curve mit zwei Doppelpunkten nur entweder eintheilig oder zweitheilig sein kann. Man wird zugleich nicht übersehen, dass diess nur ein sehr unvollständiger Abriss einer allgemeinen Theorie ist, in welche noch nicht eigentlich eingegangen worden ist.

Wir wollen bemerken, dass die hier zur Erläuterung gebrauchte Figur von Plücker dazu angewendet wurde, um zu zeigen, dass die acht und zwanzig Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung ohne singulären Punkt sämmtlich reell sein können. Jedes der vier Ovalen besitzt eine dasselbe zweimal berührende Tangente und je zwei Ovalen haben vier gemeinschaftliche Tangenten, also die sechs Paare derselben vier und zwanzig.

Dieselbe Figur zeigt auch in jedem Oval zwei reelle Inflexionspunkte oder in allem deren acht. Ich kenne kein Beispiel einer Curve vierter Ordnung mit mehr als acht reellen Inflexionspunkten und im Falle der Curven dritter Ordnung wissen wir, dass nur ein Drittel der sämmtlichen Inflexionspunkte reell ist; allgemeine Sätze über die Realität der Inflexionspunkte der Curven vierter Ordnung sind aber nicht bekannt.

250. Um die Eintheilung der Curven vierter Ordnung bezüglich ihrer unendlichen Aeste zu überblicken, bemerken wir, dass die unendlich ferne Gerade eine Curve vierter Ordnung schneiden kann

a) in vier reellen Punkten,

b) in zwei reellen und zwei nicht reellen,

c) in vier nicht reellen,

d) in zwei zusammenfallenden und zwei reellen,

e) in zwei zusammenfallenden und zwei nicht reellen,

f) zweimal in zwei zusammenfallenden Punkten, welche reell sind, oder

g) welche nicht reell sind,

h) in drei zusammenfallenden Punkten und einem einzelnen reellen Punkte,

i) in vier zusammenfallenden Punkten;

wobei in den Fällen d), e), f), g) weiter zu unterscheiden wäre, ob die unendlich ferne in zwei zusammenfallenden Punkten schneidende Linie eine gewöhnliche Tangente, oder eine Gerade durch einen Doppelpunkt ist, der entweder ein Knotenpunkt oder ein isolierter Punkt, eine Spitze oder ein singulärer Punkt von einer der im Art. 244. erwähnten Arten sein kann. Ebenso kann im Falle h) die unendlich ferne Gerade entweder eine gewöhnliche stationäre Tangente oder die Tangente in einer Spitze oder in einem Doppelpunkte sein oder auch eine durch einen dreifachen Punkt gehende Gerade und im Falle i) die Tangente in einem Undulationspunkt oder in einem Doppelpunkt besonderer Art oder in einem dreifachen Punkte. Endlich kann ein Punkt, der unter den Schnitten mit der unendlich fernen Geraden einfach zählt, ein Inflexions- oder Undulationspunkt in der Curve sein und auch diess wird, wenn es stattfindet, eine Veränderung in der Gestalt der Curve bedingen, die bei der Classification zu berücksichtigen ist.

251. Wir haben früher (Art. 70.) gezeigt, wie die Gleichung der Hesse'schen Curve für eine Curve vierter Ordnung zu bilden ist, als einer Curve sechster Ordnung, die sich mit ihr in den vierundzwanzig Inflexionspunkten schneidet. Wir sahen auch in Art. 92., dass die Gleichung der Reciproken einer Curve vierter Ordnung von der Form

$$S^3 = 27\,T^2$$

ist, wo $S = 0$ eine Curve vierter und $T = 0$ eine Curve sechster Classe darstellt, von welchen die Form der Gleichung

zeigt, dass dieselben die vierundzwanzig stationären Tangenten der Curve zu ihren gemeinsamen Tangenten haben. Die Lösung des Problems, die Gleichung einer Curve zu bilden, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer gegebenen Curve hindurch geht, ist einem spätern Kapitel vorbehalten worden und wir werden dort zeigen, dass für den Fall der Curve vierter Ordnung die Gleichung einer solchen Curve in der Form

$$\Theta = 3 \mathrm{H} \Phi$$

geschrieben werden kann, in welcher Θ die Covariante

$$\mathfrak{U}_{11} H_1^2 + \cdots$$

bedeutet, die im Art. 232. erwähnt ist, mit $H_1, \ldots$ als den ersten Differentialen der Hesse'schen Determinante und den $\mathfrak{U}_{11}, \ldots$ als den

$$U_{22} U_{33} - U_{23}^2, \ldots$$

aus den zweiten Differentialen von U; und in gleicher Art Φ die Covariante $\mathfrak{U}_{11} H_{11} + \cdots$ des Beisp. 1. im Art. 231. In den nächsten Artikeln geben wir die Theorie der Doppeltangenten in der besondern Form, welche den Curven vierter Ordnung entspricht.

253. Es ist zweckmässig, diese Untersuchung mit der Darlegung einer allgemeineren Theorie zu beginnen, in welcher die Theorie der Doppeltangenten mit enthalten ist. Wir betrachten die Gleichungsform

$$U W = V^2,$$

unter der Voraussetzung, dass $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ Kegelschnitte repräsentieren, eine Form mit sechszehn impliciten Constanten, auf welche also die Gleichung jeder Curve vierter Ordnung in verschiedenen Arten zurückgeführt werden kann, wie wir es weiterhin vollständiger übersehen werden. Die Form der Gleichung zeigt, dass jeder der Kegelschnitte $U = 0$, $W = 0$ die Curve vierter Ordnung in vier Punkten berührt, nämlich in den Schnittpunkten, die er mit dem Kegelschnitt $V = 0$ erzeugt. Wir haben früher („Kegelsch." Art. 304., f.) die Gleichung

$$U W = V^2$$

für den Fall discutiert, in welchem $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$

gerade Linien darstellen und bemerken jetzt, dass die dort gefundenen Resultate gültig bleiben, wenn sie Kegelschnitte repräsentieren, so bald man die geeigneten Modificationen anbringt; d. h. sobald man bedenkt, dass zwei durch Gleichungen von der Form

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0$$

dargestellte Kegelschnitte sich statt in einem Punkte in vier Punkten durchschneiden und dass, wenn für einen Kegelschnitt von solcher Gleichung ein Punkt gegeben ist, drei andere Punkte mit bestimmt sind, weil für

$$\lambda U' + \mu V' + \nu W' = 0$$

der Kegelschnitt

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0$$

durch die vier Punkte geht, welche durch die Gleichungen

$$U : U' = V : V' = W : W'$$

gegeben sind. Aus der soeben erinnerten Discussion in der Theorie der Kegelschnitte folgt, dass die Curve vierter Ordnung $UW = V^2$ als die Enveloppe des veränderlichen Kegelschnittes

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

mit λ als Parameter betrachtet werden kann, welcher die gegebene Curve in den vier durch

$$\lambda U + V = 0, \ \lambda V + W = 0$$

bestimmten Punkten berührt. Die zwei Gruppen von vier Punkten, in welchen irgend zwei der umhüllenden Kegelschnitte die Curve berühren, liegen in einem andern Kegelschnitt, wie es die Gleichungsform

$$(\lambda^2 U + 2\lambda V + W)(\mu^2 U + 2\mu V + W) \\ = \{\lambda\mu U + (\lambda + \mu) V + W\}^2$$

lehrt, die mit $UW = V^2$ identisch ist. Ebenso können die Eigenschaften der Pole und der Polaren auf die betrachtete Curve ausgedehnt werden. Durch jeden Punkt oder durch eine Gruppe von vier Punkten, wie wir sagen können, gehen zwei Kegelschnitte des Systems

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0,$$

deren zweimal vier Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt

$$UW' + WU' - 2VV' = 0$$

liegen, den man als die Polare des gegebenen Punktes oder der gegebenen Punktegruppe bezeichnen kann. Dann zeigt die Symmetrie dieser Gleichung, dass die Polare in diesem Sinne des Wortes für irgend einen Punkt des letztern Kegelschnittes durch den gegebenen Punkt geht. („Kegelschn.“ Art. 106.) Umgekehrt schneidet irgend ein Kegelschnitt

$$aU + bV + cW = 0$$

die Curve vierter Ordnung in zwei Gruppen von vier Punkten, durch deren jede ein die Curve vierfach berührender Kegelschnitt gelegt werden kann; und die beiden letztern Kegelschnitte schneiden sich in einer Gruppe von Punkten, die den Pol von

$$aU + bV + cW = 0$$

in dem entwickelten Sinne des Wortes bilden.

253. Wir erinnern uns ferner der im Art. 360. der „Kegelschnitte“ begründeten Eigenschaften eines Systems von Kegelschnitten von der Gleichung

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0.$$

Wenn diese Gleichung ein Paar von geraden Linien repräsentiert, so liegt der Schnittpunkt derselben in einer festen Curve dritter Ordnung, der Jacobi'schen Determinante der drei Kegelschnitte

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

welche auch als der Ort eines Punktes definiert ist, dessen Polaren in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0$$

durch einen und denselben Punkt gehen. Wenn wir zwei Kegelschnitte dieses Systems betrachten, so ist die Gleichung jedes durch ihre Schnittpunkte gehenden Kegelschnittes von derselben Form und die Schnittpunkte jedes der drei Paare von geraden Linien, welche diese vier Punkte verbinden, liegen somit auch in der Jacobi'schen Curve. Wenn die Kegelschnitte einander berühren, so fallen zwei dieser Schnitt-

punkte mit dem Berührungspunkte zusammen; wenn also zwei Kegelschnitte des Systems

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0$$

einander berühren, so liegt der Berührungspunkt in der Jacobi'schen Curve. Dasselbe System

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0$$

kann ferner als das System der Polarkegelschnitte des veränderlichen Punktes y_i in Bezug auf eine gewisse feste Curve dritter Ordnung betrachtet werden, welche die Jacobi'sche Curve des Systems zu ihrer Hesse'schen Curve hat, und deren Gleichung aus denen der drei Kegelschnitte gebildet werden kann. Alle die geraden Linien der Paare von solchen endlich, welche durch die Gleichung

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0$$

dargestellt werden, berühren eine Curve dritter Classe, die Cayley'sche Curve der zuletzt erwähnten Curve dritter Ordnung.

254. Da insbesondere jeder der umhüllenden Kegelschnitte

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

und der entsprechend durch die vier Berührungspunkte desselben mit der Curve gehende Kegelschnitt in der Form

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0$$

enthalten sind, so folgt, dass die Schnittpunkte der drei Paare von Geraden, welche die Berührungspunkte der Enveloppe $UW = V^2$ mit einem der umhüllenden Kegelschnitte verbinden, auf einer festen Curve dritter Ordnung liegen, nämlich in der erwähnten Jacobi'schen Curve; indess die Geraden selbst sämmtlich von einer festen Curve dritter Classe, der Cayley'schen Curve berührt werden.

Wenn insbesondere die beiden Kegelschnitte

$$\lambda U + V = 0 \quad \text{und} \quad \lambda V + W = 0$$

einander berühren, so hat der Kegelschnitt

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0,$$

anstatt die Curve vierter Ordnung in vier verschiedenen Punkten zu berühren, eine zweifache gewöhnliche Berührung mit ihr und schneidet sie also in vier aufeinander folgenden

Punkten. Nach dem eben Entwickelten liegt dieser Punkt einer Berührung höherer Ordnung auf der Jacobi'schen Curve und es giebt zwölf Kegelschnitte in dem System

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0,$$

welche mit der Curve vierter Ordnung eine solche höhere Berührung eingehen; denn durch jeden der Schnittpunkte der Jacobi'schen Curve mit der Curve vierter Ordnung geht einer derselben.

255. Es giebt in dem System

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

sechs Kegelschnitte, welche sich auf gerade Linien reducieren, denn die Discriminante dieser Gleichung ist als Function vom dritten Grade in ihren Coefficienten vom sechsten in λ, so dass sechs Werthe von λ existieren, für die sie verschwindet. Wenn aber einer der umhüllenden Kegelschnitte in gerade Linien zerfällt, so liegen seine vier Berührungspunkte paarweis in den ihn bildenden Geraden und jede derselben ist somit eine Doppeltangente der Curve vierter Ordnung. Es erhellt dann aus Art. 248., dass für

$$a = 0,\ b = 0;\quad c = 0,\ d = 0$$

als die Ausdrücke von irgend zweien unter diesen sechs Paaren von Doppeltangenten die Gleichung der Curve vierter Ordnung in die Form

$$abcd = V^2$$

gebracht werden, welche aussagt, dass die acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $V = 0$ liegen. So sehen wir, dass die Form

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

sechs Paare von Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung einschliesst, welche zwölf Doppeltangenten sämmtlich eine Curve dritter Classe, die Cayley'sche Curve des Systems, berühren, während zugleich die Durchschnittspunkte der einzelnen Paare auf der Jacobi'schen Curve dritter Ordnung liegen; dass ferner die jedesmaligen beiden andern Paare der Verbindungslinien der Berührungspunkte je eines dieser Paare von Doppeltangenten die Cayley'sche Curve gleichfalls berühren und ihre Durchschnittspunkte auf der Jacobi'schen

Curve liegen. Man kann diess in etwas modificierter Form ausdrücken, wenn man von der Curve dritter Ordnung $S=0$ ausgeht, von welcher die Kegelschnitte

$$U=0,\ V=0,\ W=0$$

Polarkegelschnitte sind. Wenn dann die Gleichung einer Curve vierter Ordnung eine in U, V, W quadratische Function ist, so ergiebt sich daraus, dass das Verschwinden einer solchen Function die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Linie

$$x_1 U + x_2 V + x_3 W = 0$$

einen festen Kegelschnitt berührt, das Resultat, dass die Curve vierter Ordnung als der Ort eines Punktes definiert werden kann, dessen Polare in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung $S=0$ einen festen Kegelschnitt berührt; oder mit andern Worten, dass man sie als den Ort der Pole der Tangenten dieses festen Kegelschnitts in Bezug auf die Curve dritter Ordnung und endlich als die Enveloppe der Polarkegelschnitte der Punkte dieses festen Kegelschnitts in Bezug auf dieselbe auffassen kann. Dann entsprechen die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung den Punkten, in welchen dieser Kegelschnitt die Hesse'sche Curve von $S=0$ durchschneidet.

256. Wir betrachten nun irgend zwei unter den Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung als Fundamentallinien

$$x_1=0,\ x_2=0;$$

da für $x_1=0$ die Gleichung der Curve auf ein vollständiges Quadrat, sagen wir

$$(x_3^2 + a x_2 x_3 + b x_2^2)^2$$

und für $x_2=0$ auf ein anderes

$$(x_3^2 + c x_1 x_3 + d x_1^2)^2$$

reduciert werden muss, so schliessen wir, dass die Gleichung der Curve vierter Ordnung von der Form

$$x_1 x_2 U = (x_3^2 + a x_2 x_3 + b x_2^2 + c x_1 x_3 + d x_1^2)^2$$

ist, d. h. von der Form

$$x_1 x_2 U = V^2,$$

welche wir soeben discutiert haben. Wir können sie auch in die Form

$$x_1 x_2 (\lambda^2 U + 2\lambda V + x_1 x_2) = (x_1 x_2 + \lambda V)^2$$

setzen. Es giebt wie wir gesehen haben ausser dem Werthe $\lambda = 0$, welcher dem Paar $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ entspricht, fünf andere Werthe von λ, für welche

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + x_1 x_2 = 0$$

ein Paar von Geraden darstellt und man kann somit die Gleichung in fünf verschiedenen Arten auf die Form

$$x_1 x_2 x_3 x_1 = V^2$$

reducieren. Oder durch die vier Berührungspunkte von irgend zwei Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung können fünf Kegelschnitte beschrieben werden, von denen jeder durch die vier Berührungspunkte zweier andern Doppeltangenten geht.

Eine Curve vierter Ordnung ohne singuläre Punkte hat 28 Doppeltangenten und es giebt daher für sie $\frac{1}{2} \cdot 28.27 = 378$ Paare von Doppeltangenten; jedes dieser Paare giebt fünf verschiedenen Kegelschnitten den Ursprung, aber jeder derselben kann aus jedem der sechs verschiedenen Paare entspringen, welche die vier ihm entsprechenden Doppeltangenten erzeugen; es giebt also überhaupt $\frac{5}{6} \cdot 378$ oder 315 Kegelschnitte, von denen jeder durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung geht[50]).

257. Wir fanden, dass jedes Paar von Doppeltangenten mit fünf andern Paaren verbunden eine Gruppe von sechs Paaren bildet, für welche die Berührungspunkte von irgend zweien dieser Paare auf einem Kegelschnitt liegen und es folgt daraus, dass die 378 Paare in 63 solcher Gruppen von sechs zerfallen. Die zwölf Doppeltangenten jeder Gruppe berühren dieselbe Curve dritter Classe, und diese Curve wird auch von den geraden Linien berührt, welche direct und kreuzweis die vier Berührungspunkte jedes dieser Paare verbinden. Die Durchschnittspunkte der Doppeltangenten-

paare, und ebenso die der Paare der besagten Verbindungslinien liegen auf einer Curve dritter Ordnung. Jeder Gruppe entsprechen zwölf Kegelschnitte, von denen jeder mit der Curve vierter Ordnung eine zweifache Berührung erster Ordnung hat und sie überdiess in vier aufeinander folgenden Punkten schneidet; die zwölf Punkte dieser Berührung höherer Ordnung liegen gleichfalls in der erwähnten Curve dritter Ordnung. Es ist offenbar, dass aus den 63 Gruppen 756 solcher Kegelschnitte entspringen.

258. Um zu einer Uebersicht über die 315 Kegelschnitte zu gelangen, bezeichnen wir vorläufig die ersten 26 Doppeltangenten durch die Buchstaben unseres Alphabets und die letzten beiden durch die Buchstaben φ und ψ; wir repräsentieren auch den durch die acht Berührungspunkte der Doppeltangenten a, b, c, d gehenden Kegelschnitt durch $abcd$. Wenn dann $abcd$, $abef$ zwei der 315 Kegelschnitte sind, so gehören die Paare ab, cd, ef zu derselben Gruppe und nach dem Entwickelten ist $cdef$ ein anderer von ihren Kegelschnitten. Diess kann direct wie folgt bewiesen werden. Sei

$$abcd = V^2$$

die Gleichung der Curve vierter Ordnung oder in anderer Form

$$ab\,(cd + 2\lambda V + \lambda^2 ab) = (V + \lambda ab)^2,$$

so können wir λ so bestimmen, dass

$$cd + 2\lambda V + \lambda^2 ab = ef$$

wird; die Substitution des Werthes von V aus dieser Gleichung in die der Curve vierter Ordnung giebt

$$\lambda^4 a^2 b^2 + c^2 d^2 + e^2 f^2 - 2\lambda^2 abcd - 2\lambda^2 abef - 2cdef = 0$$

oder

$$4cdef = (cd + ef - \lambda^2 ab)^2,$$

eine Form, welche den ausgesprochenen Satz beweist. Man erkennt so, dass für drei gegebene Paare von geraden Linien als Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung von derselben Gruppe die Gleichung der Curve von der Form

$$l\sqrt{(ab)} + m\sqrt{(cd)} + n\sqrt{(ef)} = 0$$

sein muss, so dass für zwei weitere gegebene Punkte eine

einzige Curve vierter Ordnung gefunden werden könnte, die den vorgeschriebenen Bedingungen genügt.

Da jeder Gruppe fünfzehn Kegelschnitte entsprechen, welche respective durch die Berührungspunkte jeder zwei von den sechs Paaren der Gruppe hindurchgehen, so könnte es scheinen, dass 63. 15 = 945 derartige Kegelschnitte existieren; da aber jeder Kegelschnitt $abcd$ dabei dreifach gezählt ist, nämlich als den drei Gruppen

$$ab, cd, \ldots; \quad ac, bd, \ldots; \quad ad, bc, \ldots$$

angehörend, so kommt die Gesammtzahl der Kegelschnitte wie vorher zurück auf 315.

259. Betrachten wir nun irgend einen Kegelschnitt $abcd$, so können die Gruppen

$$ab, cd, \ldots \quad \text{und} \quad ac, bd, \ldots$$

keine andere Doppeltangente gemein haben, so lange die Curve vierter Ordnung ohne singuläre Punkte vorausgesetzt wird. Wenn also z. B. $abef$ ein Kegelschnitt der ersten Gruppe ist, so kann $aceg$ nicht ein Kegelschnitt der zweiten Gruppe sein. Denn nach Art. 257. kann der durch die Berührungspunkte von a, b, c, d gehende Kegelschnitt in der Form

$$\lambda ab + \frac{1}{\lambda}(cd - ef) = 0$$

ausgedrückt werden und wenn $aceg$ ein anderer Kegelschnitt wäre, so müsste diess mit

$$\mu ac + \frac{1}{\mu}(bd - eg) = 0$$

identisch sein. Aus dieser Identität wäre zu schliessen, dass

$$(\lambda b - \mu c)\left(a - \frac{1}{\lambda\mu} d\right) = e\left(\frac{1}{\lambda} f - \frac{1}{\mu} g\right)$$

sei und dass folglich e als identisch mit einem der Factoren, in welche die linke Seite zerfällt, entweder durch den Schnittpunkt von b und c oder durch den von a und c geht; in jedem dieser Fälle wäre aber der Punkt, durch welchen e gehen müsse, ein Doppelpunkt in der Curve

$$4\lambda^2 abcd = (\lambda^2 ab + cd - ef)^2,$$

und die Curve vierter Ordnung hätte also der Voraussetzung entgegen einen singulären Punkt. In genau demselben Wege

sehen wir, dass wenn *abcf*, *acmn* zwei der Kegelschnitte sind, eine Identität

$$(\lambda b - \mu c)\left(a - \frac{1}{\lambda\mu} d\right) = \frac{1}{\lambda} cf - \frac{1}{\mu} mn$$

besteht und dass also von den Diagonalen des Vierseits *cfmn* eine durch *ad* und die andere durch *bc* geht; d. h. die Durchschnittspunkte der Paare der Doppeltangenten liegen nach einer bestimmten Regel zu drei in einer Geraden.

Wenn ein Schema der 315 Kegelschnitte gemacht wäre, so hat die Unterscheidung keine Schwierigkeit, welche der Diagonalen durch *ad* und welche durch *bc* geht; z. B. wenn erkannt ist, dass

acmu, *afnv* und *aduv*

Kegelschnitte des Systems sind, so erkennen wir in derselben Art, wie vorher, dass die Diagonalen des Vierseits *cmfn* durch *ad* und *uv* gehen und erfahren also, dass *ad* in der geraden Verbindung von *cn*, *fm* liegt. Betrachten wir dann einen Kegelschnitt *abcd*, so gehört derselbe zu den drei Gruppen

ab, *cd*, . . ; *ac*, *bd*, . . ; und *ad*, *bc*, . .

und jedes der sechszehn Vierseite, welche man erhält, indem man eines der vier andern Paare der Gruppe *ac*. *bd* mit einem der Paare aus der Gruppe *ad*, *bc* combiniert, hat eine durch *ab* gehende Diagonale. Nun gehört das Paar *ab* zu fünf verschiedenen Kegelschnitten und es giebt somit 80 Vierseite, welche eine durch *ab* gehende Diagonale besitzen. Aber man findet, dass diese Vierseite in Paare getheilt werden, welche eine Diagonale gemein haben und es gehen deshalb durch jeden der 378 Punkte *ab* 40 Gerade, von denen jede durch zwei andere unter denselben Punkten geht und deren Gesammtzahl somit gleich 5040 ist.

260. Wir sind nun in der Lage, ein Schema der 315 Kegelschnitte aufzustellen, in welchem nur die Bezeichnung willkürlich ist. Beginnen wir mit der Aufschreibung der Gruppe

ab, *cd*, *ef*, *gh*, *ij*, *kl*,

so können die Gruppen

ac, *bd* und *ad*, *bc*,

weil sie weder mit einander noch mit der vorigen Gruppe eine Doppeltangente gemein haben können, geschrieben werden:

$$ac, bd, mn, op, qr, st; \quad ad, bc, uv, wx, yz, \varphi\psi.$$

Um sodann die Gruppe ae, bf zu bilden, erinnern wir, dass dieselbe keine Doppeltangente aus der Gruppe ab enthalten kann, dass aber in jedem ihrer Paare eine der Doppeltangenten aus der Gruppe ac mit einer aus der Gruppe ad combiniert sein muss. Da nun die Bezeichnung der Paare dieser Gruppen in unserem Belieben stand, so ist es gleichfalls nur Sache der Bezeichnung und schliesst nicht irgend eine geometrische Bedingung ein, wenn wir diese Gruppen in der Form

$$ae, bf, mu, ow, qy, s\varphi$$

schreiben. Ebenso ist es nur Sache der Bezeichnung, wenn wir voraussetzen, dass die Doppeltangenten so bezeichnet seien, dass

$$ag \text{ und } mx, \quad ai \text{ und } mz, \quad ak \text{ und } m\psi$$

respective zur nämlichen Gruppe gehören sollen. Wenn also diess vorausgesetzt wird, so findet man, dass die Gruppe af, bc nothwendig ist

$$uv, px, rz, t\psi$$

und kann so Schritt für Schritt zur Bildung des ganzen Systems gelangen. Eine Tafel der 315 Kegelschnitte mitzutheilen, erscheint nicht mehr nöthig, seit Hesse einen Algorithmus angegeben und Cayley denselben eingehend discutiert hat, der in einer leicht erkennbaren Weise die gegenseitigen Beziehungen der 28 Doppeltangenten ausdrückt [51]). Hesse's Methode führt auf Betrachtungen aus der Geometrie von drei Dimensionen. Er vergleicht mit Null die Discriminante von

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0$$

für

$$U = 0, \; V = 0, \; W = 0$$

als die Gleichungen von drei Flächen zweiten Grades; da dieselbe eine Function vom vierten Grade in den y_i ist, so be-

zeichnet ihr Verschwinden eine ebene Curve vierter Ordnung, wenn man die y_i als Veränderliche betrachtet. Für jede Werthgruppe der y_i, für welche die Discrminante verschwindet, ist aber

$$y_1 U + y_2 V + y_3 W = 0$$

die Gleichung eines Kegels vom zweiten Grade, so dass jeder Punkt der ebenen Curve vierter Ordnung einem Punkt im Raume, nämlich dem Scheitel dieses Kegels entspricht; und Hesse's Methode verbindet die Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung mit den geraden Verbindunglinien der acht Punkte des Raumes, welche die Schnittpunkte von drei Flächen zweiten Grades sind [52]). Wir wollen nur die Bezeichnung benutzen, welche Hesse's Methode darbietet, aber von Sätzen aus der Geometrie des Raumes keinen Gebrauch machen.

261. Die Combination der acht Zeichen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

in Paaren giebt uns 28 Symbole

$$12, 13, \ldots . . 78,$$

welche wir zur Bezeichnung der 28 Doppeltangenten benutzen. Diese Bezeichnung erlaubt, die geometrischen Beziehungen der 28 Doppeltangenten auszudrücken, während sie freilich die Symmetrie des ganzen Systems nicht darstellt, weil erwartet werden möchte, dass die Doppeltangente 12 in anderer Weise mit den Doppeltangenten 13, 14, etc. als mit 34, 56, etc. verbunden sei, während in der That keinerlei Unterschied zwischen den geometrischen Beziehungen der verschiedenen Paare besteht. Wir setzen die Zeichen aber so gebraucht voraus, dass 12, 34, 56, 78 vier Doppeltangenten bezeichnen, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen und dass jede Gruppe von vier Doppeltangenten dieselbe Eigenschaft habe, deren vier Doppeltangenten sämmtliche acht Zeichen enthalten. Die Zählung ergiebt aber sofort, dass nur 105 Anordnungen der 8 Zeichen in Reihen wie 12, 34, 56, 78 möglich sind und dass daher die übrigen 210 Kegelschnitte, welche vier Doppeltangenten entsprechen, nicht in dieser Weise dargestellt werden können.

Wir bilden ihre Symbole so, dass die Zeichenpaare aus irgend einer Anordnung von vier der acht Zeichen cyclisch geordnet sind, wie z. B. 12, 23, 34, 41; es lassen sich in der That 210 solcher Tetraden aufstellen.

Dann besteht die zu dem Paar 12, 34 gehörende Gruppe aus

56, 78; 57, 68; 58, 67; 13, 24; 14, 23

und die zu einem Paare wie 12, 13 gehörige aus

24, 34; 25, 35; 26, 36; 27, 37; 28, 38.

In dieser Weise wird die Vereinigung der Doppeltangenten in Gruppen durch die Bezeichnung vollständig angegeben. Es könnte aber erwartet werden, dass die 105 Kegelschnitte von der Form

12, 34, 56, 78

in ihren Eigenschaften von den 210 Kegelschnitten der Form

12, 23, 34, 41

abweichen, während diess in der That nicht der Fall ist und vielmehr die 315 Tetraden ein untrennbares System bilden.

262. Aus den Untersuchungen von Hesse hat Cayley die folgende allgemeine Regel gezogen: Eine zweiseitige Substitution lässt die geometrischen Beziehungen der durch irgend eine Reihe von Symbolen dargestellten Doppeltangenten ungeändert. Wenn wir ein Substitutionssymbol wie 1234. 5678 bilden, so bezeichnet eine zweiseitige Substitution irgend welche Vertauschung der Paare

12, 34; 13, 24; 14, 23

und der Paare

56, 78; 57, 68; 58, 67,

bei unveränderter Belassung solcher Paare wie 15, 36, in denen ein Zeichen der ersten Gruppe von vieren mit einem der zweiten Gruppe verbunden ist. Die Zahl solcher zweiseitigen Substitutionen ist 35 und wenn wir die unveränderte Belassung aller Paare einschliessen 36.

Wenn wir z. B. die zweiseitige Substitution 1234. 5678 auf das Paar 12, 34 anwenden, so erhalten wir dasselbe Paar in entgegengesetzter Ordnung; aus 12, 13 erhalten wir

34, 24, ein Paar von dem nämlichen Typus mit 12, 13; aus 12, 15 entsteht 34, 15, ein Paar von scheinbar verschiedenem Typus, aber nicht vom ursprünglichen verschieden in geometrischer Hinsicht. Wenn wir also dieselbe zweiseitige Substitution auf die Tetrade 15, 67, 28, 34, d. i. eine der 105 ersten anwenden, so entsteht

$$15,\ 58,\ 82,\ 21,$$

eine der 210 zweiten, die also nach der Regel die nämlichen geometrischen Eigenschaften besitzt.

263. Die folgende Tabelle über die geometrischen Beziehungen der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung ist von Cayley gegeben worden

Geometrisches Zeichen.	Repräsentierendes Glied.	Zahl der Glieder.		Geometrischer Charakter.
I	12.	28	28	Doppeltangenten.
V	12. 13.	168	378	Paare von Doppeltangenten.
II	12. 34.	210		
⊔	12. 23. 34.	840	1260	Triaden von Doppeltangenten, deren 6 Berührungspunkte einem Kegelschnitt angehören.
III	12. 34. 56.	420		
Δ	12. 23. 31.	56		Triaden, deren 6 Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen.
VI	12. 23. 45.	1680	2016	
ψ	12. 23. 14.	280	3276	
IIII	12. 34. 56. 78.	105	315	Tetraden von Doppeltangenten, deren 8 Berührungspunkte in einem Kegelschnitte liegen.
□	12. 23. 34. 41.	210		
IIV	12. 34. 56. 67.	2520		Tetraden von Doppeltangenten, für welche 6 der 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.
I⊔	12. 34. 45. 56.	5040		
LΓ	12. 23. 34. 45.	3360	15120	
Δ/	12. 23. 31. 14.	840		
ψ\	12. 13. 14. 45.	3360		
IΔ	12. 34. 45. 53.	560		Tetraden von Doppeltangenten, für welche keine 6 der 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt gelegen sind.
ψ∟	12. 13. 14. 15.	280	5040	
Iψ	12. 34. 35. 36.	168		
VV	12. 13. 45. 46.	2520	20475	

Die beigefügten geometrischen Zeichen setzen voraus, dass die Zeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 als Punkte betrachtet werden und dass jedes Paar derselben durch eine die zwei entsprechenden Punkte verbindende Gerade angezeigt wird. So ist △ das Symbol für das Glied 12. 23. 31. Mit Hilfe dieser Bezeichnung können wir sogleich übersehen, dass das Symbol irgend einer Gruppe in dem System von 15120 Gliedern eines der Symbole |||, ⊔ enthalten muss, d. h. dass unter den 8 Berührungspunkten der Doppeltangenten einer Gruppe immer 6 sind, welche auf einem Kegelschnitt liegen; während dagegen in den geometrischen Zeichen der Gruppen des Systems von 5040 Gruppen der letzten Art die Zeichen |||, ⊔ nicht als Theile auftreten.

In demselben Sinne können dann die folgenden beiden Gruppen von Hexaden von Doppeltangenten aufgestellt und bezeichnet werden.

Geometrisches Zeichen.	Repräsentierendes Glied.	Zahl der Glieder.	
△ △	12. 23. 31. 45. 56. 64.	280	1008
I Ѱ	12. 34. 35. 36. 37. 38.	168	
∨ ∨	12. 13. 14. 56. 57. 58.	560	
⧄	12. 23. 31. 14. 45. 51.	840	5040
⬭	12. 23. 34. 45. 56. 61.	1680	
I ∨∨	12. 34. 35. 36. 67. 68.	2520	

Es sind die 1008 und 5040 Hexaden, welche von Hesse und Steiner als solche Doppeltangenten studiert worden sind, deren jedesmal zwölf Berührungspunkte auf einer eigentlichen Curve dritter Ordnung liegen, indess für die erste Reihe derselben keine sechs derselben auf einem Kegelschnitt liegen, während für die Letzteren die zwölf Berührungspunkte in zwei Gruppen von sechs auf je einem Kegelschnitt zerfallen. Es ist hinzuzufügen, dass die sechs Tangenten jeder der 1008 Hexaden des ersten Systems denselben Kegelschnitt berühren, wie es aus Aronhold's in den folgenden Artikeln darzustellenden Untersuchungen sich ergeben hat; während die sechs Tangenten einer jeden unter den 5040 Hexaden

des zweiten Systems in drei Paare so zerfallen, dass ihre drei Durchschnittspunkte in einer geraden Linie liegen, wie es aus Art. 259. sich ergiebt.

264. Aronhold[53]) hat bewiesen, dass für sieben willkürlich gegebene gerade Linien eine Curve vierter Ordnung gefunden werden kann, die dieselben zu Doppeltangenten hat und dass deren andere Doppeltangenten durch lineare Constructionen bestimmbar sind. Die Methode der Untersuchung geht von den Eigenschaften eines Systems von Curven dritter Clase aus, welche sieben gemeinschaftliche Tangenten besitzen und es erscheint daher zweckmässig hier zuerst die Eigenschaften des dem Leser vertrauteren reciproken Systems, des Systems von Curven dritter Ordnung durch sieben feste Punkte zusammenzustellen.

1. Betrachten wir irgend eine Curve des Systems, so geht die gerade Linie, welche ihren achten und neunten Schnittpunkt mit irgend einer andern Curve desselben verbindet, durch einen festen Punkt der ersteren, nämlich den beigeordneten Rest der sieben gegebenen Punkte in derselben. (Art. 161.)

2. Durch einen willkürlich angenommenen Punkt 8 kann eine und nur eine Curve dritter Ordnung beschrieben werden, in welcher dieser Punkt der beigeordnete Rest der sieben gegebenen Punkte ist. Denn alle Curven des Systems, welche diese acht Punkte enthalten, gehen durch einen festen neunten Punkt, und nach der Definition ist der in Rede stehende beigeordnete Rest der Punkt, in welchem die Verbindungslinie von 8 und 9 die Curve ferner schneidet. Wenn also der beigeordnete Rest mit dem Punkte 8 zusammenfällt, so muss die Curve dritter Ordnung die gerade Linie zu ihrer Tangente im Punkte 8 haben.

3. Es giebt vier Curven im System, welche eine gegebene Curve des Systems berühren, und die zugehörigen Berührungspunkte sind die Berührungspunkte der Tangenten, welche von dem beigeordneten Restpunkt in ihr an die gegebene Curve gehen.

4. Wenn die Punkte 8 und 9 zusammenfallen, d. h. wenn Curven dritter Ordnung, welche dem System angehören, einander berühren, so ist die Enveloppe der gemeinschaft-

lichen Tangente 89 eine Curve vierter Classe, weil durch einen angenommenen Punkt P im Allgemeinen vier solcher Geraden gehen. In der That, setzen wir eine Curve dritter Ordnung durch P und die Punkte 8, 9 voraus, so ist nach der Definition P der beigeordnete Rest der Fundamentalpunkte in derselben und diese Curve ist daher nach 2., weil sie P zum beigeordneten Restpunkt hat, eine bekannte Curve dritter Ordnung; dann aber folgt aus 3., dass die vier von P aus an diese Curve gehenden Tangenten zur fraglichen Enveloppe gehören, dass also die vier vom Punkte P ausgehenden Tangenten derselben durch die Aufsuchung der Curve dritter Ordnung im System bestimmt werden, welche diesen Punkt P zu ihrem beigeordneten Rest hat.

5. Der Punkt P ist ein Punkt der fraglichen Enveloppe, wenn zwei der von ihm ausgehenden Tangenten derselben zusammenfallen; es ergiebt sich aber aus der eben angegebenen Construction, dass diess nur dann geschehen kann, wenn die Curve dritter Ordnung, welche diesen Punkt zum beigeordneten Reste hat, einen Doppelpunkt besitzt. Diese Enveloppe kann daher auch als der Ort der beigeordneten Reste des gegebenen Systems von Punkten in denjenigen Curven des Systems bezeichnet werden, welche einen Doppelpunkt haben.

6. Wenn die durch die sieben Punkte gehende Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt durch fünf derselben und eine gerade Linie durch die beiden übrigen zerfällt, so hat sie die beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Geraden zu Doppelpunkten. Jede andere Curve des Systems schneidet diese zusammengesetzte Curve desselben in zwei weiteren Punkten, von denen einer auf der erwähnten Geraden und einer auf dem Kegelschnitt liegt, so dass der beigeordnete Rest der Punkt P ist, in welchem die Verbindungslinie dieser beiden Punkte den Kegelschnitt zum zweiten male schneidet. In diesem Falle ist P ein Doppelpunkt und die beiden Tangenten in ihm sind die Geraden, welche ihn mit den Durchschnittspunkten der geraden Linie und des Kegelschnitts verbinden. Es können aber sieben Punkte in einundzwanzig verschiedenen Arten in zwei Gruppen von zwei und fünf Punkten vertheilt werden. Die betrachtete Curve vierter Classe enthält daher 21 Doppelpunkte, und

zwar einen solchen in jedem der 21 Kegelschnitte, welche durch je fünf der gegebenen Punkte bestimmt sind.

7. Ausserdem sind die sieben gegebenen Punkte selbst Doppelpunkte derselben Curve; denn durch jede sechs der gegebenen Punkte lässt sich eine Curve dritter Ordnung beschreiben, welche den siebenten von ihnen zum Doppelpunkt hat und man erkennt leicht, dass derselbe Doppelpunkt der beigeordnete Rest des Systems für diese Curve ist. Die vier von ihm an die Curve dritter Ordnung gehenden Tangenten reducieren sich auf zwei Paare von zusammenfallenden, nämlich die Tangenten der beiden Aeste der Curve im Doppelpunkt.

Die Enveloppe vierter Classe hat somit 28 Doppelpunkte, von denen sieben in den gegebenen Punkten liegen, während zugleich ihre Tangenten in denselben die Tangenten der respectiven Curven dritter Ordnung sind, welche dem System angehören und den fraglichen Punkt zum Doppelpunkt haben.

265. Die Eigenschaften des Systems von Curven dritter Classe mit sieben gemeinsamen Tangenten folgen hieraus nach dem Princip der Reciprocität. Für irgend eine Curve des Systems durchschneiden sich dann

1. Die Tangenten, die sie mit einer andern Curve desselben gemein hat, in einer festen Tangente der gewählten Curve, die als der beigeordnete Rest der sieben gegebenen Tangenten in Bezug auf diese Curve bezeichnet werden kann.

2. Für jede beliebige Gerade giebt es eine Curve des Systems, in Bezug auf welche diese Gerade der beigeordnete Rest der sieben festen Tangenten ist.

3. Jede feste Curve des Systems wird durch vier andere Curven desselben berührt, und die zugehörigen Berührungspunkte sind die vier Punkte, in welchen die beigeordnete Resttangente die Curve ferner schneidet; ihre Zahl ist vier, weil die Curve als eine allgemeine Curve dritter Classe von der sechsten Ordnung ist.

4. Der Ort der Punkte, in welchen zwei Curven des Systems einander berühren, ist eine Curve vierter Ordnung, weil die Punkte, in denen eine angenommene gerade Linie

diesen Ort schneidet, die vier Punkte sind, die sie mit derjenigen Curve dritter Classe ausser dem Berührungspunkte gemein hat, für welche sie der beigeordnete Rest der sieben festen Tangenten ist.

5. Wenn die Curve dritter Classe eine Doppeltangente hat, so berührt die ihr entsprechende beigeordnete Resttangente den bezeichneten Ort in demjenigen Punkte, wo sie die Doppeltangente schneidet.

6. Wenn die Curve aus einem Kegelschnitt mit fünf der gegebenen Geraden als Tangenten und einem Punkte, nämlich dem Schnittpunkt der beiden letzten Geraden, besteht, so ist die beigeordnete Restgerade für diess System eine Doppeltangente des Ortes. Es giebt 21 solcher Doppeltangenten.

7. Zu diesen kommen die sieben gegebenen Geraden selbst als Doppeltangenten des Ortes hinzu; ihre Berührungspunkte mit ihm sind dieselben Punkte, in denen jede von ihnen die Curve dritter Classe berührt, welche dem System angehört und sie zur Doppeltangente hat.

Da so die Berührungspunkte der gegebenen sieben Geraden mit der Curve vierter Ordnung gegeben sind, so kennt man vierzehn Punkte derselben, welche allein sie vollständig bestimmen; und es giebt also nur eine Curve vierter Ordnung, welche diesen Bedingungen genügt. Wir bemerken aber, dass mehrere Curven vierter Ordnung möglich sind, welche sieben gegebene Gerade zu Doppeltangenten haben; aber keine andere als die hier definierte, für welche diese sieben Tangenten unverbunden sind durch Zusammengehörigkeit von irgend dreien unter ihnen zu einer Gruppe.

266. Man kann nun weiter, wie gesagt, aus den sieben gegebenen Doppeltangenten die übrigen durch lineare Constructionen finden, nämlich jede durch einmalige Anwendung des Satzes von Brianchon. Denn wir haben nur die beigeordnete Resttangente für jedes der Systeme 12345 . 67, etc. zu ermitteln, wenn wir durch 12345 den Kegelschnitt bezeichnen, welchen die fünf ersten der sieben Geraden bestimmen, und durch 67 den Durchschnittspunkt der beiden letzten unter ihnen. Die beiden Systeme

12345 . 67 und 12346 . 57

haben aber sieben gemeinsame Tangenten und die beiden letzten gemeinsamen Tangenten derselben sind die Tangenten der Kegelschnitte 12345 und 12346 aus den Punkten 57, 67 respective, welche man beide nach dem Brianchon'schen Satze linear bestimmt. Von ihrem Durchschnittspunkte aus geht noch eine wieder nach demselben Satze linear zu bestimmende Tangente an den Kegelschnitt 12345 und eine an den Kegelschnitt 12346 und diese sind die fraglichen beigeordneten Reste und daher zwei der übrigen Doppeltangenten.

Oder wir bestimmen für die drei Systeme

12345 . 67; 12346 . 57; 12347 . 56

in der eben beschriebenen Art die achte und neunte Tangente, welche jedem Paar derselben gemeinsam sind, und erhalten durch die geraden Verbindungslinien der drei Schnittpunkte dieser Paare drei der fraglichen übrigen Doppeltangenten.

Wir können aber die Doppeltangente, welche der beigeordnete Rest des Systems 12345 . 67 ist, als die Doppeltangente 67 bezeichnen und somit die einundzwanzig Doppeltangenten der Betrachtung durch Combination der Zeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 darstellen. Dazu treten dann die sieben gegebenen Linien selbst und wenn wir, der Symmetrie wegen ein neues Zeichen 8 hinzufügend, sie durch

18, 28, 38, 48, 58, 68, 78

bezeichnen, so sind wir durch die Methode von Aronhold zu dem Algorithmus von Hesse geführt.

267. Der Durchschnittspunkt der achten und neunten Tangente, welche irgend zwei Curven des Systems gemeinschaftlich sind, ist ein Punkt, durch den die beigeordnete Resttangente für jede dieser Curven geht. Betrachten wir dann die zusammengesetzten Systeme dritter Ordnung

12 . 34567; 34 . 12567,

so ist die Verbindungslinie der Punkte 12, 34 eine ihrer gemeinsamen Tangenten, d. h. in dem eben wieder gewonnenen und früher ausführlich behandelten Algorithmus die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte

18, 28 und 38, 48.

Und wir sehen nun, dass diese Gerade durch den Schnitt-

punkt der beigeordneten Reste der bezeichneten Systeme geht, d. h. durch den Punkt 12, 34. Somit erhalten wir den im Art. 259. bewiesenen Satz wieder, dass die Durchschnittspunkte der Paare

$$18,\ 28;\ 38,\ 48;\ 12,\ 34$$

in einer geraden Linie liegen. Und Art. 262. zeigt dann, dass wir durch eine gewöhnliche oder zweiseitige Substitution 5040 gerade Linien finden können, die die nämliche Eigenschaft besitzen.

268. Die algebraische Untersuchung, welche Aronhold von der so erzeugten Curve vierter Ordnung gegeben hat, ist im Wesentlichen die folgende. Wir denken Liniencoordinaten ξ_i angewendet und bezeichnen durch u, v, w irgend welche lineare Functionen derselben

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3, \text{ etc.};$$

dann repräsentieren die Gleichungen

$$\xi_2 v - \xi_3 w = 0, \quad \xi_3 w - \xi_1 u = 0, \quad \xi_1 u - \xi_2 v = 0$$

drei Kegelschnitte derselben Schaar oder mit vier gemeinsamen Tangenten und von denen jeder eine der Seiten des Fundamentaldreiecks berührt. Ferner repräsentieren

$$\xi_1(\xi_2 v - \xi_3 w) = 0, \ \xi_2(\xi_3 w - \xi_1 u) = 0 \ \text{ und } \ \xi_3(\xi_1 u - \xi_2 v) = 0$$

drei Curven dritter Classe mit sieben gemeinschaftlichen Tangenten, nämlich den vier gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte und den Seiten des Fundamentaldreiecks. Dann kann jede andere Curve dritter Classe mit denselben sieben gemeinsamen Tangenten in der Form

$$u'\xi_1(\xi_2 v - \xi_3 w) + v'\xi_2(\xi_3 w - \xi_1 u) + w'\xi_3(\xi_1 u - \xi_2 v) = 0$$

dargestellt werden, in welcher u', v', w' willkürliche Constanten sind, die wir von der Form

$$a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\xi_3', \ldots$$

voraussetzen für ξ_i' als die Coordinaten einer beliebigen Geraden. Wenn wir die vorige Gleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} u, & u', & \xi_2\xi_3 \\ v, & v', & \xi_3\xi_1 \\ w, & w', & \xi_1\xi_2 \end{vmatrix} = 0$$

schreiben, so erkennen wir, dass dieselbe durch die Coordinatenwerthe ξ_1', ξ_2', ξ_3' befriedigt wird, welche somit die Coordinaten einer Tangente dieser Curve sind. Diese Tangente ist aber zugleich der beigeordnete Rest des Systems für die betrachtete Curve. Denn wir finden die beiden andern Tangenten derselben, die von irgend einem Punkte dieser Linie ausgehen, indem wir in die Gleichung für die ξ_i die

$$\lambda \xi_i' + \mu \xi_i''$$

substituieren; die entstehende Gleichung ist durch μ theilbar und wird nach der Division

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} u', & u'', & \xi_2'\xi_3' \\ v', & v'', & \xi_3'\xi_1' \\ w', & w'', & \xi_1'\xi_2' \end{vmatrix} + \lambda\mu \begin{vmatrix} u', & u'', & \xi_2'\xi_3'' + \xi_2''\xi_3' \\ v', & v'', & \xi_3'\xi_1'' + \xi_3''\xi_1' \\ w', & w'', & \xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2' \end{vmatrix}$$
$$+ \mu^2 \begin{vmatrix} u', & u'', & \xi_2''\xi_3'' \\ v', & v'', & \xi_3''\xi_1'' \\ w', & w'', & \xi_1''\xi_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Symmetrie dieser Gleichung zeigt aber, dass diese Tangentenpaare dieselben sind, die vom Durchschnittspunkt der Geraden ξ_i', ξ_i'' an die beiden Curven

$$\begin{vmatrix} u, & u', & \xi_2\xi_3 \\ v, & v', & \xi_3\xi_1 \\ w, & w', & \xi_1\xi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u, & u'', & \xi_2\xi_3 \\ v, & v'', & \xi_3\xi_1 \\ w, & w'', & \xi_1\xi_2 \end{vmatrix} = 0$$

gezogen werden. Daher sind die Tangenten ξ_i', ξ_i'' als die respectiven dritten Tangenten jeder Curve aus dem Schnittpunkt ihrer gemeinschaftlichen achten und neunten Tangente nach der Definition die beigeordneten Resttangenten.

Die beiden betrachteten Curven berühren einander, wenn die quadratische Gleichung in $\lambda : \mu$ gleiche Wurzeln hat, oder mit der Abkürzung P, Q, R für die drei Coefficienten dieser Gleichung, wenn

$$Q^2 = 4PR$$

ist. Bezeichnen wir aber die Minoren der vorigen Determinanten

$$v'w'' - v''w', \quad w'u'' - w''u', \quad u'v'' - u''v',$$

weil sie den Elementen

$$\xi_2\xi_3, \quad \xi_3\xi_1, \quad \xi_1\xi_2$$

respective entsprechen, nach der Reihe durch

$$X_1,\ X_2,\ X_3,$$

so haben wir

$$\begin{aligned}
P &\equiv \xi_2'\xi_3'X_1 + \xi_3'\xi_1'X_2 + \xi_1'\xi_2'X_3,\\
Q &\equiv (\xi_2'\xi_3''+\xi_2''\xi_3')X_1 + (\xi_3'\xi_1''+\xi_3''\xi_1')X_2 + (\xi_1'\xi_2''+\xi_1''\xi_2')X_3,\\
R &\equiv \xi_2''\xi_3''X_1 + \xi_3''\xi_1''X_2 + \xi_1''\xi_2''X_3.
\end{aligned}$$

Wir können dann

$$\xi_k'\xi_l'' - \xi_k''\xi_l'$$

als die Punktcoordinaten x_i des Durchschnittspunktes der beiden Geraden ξ_i', ξ_i'' betrachten und erkennen so, dass die Gleichung

$$Q^2 = 4PR$$

äquivalent ist mit

$$x_1^2X_1^2 + x_2^2X_2^2 + x_3^2X_3^2 - 2x_2x_3X_2X_3 - 2x_3x_1X_3X_1 - 2x_1x_2X_1X_2 = 0$$

oder

$$\sqrt{(x_1X_1)} + \sqrt{(x_2X_2)} + \sqrt{(x_3X_3)} = 0.$$

Wenn wir endlich in die Unterdeterminanten X_i für die

$$u', \ldots, u'', \ldots$$

ihre Werthe

$$\begin{aligned}
u' &= a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\xi_3',\\
v' &= a_1'\xi_1' + a_2'\xi_2' + a_3'\xi_3',\\
w' &= a_1''\xi_1' + a_2''\xi_2' + a_3''\xi_3',\\
u'' &= a_1\xi_1'' + a_2\xi_2'' + a_3\xi_3'',\\
v'' &= a_1'\xi_1'' + a_2'\xi_2'' + a_3'\xi_3'',\\
w'' &= a_1''\xi_1'' + a_2''\xi_2'' + a_3''\xi_3''
\end{aligned}$$

einsetzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
X_1 &= (a_2'a_3'' - a_2''a_3')x_1 + (a_3'a_1'' - a_3''a_1')x_2 + (a_1'a_2'' - a_1''a_2')x_3,\\
X_2 &= (a_2''a_3 - a_2a_3'')x_1 + (a_3''a_1 - a_3a_1'')x_2 + (a_1''a_2 - a_1a_2'')x_3,\\
X_3 &= (a_2a_3' - a_2'a_3)x_1 + (a_3a_1' - a_3'a_1)x_2 + (a_1a_2' - a_1'a_2)x_3.
\end{aligned}$$

Somit repräsentieren die

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$$

bekannte gerade Linien, nämlich die Seiten des Dreiecks, dessen Ecken durch

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0$$

dargestellt sind. Wir bemerken endlich, dass die Coefficien-

ten in X_1, X_2, X_3 die Elemente der Reciprocal-Determinante oder des adjungierten Systems von der Determinante sind, welche die Coefficienten von u, v, w bilden, so dass, wenn die X_i ursprünglich gegeben waren, die u, v, w durch analoge Formeln gefunden werden könnten.

269. Dieselbe Untersuchung gilt auch für

$$l\xi_1 u = m\xi_2 v = n\xi_3 w$$

als die Gleichungen der drei Kegelschnitte. Man erhält die Werthe von X_1, X_2, X_3 in derselben Art wie vorher, aber es wird

$$P = mn\xi_2'\xi_3' X_1 + nl\xi_3'\xi_1' X_2 + lm\xi_1'\xi_2' X_3, \text{ etc.};$$

und die Gleichung der Curve vierter Ordnung wird

$$\sqrt{(mnx_1 X_1)} + \sqrt{(nlx_2 X_2)} + \sqrt{(lmx_3 X_3)} = 0.$$

Diess ist die allgemeinste Gleichung einer Curve vierter Ordnung, welche drei gegebene Paare von Geraden x_1, X_1; etc. als Doppeltangentenpaare derselben Gruppe besitzt. Die Constanten b_1, b_2, b_3 werden vollständig bestimmt, wenn eine siebente Doppeltangente gegeben wird; denn die von den Coordinaten dieser letzten Doppeltangente zu erfüllenden Gleichungen

$$l\xi_1' u' = m\xi_2' v' = n\xi_3' w'$$

bestimmen mn, nl, lm als den Grössen

$$\xi_1' u', \ \xi_2' v', \ \xi_3' w'$$

proportional. Daher können wir, wenn verlangt ist, eine Curve vierter Ordnung mit sieben gegebenen Geraden als Doppeltangenten zu beschreiben, ausser der in Art. 266. bestimmten einen Curve, für welche keine zwei der gegebenen Doppeltangenten derselben Gruppe angehören, 7. 15, d. h. 105 andere Curven vierter Ordnung nach der Methode dieses Artikels construieren, indem wir irgend eine der sieben Geraden ausscheiden und die sechs übrigen in drei Paare gruppieren, was bekanntlich in 15 verschiedenen Arten möglich ist.

270. Ausser in Bezug auf die Doppeltangenten ist die Theorie der Curven vierter Ordnung ohne singuläre Punkte noch wenig studiert und wir wollen, was wir sonst noch darüber mitzutheilen haben, auf den Abschnitt von den In-

varianten und Covarianten versparen. Um die Theorie der Doppeltangenten zu vervollständigen, müssten wir die Modificationen untersuchen, welche diese Theorie erfährt, wenn die Curve einen Doppelpunkt oder mehrere Doppelpunkte besitzt. Aber dem Falle, in welchem eine Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt hat, ist nicht besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden, und wir wollen ihn hier nicht erörtern [54]). Dagegen sind die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, in dem Falle, wo diese die unendlich fernen Kreispunkte sind, dem Falle der bicircularen Curven vierter Ordnung, in ausgedehnterer Art untersucht worden [55]) und es sollen einige der wichtigsten der erhaltenen Resultate mitgetheilt werden. Natürlich können die für diese Curven gefundenen projectivischen Eigenschaften als Eigenschaften der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten ausgesprochen und bewiesen werden; wir finden es aber passend, mehrere von ihnen in ihrer ursprünglichen Form zu geben, da der Leser keiner Schwierigkeit in ihrer Verallgemeinerung begegnen wird. Curven vierter Ordnung, welche die unendlich fernen Kreispunkte zu Spitzen haben, sind unter dem Namen der Cartesischen Ovalen gleichfalls viel studiert worden [56]) und ihre Eigenschaften können ebenso verallgemeinert und als Eigenschaften von Curven vierter Ordnung mit zwei Spitzen ausgesprochen werden. Wenn eine Curve vierter Ordnung den einen der Kreispunkte zum Doppelpunkt und den andern zur Spitze haben soll, so kann sie nicht reell sein; in Folge dessen ist dieser Fall wenig studiert worden und wir haben über die Eigenschaften der Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt und einer Spitze nur wenig mitzutheilen.

271. Aus jedem der beiden Doppelpunkte einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten gehen nach Art. 79. vier Tangenten an die Curve und wir werden jetzt beweisen, dass die Doppelverhältnisse dieser beiden Büschel von vier Tangenten einander gleich sind.

Die allgemeine Gleichung einer Curve vierter Ordnung, welche die Fundamentalpunkte in der Geraden $x_3 = 0$, also ihre Schnittpunkte mit den Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zu Doppelpunkten hat, ist

$$x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (l x_1 + m x_2)$$
$$+ x_3^2 (a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 + 2 f x_2 x_3 + 2 g x_3 x_1 + 2 h x_1 x_2) = 0;$$

und die Paare der Tangenten dieser Curve in den Doppelpunkten sind durch

$$x_1^2 + 2 m x_1 x_3 + b x_3^2 = 0, \quad x_2^2 + 2 l x_2 x_3 + a x_3^2 = 0$$

gegeben. Wir vermindern die Allgemeinheit nicht, indem wir $b_1 = b_2 = 0$ setzen, weil wir damit als die Geraden $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ nur die Geraden wählen, welche zu der Verbindungslinie der Doppelpunkte $x_3 = 0$ in Bezug auf das jedesmalige Tangentenpaar harmonisch conjugiert sind. Wenn wir aber nun die Gleichung der Curve in der Form

$$x_2^2 (x_1^2 + b x_3^2) + 2 x_2 x_3^2 (f x_3 + h x_1)$$
$$+ x_3^2 (a x_1^2 + 2 g x_3 x_1 + c x_3^2) = 0$$

schreiben, so sehen wir unmittelbar, dass die vier Tangenten der Curve aus dem Doppelpunkt $x_3 = x_1 = 0$ durch die Gleichung

$$(x_1^2 + b x_3^2)(a x_1^2 + 2 g x_3 x_1 + c x_3^2) = x_3^2 (f x_3 + h x_1)^2$$

oder

$$a x_1^4 + 2 g x_1^3 x_3 + (c + ab - h^2) x_2^2 x_3^2 + 2 (bg - hf) x_3^3 x_1$$
$$+ (bc - f^2) x_3^4 = 0$$

ausgedrückt sind. Die Invarianten dieser biquadratischen Gleichung sind

$$I = abc - af^2 - bg^2 + fgh + \frac{1}{12} (c + ab - h^2)^2,$$

$$6 J = \left(abc - af^2 - bg^2 - \frac{1}{2} fgh\right)(c + ab - h^2)$$

$$- \frac{3}{2} h^2 (af^2 + bg^2) + 3 abfgh + \frac{3}{2} f^2 g^2 - \frac{1}{36} (c + ab - h^2)^3.$$

Indem wir bemerken, dass die Werthe in Bezug auf a und b, f und g symmetrisch sind, erkennen wir, dass sie mit den Invarianten der biquadratischen Gleichung übereinstimmen, welche dem Büschel der Tangenten aus dem Doppelpunkt

$$x_2 = x_3 = 0$$

entspricht und damit, dass diese beiden Tangentenbüschel projectivisch sind.

272. Daraus ergiebt sich, wie in Art. 169., dass durch die beiden Doppelpunkte und die vier Schnittpunkte jeder

Tangente aus dem einen mit der entsprechenden Tangente aus dem andern ein Kegelschnitt geht, und weil die Strahlen des zweiten Büschels in vier verschiedenen Ordnungen genommen werden können, ohne dass das Doppelverhältniss geändert wird, dass die sechzehn Schnittpunkte der Tangenten der ersten Reihe mit den Tangenten der zweiten Reihe in vier Kegelschnitten liegen, welche alle durch die beiden Doppelpunkte gehen. Ist die Curve vierter Ordnung bicircular oder sind die beiden Doppelpunkte die unendlich fernen Kreispunkte, so sagt der Satz, dass die sechzehn Brennpunkte einer bicircularen Curve vierter Ordnung zu je vier in vier Kreisen liegen[57]). Wir bemerken, dass einer von den bezeichneten vier Kegelschnitten durch die Doppelpunkte in zwei gerade Linien degenerieren kann, von denen die eine die Doppelpunkte verbindet, dass also insbesondere vier von den Brennpunkten einer bicircularen Curve vierter Ordnung in einer Geraden liegen können.

273. Wir haben früher bemerkt, dass die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in unendlich vielen Arten in die Form

$$aU^2 + bV^2 + cW^2 + 2fVW + 2gWU + 2hUV = 0$$

gebracht werden kann, in welcher

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

Kegelschnitte repräsentieren. Hat die Curve keinen singulären Punkt, so haben die drei Kegelschnitte keinen gemeinsamen Punkt, da jeder Punkt, welcher denselben allen gemeinschaftlich wäre, ein Doppelpunkt in der Curve vierter Ordnung sein müsste, welche dieser Gleichung entspricht. In dem Falle der Curve mit zwei Doppelpunkten können

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

als Kegelschnitte betrachtet werden, welche durch die Doppelpunkte gehen, und als Kreise somit, wenn diese Doppelpunkte die unendlich fernen Kreispunkte sind. Wir verlieren nichts an Allgemeinheit, wenn wir unsere Untersuchung auf die Gleichung

$$UW = V^2$$

richten, auf welche wie in der Theorie der Kegelschnitte die

vorige Gleichung in unendlich vielen Arten reduciert werden kann. Wir können sie z. B. schreiben

$$(aU+gW+hV)^2=(h^2-ab)V^2+2(gh-af)VW+(g^2-ac)W^2,$$

in welcher Form die rechte Seite der Gleichung in Factoren zerfällt.

Bicirculare Curven vierter Ordnung und allgemeiner solche mit zwei Doppelpunkten können somit durch Untersuchung der Gleichung

$$UW=V^2$$

studiert werden, d. h. indem man sie als Enveloppe des Systems

$$\lambda^2 U+2\lambda V+W=0$$

betrachtet, in welchem

$$U=0,\ V=0,\ W=0$$

Kreise respective Kegelschnitte durch die beiden Doppelpunkte sind. Und man hat nur zu untersuchen, in welcher Weise diese Beschränkung die früher erhaltenen Resultate modificiert. (Vergl. Art. 252 f.)

274. Wenn drei Kegelschnitte zwei Punkte gemein haben, so zerfällt ihre Jacobi'sche Curve in die gerade Verbindungslinie dieser Punkte und einen gleichfalls durch diese Punkte gehenden Kegelschnitt; und wenn insbesondere die drei Kegelschnitte Kreise sind, so ist der Jacobi'sche Kegelschnitt auch ein Kreis und zwar der Orthogonalkreis der drei gegebenen. (Vergl. „Kegelschn.“ Art. 360.). Weil die Jacobi'sche Curve durch eine Determinante dargestellt wird, so ist die von

$$y_1 U+y_2 V+y_3 W=0$$

dieselbe wie die von

$$U=0,\ V=0,\ W=0$$

und wenn diese Kreise sind, so haben alle in der vorigen Gleichung dargestellten Kreise denselben Orthogonalkreis.

Wenn

$$U=0,\ V=0,\ W=0$$

Kreise sind, deren Centra als die Punkte

$$x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\ x_i^{(3)}$$

bestimmt sind, so sind die Coordinaten des Centrums von

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

durch

$$\lambda^2 x_1^{(1)} + 2\lambda x_1^{(2)} + x_1^{(3)}, \quad \lambda^2 x_2^{(1)} + 2\lambda x_2^{(2)} + x_2^{(3)},$$
$$\lambda^2 x_3^{(1)} + 2\lambda x_3^{(2)} + x_3^{(3)}$$

ausdrückbar und der Ort, den das Centrum mit veränderlichem λ durchläuft, ist ein Kegelschnitt. Die Curve vierter Ordnung

$$U W = V^2$$

kann also als die Enveloppe eines Kreises betrachtetet werden, dessen Mittelpunkt sich auf einem festen Kegelschnitt F bewegt und der einen festen Kreis J immer orthogonal durchschneidet. (Die Brennpunkte dieses festen Kegelschnitts sind zugleich die Doppelbrennpunkte der Curve vierter Ordnung [58]). Und allgemeiner ist die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten

$$U W - V^2 = 0$$

für

$$U = 0, \; V = 0, \; W = 0$$

als Kegelschnitte durch dieselben die Enveloppe des veränderlichen Kegelschnitts

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0,$$

welche die festen Doppelpunkte auch enthält und ein System von gemeinsamem Jacobi'schen Kegelschnitt beschreibt, während der in Bezug auf ihn genommene Pol der die Doppelpunkte verbindenden Geraden einen festen Kegelschnitt F beschreibt.

275. Durch jede besondere Relation zwischen der Jacobi'schen Curve und dem Kegelschnitt F wird die Natur der entstehenden Curve vierter Ordnung modificiert. Wenn F dieselbe berührt, so ist der Berührungspunkt ein neuer Doppelpunkt der Curve vierter Ordnung; findet zweimalige Berührung zwischen denselben statt, so zerfällt die Curve vierter Ordnung als vier Doppelpunkte enthaltend in zwei Kegelschnitte, welche durch dieselben gehen. Geht F durch einen der festen Doppelpunkte, so wird derselbe insbesondere zu einer Spitze der Curve vierter Ordnung und wir erhalten somit, wenn F durch beide hindurchgeht, eine Curve vierter

Ordnung mit zwei Spitzen. So wird die bicirculare Curve vierter Ordnung, wenn auch F, der Ort der Centra, ein Kreis ist, zu einer solchen Curve mit Spitzen in den Kreispunkten, d. h. zu einer Cartesischen Curve.

Wenn der Kegelschnitt F die Verbindungsgerade der Doppelpunkte berührt, so wird diese Linie ein Theil der Curve vierter Ordnung; im Falle der bicircularen Curven zerfällt also die Curve vierter Ordnung in die unendlich ferne Gerade und eine bicirculare Curve dritter Ordnung, wenn der Kegelschnitt F eine Parabel ist.

Wenn die Centra der drei Kegelschnitte

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

in einer geraden Linie liegen, so reduciert sich die Jacobi'sche Curve auf diese Gerade.

276. Wir kehren zur Gleichung

$$UW = V^2$$

zurück. Es giebt, wie wir sahen, im Allgemeinen sechs Werthe von λ, für welche

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W$$

in Factoren zerfällt und die durch die verschiedenen Factoren repräsentierten Geraden sind Doppeltangenten der Curve

$$UW = V^2.$$

Wenn aber

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

sämmtlich durch feste Punkte gehen, so muss

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

als Gleichung einer durch dieselben Punkte gehenden Curve, insofern sie gerade Linien darstellt, entweder zwei Gerade ausdrücken, von denen jede durch einen dieser Punkte geht, oder die gerade Verbindungslinie derselben zusammen mit einer andern Geraden. Im erstern Falle sind die beiden Geraden keine eigentlichen Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung

$$UW = V^2,$$

sondern gewöhnliche Tangenten derselben aus einem ihrer Doppelpunkte — da ja jede durch einen Doppelpunkt gehende Gerade eine uneigentliche Tangente der Curve ist; im letztern

Falle ist eine der beiden Geraden eine eigentliche Doppeltangentente, während die andere die Verbindungslinie der Doppelpunkte ist. So entsprechen von den sechs Werthen von λ nur zwei dem Falle eigentlicher Doppeltangenten. Denn für $L = 0$ als die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne der Kegelschnitte

$$U = 0, \; V = 0, \; W = 0$$

sind die letzteren Gleichungen von der Form

$a U + L M = 0$, $b U + L N = 0$ und $\lambda^2 U + 2 \lambda V + W$

hat L zu dem einen Factor, wenn λ eine der Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 + 2 \lambda a + b = 0$$

ist. So giebt es im Falle bicircularer Curven vierter Ordnung für

$$U = 0, \; V = 0, \; W = 0$$

als Kreise zwei Werthe von λ, für welche der Coefficient von $x^2 + y^2$ in

$$\lambda^2 U + 2 \lambda V + W = 0$$

verschwindet und für jeden dieser Werthe bezeichnet diese Gleichung eine gerade Linie, welche die Curve

$$U W = V^2$$

doppelt berührt.

Wir können dasselbe Ergebniss aus der Construction des Art. 274. geometrisch ableiten. Wenn der Kreis

$$\lambda^2 U + 2 \lambda V + W = 0$$

eine gerade Linie wird, so liegt das Centrum desselben im Unendlichen, also in einem der beiden unendlich fernen Punkte des Kegelschnitts F, und die beiden Doppeltangenten sind also die vom Centrum der Jacobi'schen Curve auf die Asymptoten desselben gefällten Normalen.

In jedem der vier andern Fälle, wo die Discriminante der Gleichung

$$\lambda^2 U + 2 \lambda V + W = 0$$

verschwindet, bezeichnet diese ein Paar von Tangenten der Curve vierter Ordnung, von denen jede durch einen der unendlich fernen Kreispunkte geht und deren Durchschnittspunkt also ein Brennpunkt der Curve ist; oder was dasselbe ist,

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

ist die Gleichung eines unendlich kleinen Kreises, dessen Centrum der Brennpunkt ist und der mit der Curve vierter Ordnung in doppelter Berührung ist. Wenn von zwei zu einander orthogonalen Kreisen der eine sich auf einen Punkt reduciert, so muss dieser Punkt auf dem andern liegen; wenn also

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

sich auf einen Punkt reduciert, so muss derselbe auf dem Jacobi'schen Kreise von

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

liegen. Wir erhalten somit vier Brennpunkte, nämlich die Durchschnitte dieses Jacobi'schen Kreises mit dem Kegelschnitt F, welcher der Ort der Centra der im System

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

enthaltenen Kreise ist und daher als ein Focalkegelschnitt bezeichnet werden kann.

Die vier Punkte, in denen der Jacobi'sche Kreis die Curve vierter Ordnung schneidet, sind Punkte, in welchen Kreise des Systems

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

die Curve vierter Ordnung in vier aufeinander folgenden Punkten treffen. (Art. 252.)

Es giebt vier Wege, in welchen die Gleichung einer gegebenen bicircularen Curve vierter Ordnung auf die Form

$$UW = V^2$$

reduciert werden kann; jedem derselben entsprechen vier Brennpunkte, zwei Doppeltangenten und vier cyclische Punkte oder Punkte der Curve, wo vier aufeinanderfolgende Punkte derselben auf dem nämlichen Kreise liegen (Art. 114.). Diese Curven haben also in Allem 16 Brennpunkte, 8 Doppeltangenten und 16 cyclische Punkte.

277. Wenn einer der Brennpunkte der Curve als Anfangspunkt der Cartesischen Coordinaten genommen wird, so muss die Gleichung derselben von der Form

$$(x^2 + y^2)\, W = V^2$$

sein, für $W = 0$ und $V = 0$ als zwei Kreise; die Curve vierter Ordnung ist die Enveloppe von

$$x^2 + y^2 + 2\lambda V + \lambda^2 W = 0.$$

Ausser dem Werthe $\lambda = 0$ giebt es drei andere Werthe von λ, für welche dieser veränderliche Kreis sich auf einen Punkt reduciert; und einer dieser Werthe muss reell sein. Wir können daher die Gleichung schreiben

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2\lambda V + \lambda^2 W) = (x^2 + y^2 + \lambda V)^2,$$

oder in andern Worten, wenn wir einen Brennpunkt kennen, so kann die Gleichung der Curve vierter Ordnung auf die Form

$$AB = V^2$$

gebracht werden, in welcher $A = 0$ und $B = 0$ Punktkreise sind.

Wir können die bicircularen Curven vierter Ordnung in zwei Classen theilen, je nachdem die beiden andern Werthe von λ, für welche

$$A + 2\lambda V + \lambda^2 B = 0$$

sich auf die Gleichung eines Punktkreises reduciert, reell oder nicht reell sind, oder mit andern Worten, je nachdem die vier reellen Brennpunkte in einem Kreise liegen oder nicht. Ist im ersten Falle $C = 0$ einer der beiden Punktkreise, so eliminieren wir wie in Art. 258. die Grösse V zwischen den Gleichungen

$$AB = V^2 \quad \text{und} \quad A + 2\lambda V + \lambda^2 B = C$$

und erkennen, dass die Gleichung der Curve vierter Ordnung in der Form

$$l\sqrt{(A)} + m\sqrt{(B)} + n\sqrt{(C)} = 0$$

dargestellt werden kann, d. h. dass die Curve der Ort eines Punktes ist, dessen Entfernungen von drei festen Punkten durch die Relation

$$l\varrho + m\varrho' + n\varrho'' = 0$$

verbunden sind.

Die Bedingung, unter welcher

$$l\sqrt{(A)} + m\sqrt{(B)} + n\sqrt{(C)} = 0$$

durch

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

berührt wird, ist (vergl. „Kegelschnitte" Art. 159.)

$$\frac{l^2}{\lambda} + \frac{m^2}{\mu} + \frac{n^2}{\nu} = 0$$

und wenn

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0$$

Punktkreise sind und a, b, c die Längen der sie verbindenden Geraden bezeichnen, so kann leicht bestätigt werden, dass die Discriminante von

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

verschwindet, wenn

$$\frac{a^2}{\lambda} + \frac{b^2}{\mu} + \frac{c^2}{\nu} = 0$$

ist. Die zwei so erhaltenen Gleichungen bestimmen λ, μ, ν und daher den vierten Brennpunkt.

Wir wissen aber (vergl. „Kegelschn." Art. 125.), dass für vier Punktkreise A, B, C, D um die Punkte A', B', C', D' die identische Relation besteht

$$B'C'D'.A + C'D'A'.B + D'A'B'.C + A'B'C'.D = 0,$$

wenn $A'B'C'$, etc. die Flächenzahlen der Dreiecke der Punkte A', B', C'; etc. bezeichnen. Demnach sind λ, μ, ν den Inhalten der Dreiecke proportional, welche vom vierten Brennpunkt mit jedem Paar der drei andern Brennpunkte gebildet werden. Im Falle, wo die drei Punkte

$$A',\ B',\ C'$$

in einer geraden Linie liegen, beweist man leicht, dass die Quadrate der Entfernungen irgend eines Punktes von vier Punkten einer Geraden durch die Gleichung mit einander verbunden sind

$$\frac{A}{A'B'.A'C'.A'D'} + \frac{B}{B'A'.B'C'.B'D'} + \frac{C}{C'A'.C'B'.C'D'}$$
$$\frac{D}{D'A'.D'B'.D'C'} = 0.$$

Dann sind die Reciproken von λ, μ, ν zu den Producten

$$A'B'.A'C'.A'D',\quad B'A'.B'C'.B'D',\quad C'A'.C'B'.C'D'$$

proportional und wir erhalten die Gleichung

$$l^2.A'B'.A'C'.A'D' + m^2.B'A'.B'C'.B'D' + n^2.C'A'.C'B'.C'D' = 0.$$

Insbesondere liegt für

$$l^2 . A'B' . A'C' + m^2 . B'A' . B'C' + n^2 . C'A' . C'D' = 0$$

der vierte Brennpunkt im Unendlichen und die Curve ist eine Cartesische Curve.

278. Wenn vier concyclische Brennpunkte für eine bicirculare Curve vierter Ordnung gegeben sind, so gehen durch einen beliebigen Punkt zwei sich rechtwinklig durchschneidende Curven dieser Art.

Wenn der vierte Brennpunkt gegeben ist, so sind die Werthe von λ, μ, ν bekannt, für welche die Curve

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

sich auf einen Punkt reduciert; und es können offenbar zwei Systeme von Werthen der l, m, n gefunden werden, welche den Gleichungen

$$\frac{l^2}{\lambda} + \frac{m^2}{\mu} + \frac{n^2}{\nu} = 0$$

und

$$l\varrho + m\varrho' + n\varrho'' = 0$$

genügen, in deren letzter die $\varrho, \varrho', \varrho''$ oder $\sqrt{(A)}, \sqrt{(B)}, \sqrt{(C)}$ die Entfernungen eines gegebenen Curvenpunktes von den drei Brennpunkten bezeichnen.

Zwei Curven vierter Ordnung

$$l\sqrt{(A)} + m\sqrt{(B)} + n\sqrt{(C)} = 0,$$
$$l'\sqrt{(A)} + m'\sqrt{(B)} + n'\sqrt{(C)} = 0$$

sind confocal, wenn

$$a^2 (m^2 n'^2 - m'^2 n^2) + b^2 (n^2 l'^2 - n'^2 l^2) + c^2 (l^2 m'^2 - l'^2 m^2) = 0$$

ist, wie man durch Elimination von λ, μ, ν zwischen den drei Gleichungen

$$\frac{l^2}{\lambda} + \frac{m^2}{\mu} + \frac{n^2}{\nu} = 0, \quad \frac{l'^2}{\lambda} + \frac{m'^2}{\mu} + \frac{n'^2}{\nu} = 0,$$
$$\frac{a^2}{\lambda} + \frac{b^2}{\mu} + \frac{c^2}{\nu} = 0$$

sofort erkennt.

Um sodann die Bedingung aufzustellen, unter welcher

diese Curven vierter Ordnung sich rechtwinklig durchschneiden, schicken wir voraus, was man leicht bestätigen wird, dass für A, B, C als Punktkreise und a, b, c als von der vorher bezeichneten Bedeutung die Bedingung des rechtwinkligen Durchschnitts für

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0, \quad \lambda' A + \mu' B + \nu' C = 0$$

in der Gleichung

$$a^2 (\mu \nu' + \mu' \nu) + b^2 (\nu \lambda' + \nu' \lambda) + c^2 (\lambda \mu' + \lambda' \mu) = 0$$

ausgedrückt wird. Wir bemerken ferner (vergl. „Kegelschn." Art. 159.), dass die Curve vierter Ordnung

$$l \sqrt{(A)} + m \sqrt{(B)} + n \sqrt{(C)} = 0$$

in einem Punkte, für welchen ϱ, ϱ', ϱ'' die Werthe von

$$\sqrt{(A)}, \sqrt{(B)}, \sqrt{(C)}$$

bezeichnen, von dem Kreise

$$\frac{l}{\varrho} A + \frac{m}{\varrho'} B + \frac{n}{\varrho''} C = 0$$

berührt wird. Endlich ist die Bedingung, unter welcher dieser Kreis den Berührungskreis von

$$l' \sqrt{(A)} + m' \sqrt{(B)} + n' \sqrt{(C)} = 0$$

in demselben Punkte rechtwinklig durchschneidet

$$a^2 \frac{mn' + m'n}{\varrho' \varrho''} + b^2 \frac{nl' + n'l}{\varrho'' \varrho} + c^2 \frac{lm' + l'm}{\varrho \varrho'} = 0.$$

Durch Auflösung der Gleichungen

$$l \varrho + m \varrho' + n \varrho'' = 0, \quad l' \varrho + m' \varrho' + n' \varrho'' = 0$$

ergeben sich aber die ϱ, ϱ', ϱ'' respective proportional zu den Grössen

$$(mn' - m'n), \quad (nl' - n'l), \quad (lm' - l'm)$$

und somit durch Substitution in die vorige Gleichung die Bedingung der Orthogonalität der Curven vierter Ordnung

$$a^2 (m^2 n'^2 - m'^2 n^2) + b^2 (n^2 l'^2 - n'^2 l^2) + c^2 (l^2 m'^2 - l'^2 m^2) = 0;$$

dieselbe, welche die Confocalität der nämlichen Curven ausspricht.

Die Gültigkeit des Beweises erscheint von der Realität des C unabhängig und es gilt also der Satz, dass confocale

Curven vierter Ordnung sich rechtwinklig schneiden, auch dann, wenn die vier reellen Punkte nicht in einem Kreise liegen.

279. Der Satz des vorigen Artikels wurde von Hart durch geometrische Betrachtungen zuerst für den Fall der circularen Curve dritter Ordnung begründet. Wenn wir den Ort eines Punktes suchen, für welchen seine Entfernungen von drei festen Punkten durch die Relation

$$l\varrho + m\varrho' + n\varrho'' = 0$$

verbunden sind, so wird der Coefficient von $(x^2 + y^2)^2$ durch

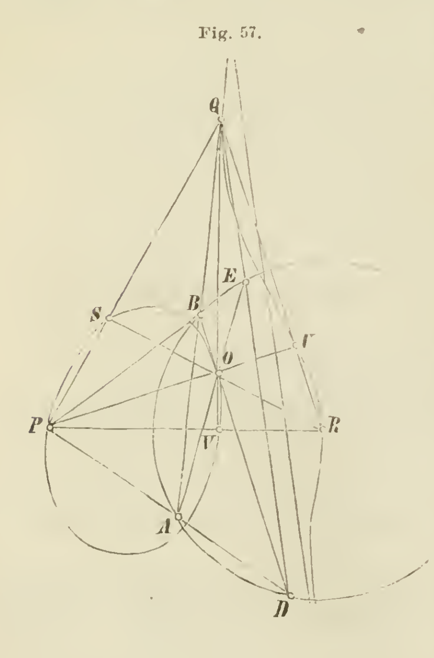
$$(l + m + n)(m + n - l)(n + l - m)(l + m - n)$$

ausgedrückt; der fragliche Ort, welcher im Allgemeinen eine bicirculare Curve vierter Ordnung ist, reduciert sich also auf eine circulare Curve dritter Ordnung für

$$l \pm m \pm n = 0$$

und es gelten daher die vorher entwickelten Sätze auch für diese Curven, welche auch sechszehn Brennpunkte haben, die im Allgemeinen in vier Kreisen liegen. Hart beweist, dass die Punkte O, P, Q, als die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare oder die Centra des von den vier Brennpunkten A, B, C, D der Curve dritter Ordnung gebildeten Vierecks, auf der Curve liegen und eine der Halbierungslinien des von dem betreffenden Gegenseitenpaare gebildeten Winkels zur Tangente haben, welche zugleich der reellen Asymptote der Curve parallel ist; sowie dass die Curve auch durch den Mittelpunkt R des Focalkreises hindurchgeht und hier ebenfalls die Parallele zur reellen Asymptote be-

Fig. 57.



rührt. (Die Centra der vier Focalkreise der circularen Curve dritter Ordnung sind also die Berührungspunkte der der reellen Asymptote parallelen Tangenten oder liegen auf einer Hyperbel, für die diese gleichfalls Asymptote ist.) Weil aber O, P, Q, R die Berührungspunkte der von demselben Punkt der Curve an dieselbe gehenden Tangenten sind, so ist der Schnittpunkt von OP mit QR oder der Fusspunkt der Normale von O auf QR gleichfalls ein Punkt der Curve (Art. 151.); und das Gleiche gilt für die Schnittpunkte von OQ mit PR und von OR mit PQ. Und man zeigt überdiess, dass die Tangenten der beiden Curven dritter Ordnung, welche durch diese Punkte gehen, in ihnen zu einander rechtwinklig sind. So sind die sieben den beiden Curven dritter Ordnung mit A, B, C, D als Brennpunkten gemeinschaftlichen Punkte durch einfache Constructionen bestimmt, und wir können von da aus durch die Methode der Projection zu Sätzen gelangen, von denen einige früher entwickelt worden sind; z. B. (vergl. Art. 153.) wenn in irgend einer Ordnung entsprechende Tangenten aus zwei Punkten I, J einer Curve dritter Ordnung sich in Punkten A, B, C, D durchschneiden, so sind die Gegenseitenschnittpunkte des von ihnen gebildeten Vierecks gleichfalls Punkte der Curve und haben den Punkt, in welchem die Gerade IJ die Curve überdiess schneidet, zu ihrem gemeinschaftlichen Tangentialpunkt; der Berührungspunkt der vierten Tangente aus diesem ist der Pol der Geraden IJ in Bezug auf den durch die Punkte A, B, C, D, I, J gehenden Kegelschnitt.

280. Die Beweismethode von Hart bestand in dem Nachweis, dass bei gegebenen Brennpunkten die im Art. 277. begründeten Relationen in Verbindung mit der Bedingung

$$l + n = m$$

zur Bestimmung von l, m, n hinreichen und dass für a, b, c, d als die Entfernungen der vier Brennpunkte von O die Curve entweder die durch

$$(b + c)\,\varrho \pm (a - b)\,\varrho'' = \pm (a + c)\,\varrho'$$

oder die durch

$$(c - b)\,\varrho \pm (a + b)\,\varrho'' = \pm (a + c)\,\varrho'$$

ausgedrückte Eigenschaft haben muss. Jeder Coefficient hat hier ein doppeltes Zeichen, weil in der Gleichung

$$l\varrho + m\varrho' + n\varrho'' = 0$$

nach Entfernung der Wurzeln nur die Quadrate von l, m, n, vorkommen. Die beiden Gleichungen entsprechen zwei verschiedenen Curven dritter Ordnung, welche die nämlichen Brennpunkte haben; die verschiedenen Zeichen entsprechen verschiedenen Aesten derselben Curve.

Die oberen Zeichen gehören insbesondere zu einem in's Unendliche gehenden Aste, weil bei ihrer Geltung die Gleichung für

$$\varrho = \varrho' = \varrho''$$

erfüllt wird, welche einem unendlich fernen Punkte entsprechen; in diesem Aste liegt das Centrum des Focalkreises. Die unteren Zeichen gehören dagegen zu einem Oval, weil sie mit $\varrho = \varrho' = \varrho''$ unverträglich sind. Weil die Gleichungen für a, b, c als die Werthe von $\varrho, \varrho', \varrho''$ erfüllt werden, so gehört der Punkt O zur Curve dritter Ordnung.

In gleicher Art haben wir die Relationen

$$(c - d)\,\varrho \pm (a + d)\,\varrho'' = \pm (a + c)\,\varrho'''$$

oder

$$(c + d)\,\varrho \pm (a - d)\,\varrho'' = \pm (a + c)\,\varrho''',$$

also durch Combination

$$\frac{\varrho + \varrho''}{a + c} = \frac{\varrho' + \varrho'''}{b + d},$$

oder die beiden Curven dritter Ordnung bilden den Ort der Durchschnitte zweier ähnlicher Kegelschnitte, die A und C, B und D zu ihren respectiven Brennpunkten haben. Die sich in O durchschneidenden ähnlichen Kegelschnitte haben offenbar eine der Halbierungslinien des bezüglichen Winkels zur gemeinschaftlichen Tangente und diese Halbierungslinien sind daher, wie wir schon angaben, die Tangenten der beiden den Ort bildenden und sich daher rechtwinklig durchschneidenden Curven dritter Ordnung.

281. Curven vierter Ordnung mit zwei Spitzen können als Grenzfall solcher Curven mit zwei Doppelpunkten aufge-

fasst werden. Man nennt solche Curven Cartesische, wenn die unendlich fernen Kreispunkte I, J diese Spitzen sind; Des Cartes studierte diese als Cartesisches Oval bezeichnete Curve als den Ort eines Punktes O, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten A, B durch die Relation

$$l\varrho \pm m\varrho' = c$$

verbunden sind. Chasles zeigte und man kann es ohne Schwierigkeit bestätigen, dass immer, wenn diese Relation erfüllt ist, ein dritter Punkt C in der Linie AB existiert, für welchen die Entfernung von O eine Relation von der Form

$$l\varrho \pm n\varrho'' = c'$$

erfüllt, oder mit andern Worten, dass das Oval ausser den beiden von Des Cartes betrachteten Brennpunkten noch einen dritten Brennpunkt von der gleichen Eigenschaft besitzt. Wir wollen nun die Bezeichnung Cartesische Curve in etwas weiterem Sinne gebrauchen. Wir werden zeigen, dass für eine Curve vierter Ordnung, welche die Punkte I, J zu Spitzen hat, drei Brennpunkte in gerader Linie existieren; sind dieselben reell, so ist die Curve mit der von Des Cartes studierten identisch; wenn aber zwei von ihnen nicht reell sind, so wollen wir die Curve noch als eine Cartesische bezeichnen, obwohl die Cartesische Erzeugungsweise nicht länger gilt.

Die Gleichung der Cartesischen Curve kann für

$$S = 0 \quad \text{und} \quad L = 0$$

als Gleichungen eines Kreises und einer Geraden respective und für k als eine Constante oder $k = 0$ als Ausdruck der unendlich fernen Geraden in die Form

$$S^2 = k^3 L$$

gesetzt werden, aus welcher ersichtlich ist, dass die Schnittpunkte von $S = 0$ und $k = 0$ Spitzen sind, deren Tangenten sich im Mittelpunkte von S durchschneiden, so dass dieser der dreifache Brennpunkt der Curve ist; die Gerade $L = 0$ ist eine Doppeltangente derselben. Wir wollen bemerken, dass diese Curve von Cayley unter der Gleichungsform

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 16A(x - m) = 0$$

studiert worden ist.

Die Form $S^2 = k^3 L$ lässt die Curve als die Enveloppe des veränderlichen Kreises

$$\lambda^2 k L + 2\lambda S + k^2 = 0$$

erscheinen, dessen Mittelpunkt sich längs einer zu $L = 0$ normalen geraden Linie bewegt. Durch Vergleichung der Discriminante derselben mit Null erkennt man, dass es drei Werthe von λ giebt, für welche der Kreis sich auf einen Punkt reduciert, oder mit andern Worten drei Brennpunkte. Nach der vorher entwickelten Theorie kann aber für

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0$$

als irgend drei Lagen des veränderlichen Kreises die Gleichung der Enveloppe in der Form

$$l\sqrt{(A)} + m\sqrt{(B)} + n\sqrt{(C)} = 0$$

dargestellt werden; und wir haben daher für $\varrho, \varrho', \varrho''$ als die Entfernungen von den drei Brennpunkten die Eigenschaft

$$l\varrho + m\varrho' + n\varrho'' = 0$$

oder, weil $k^2 = 0$ ein Kreis des Systems ist, der dem Werthe $\lambda = 0$ entspricht, wir haben

$$l\varrho + m\varrho' = nk.$$

Eine Cartesische Curve kann auch als Ort der Spitze eines Dreiecks erzeugt werden, dessen Basisecken sich in zwei festen Kreisen bewegen, während die Seiten und die Basis sich um die Centra und einen festen Punkt in der Centrallinie derselben drehen.

Wenn eine Sehne die Cartesische Curve in vier Punkten schneidet, so ist die Summe der Entfernungen dieser Letzteren von einem der Brennpunkte constant. Denn die Polargleichung der Curve für den Brennpunkt als Pol ergiebt sich in der Form

$$\varrho^2 - 2(a + b\cos\omega)\varrho + c^2 = 0$$

und durch die Elimination von ω zwischen dieser und der Gleichung einer beliebigen Geraden erhalten wir für ϱ eine

biquadratische Gleichung, in welcher der Coefficient des zweiten Gliedes durch $-4a$ gegeben ist.

Wenn $c = 0$ ist, so wird die vorige Gleichung

$$\varrho = a + b \cos\omega$$

und die Curve hat ausser den Spitzen in I und J im Anfangspunkt der Coordinaten einen Knotenpunkt. Man nennt sie dann die Pascal'sche Limaçon oder Schnecke und kann sie offenbar dadurch erzeugen, dass man in den Radien vectoren des Kreises aus einem Punkte desselben constante Längen von ihren Endpunkten aus abträgt. Wenn noch specieller $a = b$ ist, so erhält die Curve eine dritte Spitze und heisst die Cardioide; die abzutragende constante Länge ist dem Durchmesser des Kreises gleich. Die Gleichung kann in der Form

$$\varrho^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2}\omega$$

geschrieben werden.

282. Die Brennpunkts-Eigenschaften, die wir so eben erörterten, können durch die Methode der Inversion nach Art. 123. untersucht werden. Man zeigt mit Leichtigkeit, dass jedem Brennpunkt einer Curve ein Brennpunkt der inversen Curve entspricht und dass das Centrum der Inversion ein Brennpunkt ist, wenn die unendlich fernen Punkte I, J Spitzen sind.

So ist für die Cartesische Curve mit drei in einer Geraden liegenden Brennpunkten die Inverse in Bezug auf irgend einen Punkt eine bicirculare Curve vierter Ordnung mit vier Brennpunkten in einem Kreise, nämlich dem Centrum der Inversion und der entsprechenden der drei gegebenen Brennpunkte. Da nun aber für O als Centrum der Inversion und A', B' als die entsprechenden Punkte zu A, B die Relation besteht

$$AB = \frac{A'B'}{OA' \,.\, OB'},$$

so tritt an Stelle einer Relation von der Form

$$\lambda \,.\, AP + \mu \,.\, BP = c$$

eine solche von der Form

$$\lambda' \,.\, A'P' + \mu' \,.\, B'P' = c' \,.\, OP',$$

und wir erhalten somit die Fundamentaleigenschaft der bicircularen Curven vierter Ordnung, indem wir sie als die Inverse einer Cartesischen Curve betrachten. In derselben Weise entspringt aus jeder Relation

$$\lambda \,.\, AP + \mu \,.\, BP + \nu \,.\, CP = 0$$

eine Relation

$$\lambda' \,.\, A'P' + \mu' \,.\, B'P' + \nu' \,.\, C'P' = 0.$$

Die inverse Curve einer bicircularen Curve vierter Ordnung für einen ihrer Punkte als Centrum der Inversion ist eine circulare Curve dritter Ordnung und diese besitzt daher dieselben Focaleigenschaften wie jene. In Bezug auf jeden der Punkte O, P, Q, R (Fig. des Art. 279.) ist eine bicirculare Curve dritter Ordnung und eine bicirculare Curve vierter Ordnung sich selbst invers, d. h. jeder ihrer Punkte entspricht einem andern.

Da der Winkel, unter welchem zwei Curven sich schneiden, durch Inversion nicht geändert wird, so gilt der Satz vom rechtwinkligen Durchschnitt confocaler Curven dieser Art für die der vierten, sobald er für die von der dritten bewiesen ist und umgekehrt. Die inverse Curve eines Kegelschnitts ist eine bicirculare Curve vierter Ordnung, welche das Centrum der Inversion zum dritten Doppelpunkt hat, und man schliesst daher aus der Brennpunktseigenschaft der Kegelschnitte unmittelbar, dass solche Curven vierter Ordnung, die durch die Relation

$$\frac{A'P'}{OA'} + \frac{B'P'}{OB'} = c \,.\, OP'$$

ausgedrückte Eigenschaft haben für A', B' als zwei ihrer Brennpunkte und O als den Doppelpunkt. Die Beziehung der Punkte der Kegelschnitte zu Brennpunkt und Directrix giebt daher unmittelbar eine andere von Hart bemerkte Construction zur Erzeugung dieser Art von Curven vierter Ordnung. Wenn der von dem festen Punkte C ausgehende Radius vector CE eines durch diesen Punkt gehenden Kreises die Curve in P schneidet, so ist $PA = PE$ für A als einen andern festen Punkt.

283. Für Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten lässt sich eine Theorie der Einschreibung von Polygonen in vollkommener Analogie zu Poncelet's Theorie derselben für Kegelschnitte entwickeln [59]). Seien A und B die Doppelpunkte, so verbinde man den einen derselben A mit einem beliebigen Punkte P der Curve, den neuen Schnittpunkt Q dieser Geraden mit der Curve mit dem andern Doppelpunkte B, den neuen Schnittpunkt R dieser Geraden mit dem ersten Doppelpunkte A, so dass man einen Punkt der Curve S erhält; etc. So entsteht im Allgemeinen ein ungeschlossenes Polygon $PQRS\ldots$, dessen eine Schaar alternierender Seiten PQ, RS, ... durch A geht, während die andere Schaar QR, ... durch B geht. Es giebt nun für eine beliebige Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten keinen Punkt P von solcher Lage in ihr, dass in dieser Weise ein geschlossenes Polygon von gerader Seitenzahl entstünde, z. B. ein Viereck $PQRS$, dessen Seitenpaar PQ, RS durch A geht, während QR, ST durch B gehen. Aber die Curve vierter Ordnung kann so beschaffen sein, dass ein Polygon der fraglichen Art existiert; und wenn diess der Fall ist, so existieren unendlich viele solche Polygone, d. h. jeder Punkt P in der Curve kann als erste Ecke gewählt werden und das in der angegebenen Weise gebildete Polygon schliesst sich immer. Dass die Curve so beschaffen sein kann, ist für das Viereck evident; denn ist $PQRS$ ein beliebiges Viereck und wird der Schnittpunkt von PQ und RS mit A und der von PS, QR mit B bezeichnet, so giebt es immer eine durch P, Q, R, S gehende Curve vierter Ordnung, welche die Punkte A und B zu Doppelpunkten hat.

284. Wenn man die drei Doppelpunkte einer einläufigen Curve vierter Ordnung als Fundamentalpunkte des Coordinatensystems nimmt, so ist die Gleichung der Curve nothwendig von der Form

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2a_{23}x_1^2x_2x_3 + 2a_{31}x_2^2x_3x_1 + 2a_{12}x_3^2x_1x_2 = 0$$

oder

$$a_{11}\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 + a_{33}\left(\frac{1}{x_3}\right)^2 + 2a_{23}\frac{1}{x_2x_3} + 2a_{31}\frac{1}{x_3x_1}$$
$$+ 2a_{12}\frac{1}{x_1x_2} = 0.$$

Wir sehen also, dass die Gleichung einer solchen Curve vierter Ordnung aus der Gleichung eines Kegelschnitts dadurch entsteht, dass man die Variabeln durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Man kann die entsprechende geometrische Transformation als Inversion bezeichnen, wenn man diess Wort in einem weitern als dem vorher genommenen Sinne fasst.

Man drückt diese Transformation leicht durch eine geometrische Construction aus. Wenn die Coordinaten den senkrechten Abständen von den Seiten des Fundamentaldreiecks proportional sind, so gilt für zwei Punkte

$$P(x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad P'(x_1', x_2', x_3'),$$

die durch die reciproken Relationen

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_3'x_1' : x_1'x_2',$$
$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2x_3 : x_3x_1 : x_1x_2$$

verbunden sind, nach Art. 55. der „Kegelschnitte," dass die geraden Linien von ihnen nach den Ecken des Fundamentaldreiecks z. B. PA_1, $P'A_1$ mit den anstossenden Seiten, also A_1A_2, A_1A_3, gleiche Winkel einschliessen, d. h. nach Art. 329., 13. ibid. es sind P und P' die beiden Brennpunkte eines Kegelschnitts, welcher die Fundamentallinien berührt. Im allgemeinen Falle tritt an Stelle der in Rücksicht auf die bezüglichen Fundamentallinien oder die Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel symmetrischen Paarung der aus den Fundamentalpunkten nach P, P' gehenden Strahlen die involutorische, nämlich in der Weise, dass die Geraden A_iP, A_iP' ein Paar einer Involution bilden, die durch das Paaar A_iA_k, A_iA_l und den Doppelstrahl A_iE (für E als den Einheitpunkt der Coordinaten) bestimmt ist.

Immer entspricht im Allgemeinen einer Lage von P eine einzige bestimmte Lage von P'. Wenn aber $x_1' = 0$ ist oder P' in der geraden Linie A_2A_3 liegt, so werden x_2 und x_3

beide Null und P fällt mit A_1 zusammen; und umgekehrt entspricht dem Punkte A_1 jeder Punkt in $A_2 A_3$. Es ist aber das Verhältniss der einem bestimmten Werthe von x_1' entsprechenden Werthe von x_2 und x_3 immer gleich

$$x_3' x_1' : x_1' x_2',$$

also auch für verschwindendes x_1' noch gleich $x_3' : x_2'$, d. h. jedem Punkt P' in $A_2 A_3$ entspricht ein zu A_1 unendlich naher Punkt P in bestimmter Richtung von A_1 aus, nämlich so, dass wie im allgemeinen Fall $A_1 P$, $A_1 P'$ mit den Fundamentallinien $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ gleiche Winkel machen oder ein Paar der Involution bilden, welche durch diese und den Doppelstrahl $A_1 E$ bestimmt ist. Wir wollen in der Folge den erstern Fall voraussetzen.

Wenn der Punkt P irgend einen Ort beschreibt, so durchläuft P' einen entsprechenden Ort; wenn z. B. der Ort von P eine gerade Linie

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

ist, so ist der von P' der Kegelschnitt

$$a_1 x_2' x_3' + a_2 x_3' x_1' + a_3 x_1' x_2' = 0$$

und umgekehrt (vergl. „Kegelschnitte" a. a. O.); für $a_1 = 0$ d. h. wenn die Gerade durch A_1 geht, reduciert sich der entsprechende Kegelschnitt auf

$$x_1' (a_2 x_3' + a_3 x_2') = 0$$

und besteht also aus den Geraden

$$x_1' = 0 \quad \text{und} \quad a_2 x_3' + a_3 x_2' = 0,$$

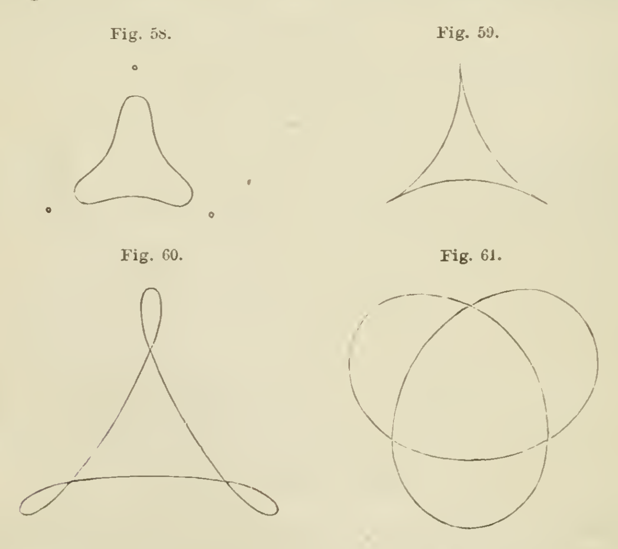
von welcher Letzteren wir sagen können, dass sie der Geraden

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

entspreche. Allgemeiner entspricht wie gesagt einem Kegelschnitt eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, d. i. wie dieser vom Geschlecht 0, in Uebereinstimmung mit Art. 83.

285. Das Entsprechen des Kegelschnitts und der Curve vierter Ordnung kann im Einzelnen erörtert werden; davon

Folgendes: Der Kegelschnitt schneidet jede Seite des Fundamentaldreiecks z. B. $A_2 A_3$ in zwei Punkten; denselben entsprechen zwei zu A_1 in bestimmten Richtungen benachbarte Elemente, d. h. also die Tangenten der Curve vierter Ordnung im Doppelpunkt A_1. Je nachdem also der Kegelschnitt die Gerade $A_2 A_3$ in zwei nicht reellen oder in zwei reellen Punkten schneidet oder in einem Punkte berührt, hat die Curve vierter Ordnung in A_1 einen isolirten Punkt, einen Knotenpunkt oder eine Spitze; ebenso für die andern Seiten und Ecken. So ist für eine Ellipse oder einen Kreis, welche ganz im Innern des Fundamentaldreiecks liegen, die Curve vierter Ordnung eine Curve mit drei isolierten Punkten, in den Fundamentalpunkten und einer nach denselben hin ausgebauchten dadurch dreiecksähnlichen geschlossenen Curve im Innern des Fundamentaldreicks (Fig. 58.). Wenn die Ellipse dem Dreieck eingeschrieben ist, so hat die Curve vierter Ordnung drei Spitzen (Fig. 59.) in den Fundamentalpunkten.


Fig. 58. Fig. 59. Fig. 60. Fig. 61.

Schneidet aber die Ellipse jede Seite in zwei reellen Punkten, so hat die entstehende Curve vierter Ordnung drei Knotenpunkte in den Fundamentalpunkten, und zwar in der Form der Fig. 60., wenn die Schnittpunkte der Ellipse in jeder Seite zwischen den bezüglichen Ecken und nach dem Typus

der Fig. 61., wenn diese Schnittpunkte ausserhalb der bezüglichen Ecken liegen. Es ist zu bemerken, dass beim Uebergang aus der einen Form in die andere die Ellipse nach einander durch die Ecken des Dreiecks gehen muss, so dass der Uebergang nicht, wie man erwarten konnte, durch die Form einer Curve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte hindurchgeht; wenn die Ellipse durch eine Ecke geht, so zerfällt die Curve in eine gerade Linie und eine Curve dritter Ordnung. Die vollständige Discussion der verschiedenen Formen ist interessant und nicht schwierig, würde aber ziemlich vielen Raum erfordern; man hätte die Kegelschnitte zu betrachten, welche in jeder Figur der unendlich fernen Geraden in der Ebene der andern Figur entsprechen. Die Anwendung derselben Theorie auf sphärische Figuren wird dadurch wesentlich vereinfacht, dass solche Kegelschnitte nicht auftreten.

286. Die besprochene Art der Erzeugung der Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten führt sogleich zu verschiedenen Eigenschaften der Curve. Es ist bekannt, dass die sechs Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Schnittpunkten seiner respectiven Gegenseiten mit einem Kegelschnitt verbinden, einen Kegelschnitt berühren und man weist leicht nach, dass die sechs Geraden, welche den vorigen für das Dreieck als Fundamentaldreieck nach dem Gesetz der Inversion entsprechen, die Gegenseiten wieder in sechs Punkten eines Kegelschnitts schneiden und also dass die sechs inversen Geraden gleichfalls einen Kegelschnitt berühren. In der That, wenn die Geraden

$$x_1 = \alpha x_2, \quad x_1 = \alpha' x_2; \qquad x_2 = \beta x_3, \quad x_2 = \beta' x_3;$$
$$x_3 = \gamma x_1, \quad x_3 = \gamma' x_1$$

die Seiten

$$x_3 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

in sechs Punkten eines Kegelschnittes schneiden, so muss

$$\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = t$$

sein und diese Relation wird durch Einführung der reciproken Werthe von

$$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$$

statt derselben nicht gestört. Nach dem Vorgehenden sind aber die Tangenten der durch Inversion aus einem Kegelschnitt entstehenden Curve vierter Ordnung im Doppelpunkt A_1 die inversen Geraden zu den Verbindungslinien von A_1 mit den Schnittpunkten der Seite A_2A_3 mit dem Originalkegelschnitt, d. h. die Tangenten der Curve in den Doppelpunkten A_1, A_2, A_3 berühren einen und denselben Kegelschnitt, was sich auch aus der Gleichung der Curve direct ergiebt.

287. Wenn man von den Fundamentalpunkten A_1, A_2, A_3 Tangenten an einen Kegelschnitt zieht, so sind die sechs inversen Geraden wieder Tangenten eines Kegelschnitts. Bei der Inversion des ersten Kegelschnitts in die Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten in A_1, A_2, A_3 geben aber jene Tangenten in ihren inversen die von den Doppelpunkten an die Curve gehenden Tangenten, deren Anzahl gleich 2 ist, weil sie im Allgemeinen durch $\nu - 4$ ausgedrückt wird. Wir erhalten somit den Satz: Die sechs Tangenten, welche von den Doppelpunkten an die Curve vierter Ordnung gehen, sind Tangenten desselben Kegelschnitts.

288. Den Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung entsprechen Kegelschnitte, welche dem Fundamentaldreieck umschrieben sind und den Originalkegelschnitt doppelt berühren; den stationären Tangenten derselben solche Kegelschnitte, welche jenen stationär berühren. Man zeigt ohne Schwierigkeit, dass vier Kegelschnitte der ersten und sechs der zweiten Art existieren, übereinstimmend mit den Charakteren $\tau = 4$, $\iota = 6$. Das Resultat rücksichtlich der Doppeltangenten lässt sich aber auch unmittelbar aus der Gleichung der Curve ableiten, die man in der Form schreiben kann

$$\left\{x_2x_3\sqrt{(a_{11})} + x_3x_1\sqrt{(a_{22})} + x_1x_2\sqrt{(a_{33})}\right\}^2$$
$$= 2x_1x_2x_3\left[\left\{\sqrt{(a_{22}a_{33})} - a_{23}\right\}x_1 + \left\{\sqrt{(a_{33}a_{11})} - a_{31}\right\}x_2 + \left\{\sqrt{(a_{11}a_{22})} - a_{12}\right\}x_3\right].$$

In derselben bezeichnet der Factor von $2x_1x_2x_3$, gleich Null

gesetzt eine Doppeltangente, und der Wechsel der Zeichen bei den Wurzelgrössen giebt die vier Doppeltangenten der Curve. Setzen wir dann abkürzend

$$a_{23}x_1 + a_{31}x_2 + a_{12}x_3 = x$$

$$x_1 \sqrt{(a_{22}a_{33})} = y_1, \quad x_2 \sqrt{(a_{33}a_{11})} = y_2, \quad x_3 \sqrt{(a_{11}a_{22})} = y_3$$

und repräsentieren die Gleichung der vier Doppeltangenten durch $\Theta = 0$, so haben wir

$$\begin{aligned}\Theta &= (x-y_1-y_2-y_3)(x-y_1+y_2+y_3)(x+y_1-y_2+y_3)(x+y_1+y_2-y_3) \\ &= (x^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2)^2 - 4(y_2^2y_3^2+y_3^2y_1^2+y_1^2y_2^2+2y_1y_2y_3x) \\ &= (x^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2)^2 - 4a_{11}a_{22}a_{33}U\end{aligned}$$

für U als die linke Seite der Gleichung der Curve. Man kann somit die Gleichung der Curve auch in der Form schreiben

$$\{(a_{23}x_1+a_{31}x_2+a_{12}x_3)^2 - a_{22}a_{33}x_1^2 - a_{33}a_{11}x_2^2 - a_{11}a_{22}x_3^2\}^2 - \Theta = 0,$$

welche aussagt, dass die acht Berührungspunkte der Doppeltangenten auf einem Kegelschnitt liegen.

Wenn die vier Doppeltangenten durch $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$, $t_4 = 0$ ausgedrückt werden, so kann die Gleichung der Curve vierter Ordnung durch

$$t_1^{\frac{1}{2}} + t_2^{\frac{1}{2}} + t_3^{\frac{1}{2}} + t_4^{\frac{1}{2}} = 0$$

oder

$$(t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2-2t_1t_2-2t_1t_3-2t_1t_4-2t_2t_3-2t_2t_4-2t_3t_4)^2 = 64\,t_1t_2t_3t_4$$

dargestellt werden; aus welcher Form erhellt, dass die $t_i = 0$ Doppeltangenten sind, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, und mit welcher man zeigt, dass die Punkte

$$t_1 - t_2 = 0,\ t_3 - t_4 = 0; \quad t_1 - t_3 = 0,\ t_2 - t_4 = 0;$$
$$t_1 - t_4 = 0,\ t_2 - t_3 = 0$$

Doppelpunkte sind.

289. Wir haben so eben gezeigt, wie die Gleichung der Curve vierter Ordnung auf die Form

$$UW = V^2$$

reduciert werden kann, und bemerken nun, dass für

$$u = 0, \ w = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

als die Gleichungen von zwei Tangenten und der entsprechenden Berührungssehne des Kegelschnittes aus der Gleichung

$$uw = v^2$$

desselben, die Gleichung der Curve vierter Ordnung in der Form

$$UW = V^2$$

für U, V, W als lineare Functionen von

$$x_2 x_3\,,\ x_3 x_1\,,\ x_1 x_2$$

unmittelbar entspringt. Endlich ergiebt sich daraus, dass die Coordinaten x_i' eines Punktes des Kegelschnitts als quadratische Functionen eines Parameters θ ausgedrückt werden können, für die Curve vierter Ordnung, welche aus ihm durch Inversion entsteht, die Ausdrückbarkeit der Coordinaten

$$x_2' x_3',\ x_3' x_1',\ x_1' x_2'$$

ihrer Punkte durch biquadratische Functionen desselben Parameters. Die Curve ist also einläufig nach Art. 44.

Die vorige Theorie der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten überträgt sich auch auf den Fall, wo diese Punkte alle oder zum Theil Spitzen sind. Die Curve mit drei Spitzen ist durch

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0$$

darstellbar und die Rückkehrtangenten werden durch die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = x_3$$

ausgedrückt, gehen also durch einen Punkt. Die Reciproke dieser Curve ist von der dritten Ordnung und hat die Gleichung

$$x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}} = 0,$$

welche das Vorige bestätigt (Art. 217.). Wenn die Curve zwei Spitzen und einen Knotenpunkt hat, so gehen die geraden Verbindungslinien der beiden Spitzen und der beiden Inflexionspunkte durch einen Punkt der Doppeltangente.

Nur die im Art. 245. bezeichneten Fälle des Vorkommens höherer Singularitäten erfordern eine besondere Untersuchung.

290. Die Gleichung einer Curve vierter Ordnung mit einem Berührungsknoten ist nach Art. 245.

$$x_2^2 x_3^2 + b\, x_1^2 x_2 x_3 + c\, x_1 x_2^2 x_3 + d\, x_2^3 x_3 + e\, x_1^4 + f\, x_1^3 x_2 + g x_1^2 x_2^2 + h\, x_1 x_2^3 + i\, x_2^4 = 0,$$

wenn der Punkt $x_1 = x_2 = 0$ der Berührungsknoten und die Gerade $x_2 = 0$ die entsprechende Tangente ist. Hat die Curve einen weiteren Doppelpunkt, so kann derselbe als Fundamentalpunkt $x_3 = x_1 = 0$ genommen werden und es muss dann $d = h = i = 0$ sein; so dass die Gleichung eine quadratische Function von

$$x_1 x_2,\ x_1^2,\ x_2 x_3$$

wird, nämlich

$$(x_2 x_3)^2 + b\, x_1^2 \cdot x_2 x_3 + c\, x_1 x_2 \cdot x_2 x_3 + e\, x_1^4 + f x_1^2 \cdot x_1 x_2 + g\, (x_1 x_2)^2 = 0.$$

Wir erhalten somit die Gleichung einer Curve vierter Ordnung mit einem Berührungsknoten und einem Doppelpunkt aus der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts, indem wir die $x_1 x_2$, x_1^2, $x_2 x_3$ für x_1, x_2, x_3 respective substituieren. Da nun die Relationen

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 x_2 : x_1^2 : x_2 x_3,$$

die andern

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' x_2' : x_1'^2 : x_2' x_3'$$

bedingen, so ergiebt sich eine ganz analoge Theorie für diese Curven vierter Ordnung wie für die mit drei verschiedenen Doppelpunkten. Die Constanten können so bestimmt werden, dass der Doppelpunkt zur Spitze oder der Berührungsknoten zur Knotenspitze wird, oder dass beides zugleich eintritt; und die Theorie erweitert sich so auf die Curven vierter Ordnung mit zwei verschiedenen singulären Punkten, Doppelpunkt oder Spitze und Berührungsknoten oder Knotenspitze.

291. Die Gleichung der Curve vierter Ordnung mit einem Osculationsknoten ist nach Art. 245.

$$(x_2 x_3 - m\, x_1^2)^2 + c\, x_1 x_2\, (x_2 x_3 - m\, x_1^2) + d\, x_2^3 x_3 + g\, x_1^2 x_2^2 + h\, x_1 x_2^3 + i\, x_2^4 = 0,$$

eine quadratische Function von

$$x_2 x_3 - m x_1^2,\ x_1 x_2,\ x_2^2.$$

Und da aus

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 x_2 : x_2^2 : x_2 x_3 - m x_1^2$$

die Relationen

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' x_2' : x_2'^2 : x_2' x_3' + m x_1'^2$$

folgen, so existiert auch für diesen Fall eine Theorie, welche der der Curven mit drei Doppelpunkten analog ist. Die Constanten können so specialisiert werden, dass der Osculationsknoten zur Berührungsknotenspitze wird und die Theorie für diese Curven gültig bleibt.

In allen diesen Fällen haben wir die Coordinaten x_i eines veränderlichen Punktes der Curve vierter Ordnung als quadratische Functionen der x_i' d. h. der Coordinaten eines veränderlichen Punktes eines Kegelschnittes ausgedrückt oder, da die letztern bekanntlich quadratische Functionen eines Parameters θ sind, als biquadratische Functionen desselben Parameters.

292. Es bleibt endlich der Fall der Curve vierter Ordnung mit dreifachem Punkt von allgemeiner oder specieller Art zu erwähnen, für welchen die in den letzten Artikeln gebrauchte Behandlungsweise nicht anwendbar ist, während wir doch leicht in anderer Weise die Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken können. Denken wir den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ als den dreifachen Punkt, so ist die Gleichung der Curve nothwendig von der Form

$$x_3 u^{(3)} = u^{(4)} \quad \text{für} \quad u^{(3)} \text{ und } u^{(4)}$$

als homogene Functionen dritten und vierten Grades in x_1, x_2. Setzen wir dann

$$x_2 = \theta x_1,$$

so wird

$$x_3 \Theta^{(3)} = x_1 \Theta^{(4)} \quad \text{für} \quad \Theta^{(3)}, \ \Theta^{(4)}$$

als Functionen dritten und vierten Grades von dem Parameter θ; es sind also x_1, x_2, x_3 respective proportional zu $\Theta^{(3)}$, $\theta\Theta^{(3)}$, $\Theta^{(4)}$.

Diese Methode entspricht genau den allgemeinen Grundsätzen des Art. 44. Die veränderliche Gerade $x_2 = \theta x_1$, die durch den dreifachen Punkt geht, schneidet die Curve in nur

einem andern Punkt, dessen Coordinaten daher in θ rational ausdrückbar sind. Und wir würden zu denselben Ergebnissen gelangt sein, wie wir sie entwickelten, wenn wir in den vorher untersuchten Fällen die nämliche Methode angewendet hätten; wenn wir also im Falle der Curve mit drei Doppelpunkten den veränderlichen Punkt als den beweglichen Schnittpunkt der Curve mit einem Kegelschnitt betrachteten, der durch die Doppelpunkte und einen weiteren festen Punkt der Curve geht.

Wir heben endlich den Fall einer Curve vierter Ordnung mit dreifachem Punkt $x_1^3 x_2 = x_3^4$ besonders hervor, weil er genau in der Weise des Art. 213. behandelt werden kann. Die Curve hat ausser dem dreifachen Punkt nur einen Undulationspunkt und ihre Reciproke ist eine Curve von derselben Art.

Invarianten und Covarianten von Curven vierter Ordnung.

293. Wenn wir die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in voller Länge schreiben müssen, so wollen wir sie in der Form schreiben

$$\begin{aligned} a x_1^4 + b x_2^4 + c x_3^4 + 6 f x_2^2 x_3^2 + 6 g x_3^2 x_1^2 + 6 h x_1^2 x_2^2 \\ + 12 l x_1^2 x_2 x_3 + 12 m x_2^2 x_3 x_1 + 12 n x_3^2 x_1 x_2 \\ + 4 a_2 x_1^3 x_2 + 4 a_3 x_1^3 x_3 \\ + 4 b_1 x_2^3 x_1 + 4 b_3 x_2^3 x_3 + 4 c_1 x_3^3 x_1 + 4 c_2 x_3^3 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Concomitante der niedrigsten Ordnung in den Coefficienten ist die Contravariante des Art. 93, vom zweiten Grade in den Coefficienten, deren symbolischer Ausdruck $(\xi 12)^4$ ist und durch deren Verschwinden ausgedrückt wird, dass die gerade Linie ξ_i die Curve vierter Ordnung in vier Punkten schneidet, für welche die Invariante S verschwindet. („Kegelschnitt" Art. 340., $S_{4,2}$). Wir werden diese Contravariante σ nennen; sie ist vom vierten Grade in den ξ_i und wir schreiben ihre Coefficienten A_1 B_1 etc. und geben in folgendem ihre Werthe:

$$A = bc + 3f^2 - 4 b_3 c_2, \; B = ca + 3g^2 - 4 c_1 a_3,$$
$$C = ab + 3h^2 - 4 a_2 b_1;$$

$$F = af + gh + 2l^2 - 2a_2 n - 2a_3 m,$$
$$G = bg + hf + 2m^2 - 2b_3 l - 2b_1 n,$$
$$H = ch + fg + 2n^2 - 2c_1 m - 2c_2 l;$$
$$L = 2fl - mn - gb_3 - hc_2 + b_1 c_1,$$
$$M = 2gm - nl - hc_1 - fa_3 + c_2 a_2,$$
$$N = 2hn - lm - fa_2 - gb_1 + a_3 b_3;$$
$$A_2 = 3mc_2 - 3nf - cb_1 + b_3 c_1,$$
$$A_3 = 3nb_3 - 3mf - bc_1 + b_1 c_2;$$
$$B_3 = 3na_3 - 3lg - ac_2 + c_1 a_2,$$
$$B_1 = 3lc_1 - 3ng - ca_2 + c_2 a_3;$$
$$C_1 = 3lb_1 - 3mh - ba_3 + a_2 b_3,$$
$$C_2 = 3ma_2 - 3lh - ab_3 + a_3 b_1.$$

294. Die eben entwickelte Contravariante ist die Evectante der einfachsten Invariante **A**, welche vom dritten Grade in den Coefficienten ist und die den symbolischen Ausdruck $(123)^4$ hat; d. h. aus welcher σ hervorgeht durch Vollzug der Operation

$$\xi_1^4 \frac{d}{da} + \xi_2^4 \frac{d}{db} + \xi_3^4 \frac{d}{dc} + \xi_2^2 \xi_3^2 \frac{d}{df} + \text{etc.};$$

so dass umgekehrt aus den vorher gefundenen Werthen der Coefficienten von σ die von **A** abgeleitet werden können. Es ist

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = abc &+ 3(af^2 + bg^2 + ch^2) - 4(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1) \\ &+ 12(fl^2 + gm^2 + hn^2) + 6fgh - 12lmn \\ &- 12(a_2nf + a_3mf + b_1nb + b_3lg + c_1mh + c_2nh) \\ &+ 12(lb_1c_1 + mc_2a_2 + na_3b_3) + 4(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2).\end{aligned}$$

In der Bezeichnung des Art. 224. erscheint **A** in der Form

$$r(d^2) + 4(dca) + 3(db^2) - 12(c^2b)$$

mit $(d^2) = d_0d_4 - 4d_1d_3 + 3d_2^2$, $(dca) = a_0\{d_1c_3 - 3d_2c_2 + 3d_3c_1 - d_4c_0\} + a_1\{d_3c_0 - 3d_2c_1 + 3d_1c_2 - d_0c_3\}$,
$(db^2) = d_0b_2^2 - 4d_1b_1b_2 + 4d_2b_1^2 + 2d_2b_0b_2 - 4d_3b_0b_1 + d_4b_0^2$,

$$(c^2b) = b_2(c_0c_2 - c_1^2) - b_1(c_0c_3 - c_1c_2) + b_0(c_1c_3 - c_2^2);$$

wo die Invarianten (d^2), (dca), etc. aus der Theorie der binären Formen wohl bekannt sind.

295. Die nächst einfache Invariante ist vom sechsten Grade in den Coefficienten. Man kann sie aus den sechs

Gleichungen, die durch zweifache Differentiation der gegebenen Gleichung nach den x_i entstehen, durch dialytische Elimination der sechs Grössen $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_3 x_1, x_1 x_2, x_2 x_3$ bilden; wir bezeichnen sie durch **B** und ihre Determinantenform ist also

$$\begin{vmatrix} a, & h, & g, & l, & a_3, & a_2 \\ h, & b, & f, & b_3, & m, & b_1 \\ g, & f, & c, & c_2, & c_1, & n \\ l, & b_3, & c_2, & f, & n, & m \\ a_3, & m, & c_1, & n, & g, & l \\ a_2, & b_1, & n, & m, & l, & h \end{vmatrix}$$

Wir merken an, dass Clebsch diese Invariante gebraucht hat, um zu zeigen, dass die Form

$$p^4 + q^4 + r^4 + s^4 + t^4 = 0$$

mit p, q, r, s, t als linearen Functionen der Coordinaten nicht jede beliebige Curve vierter Ordnung darstellen kann. Sie enthält vierzehn unabhängige Constanten, weil die $p, q,$ etc. je drei beliebige Constanten enthalten, und kann daher auf den ersten Blick als eine kanonische Form angesehen werden, auf die jede ternäre biquadratische Form gebracht werden kann. Aber indem man für sie die Invariante **B** bildet, findet man, dass dieselbe verschwindet und dass diese Form daher nur eine Familie von Curven vierter Ordnung darzustellen vermag, für die eben die charakteristische Relation besteht $\mathbf{B} = 0$.[60])

296. Bei Berechnung des Werthes von **B** ist es vortheilhaft, den folgenden Werth einer symmetrischen Determinante mit sechs Reihen und Zeilen zu benutzen, deren Elemente durch a^2, ab, ac, etc.; ba, b^2, etc.; etc. bezeichnet sind, nämlich

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2d^2e^2f^2 &- \Sigma\, a^2b^2c^2d^2(ef)^2 + 2\,\Sigma\, a^2b^2c^2.\, de.\, ef.\, fd \\ &+ \Sigma\, a^2b^2(cd)^2(ef)^2 - 2\Sigma\, a^2b^2.\, cd.\, de.\, ef.\, fc \\ &+ 2\,\Sigma\, a^2.\, bc.\, cd.\, de.\, ef.\, fb - 2\,\Sigma\, a^2(bc)^2\, de.\, ef.\, fd \\ &+ 2\,\Sigma\,(ab)^2\, cd.\, de.\, ef.\, fc - \Sigma\,(ab)^2(cd)^2(ef)^2 \\ &- 2\,\Sigma\, ab.\, bc.\, cd.\, de.\, ef.\, fa + 2\,\Sigma\, ab.\, bc.\, ca.\, de.\, ef.\, fd. \end{aligned}$$

Der entwickelte Werth von **B** ist folgender: Wir deuten die Glieder meist nur durch Punkte an, welche durch Buchstaben- und gleichzeitige Indices-Verschiebung, wo Indices

auftreten, aus den nächstvorhergehenden entspringen, wobei a, b, c; f, g, h; l, m, n; und die a_i, b_j, c_k cyklische Gruppen bilden.

$$abc\,(fgh - fl^2 - gm^2 - hn^2 + 2lmn) + bc\,\{l^4 - l^2gh$$
$$+ 2\,(gm - nl)\,a_2 l + 2\,(hn - ml)\,a_3 l + (n^2 - fg)\,a_2^2$$
$$+ (m^2 - fh)\,a_3^2 + 2\,(fl - mn)\,a_2 a_3\} + \cdot\cdot$$
$$-(af^2 + bg^2 + ch^2)\,(fgh - fl^2 - gm^2 - hn^2 + 4lmn)$$
$$+ 3\,(afm^2n^2 + bgn^2l^2 + chl^2m^2) + 2af^2\,(b_1gn + c_1hm) + \cdot\cdot$$
$$- 2af\,(b_1n^3 + c_1m_3) - \cdot\cdot + 2afl\,(b_3n^2 + c_2m^2) + \cdot\cdot$$
$$- 2afmn\,(b_3g + c_2h) - \cdot\cdot - 2a\,(b_3mn^3 + c_2m^3n) - \cdot\cdot$$
$$+ a\,(b_3^2gn^2 + c_2^2hm^2) + \cdot\cdot + 2afl\,(mb_3c_1 + nb_1c_2) + \cdot\cdot$$
$$+ 2amn\,(mb_3c_1 + nb_1c_2) + \cdot\cdot - 2af(hnb_3c_1 + gmb_1c_2) - \cdot\cdot$$
$$+ 2\,(fgh + lmn)\,(ab_3c_2 + bc_1a_3 + ca_2b_1) - 2afl^2b_3c_2 - \cdot\cdot$$
$$- 2\,(af^2lb_1c_1 + bg^2mc_2a_2 + ch^2na_3b_3)$$
$$- 2ab_3c_2\,(b_1gn + c_1hm) - \cdot\cdot + 2\,ab_1c_1\,(c_2m^2 + b_3n^2) + \cdot\cdot$$
$$- 2al\,(mb_1c_2^2 + nc_1b_3^2) - \cdot\cdot + a\,(hb_3^2c_1^2 + gb_1^2c_2^2) + \cdot\cdot$$
$$+ afb_1^2c_1^2 + \cdot\cdot + 2alb_3c_2b_1c_1 + \cdot\cdot$$
$$- 2\,ab_1c_1\,(mc_1b_3 + nb_1c_2) - \cdot\cdot + 2f^2g^2h^2$$
$$- fgh\,(fl^2 + gm^2 + hn^2) + 10fghlmn - (fl^2 + gm^2 + hn^2)^2$$
$$+ 2lmn\,(fl^2 + gm^2 + hn^2) - l^2m^2n^2$$
$$+ 2\,(b_1gn + c_1hm)\,(gm^2 + hn^2 - 2fl^2 - fgh - lmn) + \cdot\cdot$$
$$+ (gh - l^2)\,(b_3g - c_2h)^2 + \cdot\cdot + 2\,a_2a_3f^2\,(2mn - fl) + \cdot\cdot$$
$$+ 2\,lb_1c_1\,(fgh + lmn + fl^2 - gm^2 - hn^2) + \cdot\cdot$$
$$- 2ghmnb_1c_1 - \cdot\cdot + 2\,(b_1c_2gm + b_3c_1hn)\,(gh + 2l^2) + \cdot\cdot$$
$$- 2\,(a_2^2c_1f^2m + b_3^2a_2g^2n + c_1^2b_3h^2l + a_3^2b_1f^2n + b_1^2c_2g^2l + c_2^2a_3h^2m)$$
$$+ 2fmn\,(a_2^2c_2 + a_3^2b_3) + \cdot\cdot$$
$$- 2\,(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2)\,(fl^2 + gm^2 + hn^2 + lmn)$$
$$- 2\,fa_2a_3\,(c_2m^2 + b_3n^2) - \cdot\cdot + 2\,(fl - mn)\,(gb_1c_2a_2 + hc_1a_3b_3) + \cdot\cdot$$
$$- (l^2b_1^2c_1^2 + m^2c_2^2a_2^2 + n^2a_3^2b_3^2)$$
$$+ 2\,(b_3c_1a_2 - c_2a_3b_1)\,(b_3gl + c_1hm + a_2fn - c_2hl - a_3fm - b_1gn)$$
$$+ 2\,(b_1c_1a_2a_3f^2 + c_2a_2b_3b_1g^2 + a_3b_3c_1c_2h^2)$$
$$- 2gh\,(b_3^2a_3c_1 + c_2^2a_2b_1) - \cdot\cdot + (4fl - 2mn)\,c_2a_2a_3b_3 + \cdot\cdot$$
$$+ 2\,(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2)\,(lb_1c_1 + mc_2a_2 + na_3b_3)$$
$$- (a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2).^2$$

297. In der Bezeichnung der Art. 224., 294. ist der Werth von **B**

$$r\,(d^3)\,(b^2) - r\,(d^2c^2b) + r\,(dc^4) - (d^3)\,(ba^2) + (d^2c^2a^2)$$
$$+ 2\,(d^2cb^2a) - (b^2)(d^2b^2) - 2\,(dc^3ba) + (dc^2b^3) - (c^2b)^2$$

mit folgenden Werthen der einzelnen Theile

$$(d^3) = d_0 d_2 d_4 + 2 d_1 d_2 d_3 - d_0 d_3^2 - d_4 d_1^2 - d_2^3;$$
$$(d^2 c^2 b) = b_0 \{c_3^2 (d_0 d_2 - d_1^2) + 2 c_3 c_2 (d_1 d_2 - d_0 d_3)$$
$$+ 2 c_1 c_3 (d_1 d_3 - d_2^2) + c_2^2 (d_0 d_4 - d_2^2) + 2 c_1 c_2 (d_2 d_3 - d_1 d_4)$$
$$+ c_1^2 (d_2 d_4 - d_3^3)\} + b_2 \{c_0^2 (d_2 d_4 - d_3^2) + 2 c_0 c_1 (d_2 d_3 - d_1 d_4)$$
$$+ 2 c_0 c_2 (d_1 d_3 - d_2^2) + c_1^2 (d_0 d_4 - d_2^2) + 2 c_1 c_2 (d_1 d_2 - d_0 d_3)$$
$$+ c_2^2 (d_0 d_2 - d_1^2)\} - 2 b_1 \{c_0 c_1 (d_2 d_4 - d_3^2)$$
$$+ c_0 c_2 (d_2 d_3 - d_1 d_4) + c_0 c_3 (d_1 d_3 - d_2^2) + c_1^2 (d_2 d_3 - d_1 d_4)$$
$$+ c_1 c_2 (d_0 d_4 + d_1 d_3 - 2 d_2^2) + (c_1 c_3 + c_2^2)(d_1 d_2 - d_0 d_3)$$
$$+ c_2 c_3 (d_0 d_2 - d_1^2)\};$$

hieraus entsteht $(d^2 c^2 a^2)$, indem man a_0^2, a_1^2, $a_0 a_1$ für b_0, b_2, b_1 einsetzt. Sodann

$$(d c^4) = d_0 (c_1 c_3 - c_2^2)^2 - 2 d_0 (c_0 c_3 - c_1 c_2)(c_1 c_3 - c_2^2)$$
$$+ d_2 \{(c_0 c_3 - c_1 c_2)^2 + 2 (c_0 c_2 - c_1^2)(c_1 c_3 - c_2^2)\}$$
$$- 2 d_3 (c_0 c_2 - c_1^2)(c_0 c_3 - c_1 c_2) + d_4 (c_0 c_2 - c_1^2)^2;$$
$$(b a^2) = b_2 a_0^2 - 2 b_1 a_0 a_1 + b_0 a_1^2; \quad (d^2 c b^2 a) = \{b_0 a_1 c_1$$
$$- b_1 (a_1 c_0 + a_0 c_1) + b_2 a_0 c_0\} P + \{b_0 a_1 c_2 - b_1 (a_1 c_1 + a_0 c_2)$$
$$+ b_2 a_0 c_1\} Q + \{b_0 a_1 c_3 - b_1 (a_1 c_2 + a_0 c_3) + b_2 a_0 c_2\} R$$

mit den Werthen

$$P = b_0 (d_2 d_4 - d_3^2) - b_1 (d_1 d_4 - d_2 d_3) + b_2 (d_1 d_3 - d_2^2),$$
$$Q = b_0 (d_2 d_3 - d_1 d_4) - b_1 (d_2^2 - d_0 d_4) + b_2 (d_1 d_2 - d_0 d_3),$$
$$R = b_0 (d_1 d_3 - d_2^2) - b_1 (d_0 d_3 - d_1 d_2) + b_2 (d_0 d_2 - d_1^2).$$

Ferner

$$(d^2 b^2) = (d_2 d_4 - d_3^2) b_0^2 + (d_0 d_4 - d_2^2) b_1^2 + (d_0 d_2 - d_1^2) b_3^2$$
$$+ 2 b_1 b_2 (d_1 d_2 - d_0 d_3) + 2 b_2 b_0 (d_1 d_3 - d_2^2) + 2 b_0 b_1 (d_2 d_3 - d_1 d_4);$$
$$(d c^3 b a) = a_0 \{P (c_1 c_3 - c_2^2)$$
$$+ Q (c_2 c_1 - c_0 c_3) + R (c_0 c_2 - c_1^2)\} + a_1 \{P' (c_0 c_2 - c_1^2)$$
$$+ Q' (c_1 c_2 - c_0 c_3) + R' (c_1 c_3 - c_2^2)\}$$ mit den Werthen

$$P = b_0 (c_2 d_2 - c_3 d_1) + b_1 (c_3 d_0 - c_1 d_2) + b_2 (c_1 d_1 - c_2 d_0),$$
$$Q = b_0 (c_2 d_3 - c_3 d_2) + b_1 (c_3 d_1 - c_1 d_3) + b_2 (c_1 d_2 - c_2 d_1),$$
$$R = b_0 (c_2 d_1 - c_3 d_3) + b_1 (c_3 d_2 - c_1 d_4) + b_2 (c_1 d_3 - c_2 d_2),$$
$$P' = b_0 (c_2 d_3 - c_1 d_1) + b_1 (c_0 d_4 - c_2 d_2) + b_2 (c_1 d_2 - c_0 d_3),$$
$$Q' = b_0 (c_2 d_2 - c_1 d_3) + b_1 (c_0 d_3 - c_2 d_1) + b_2 (c_1 d_1 - c_0 d_2),$$
$$R' = b_0 (c_2 d_1 - c_1 d_2) + b_1 (c_0 d_2 - c_2 d_0) + b_2 (c_1 d_0 - c_0 d_1).$$

Endlich

$$(d c^2 b^3) = d_0 \{c_3^2 b_0 b_1^2 - 2 c_3 c_2 (b_0 b_1 b_2 + b_1^3) + 2 c_3 c_1 b_1^2 b_2$$
$$+ c_2^2 (b_0 b_2^2 + 3 b_2 b_1^2) - 4 c_1 c_2 b_1 b_2^2 + b_2^3 c_1^2\}$$
$$- 2 d_1 \{c_3^2 b_0^2 b_1 - c_3 c_2 (b_0^2 b_2 + 2 b_0 b_1^2) + c_3 c_0 b_1^2 b_2$$
$$+ 2 c_2^2 b_0 b_1 b_2 + c_2 c_1 b_1^2 b_2 - 2 c_0 c_2 b_1 b_2^2 - c_1^2 b_1 b_2^2 + c_0 c_1 b_2^3\}$$
$$+ d_2 \{c_3^2 b_0^3 - 2 c_3 c_1 (b_0^2 b_2 + 2 b_0 b_1^2) + 2 c_3 c_0 (b_1^3 + b_0 b_1 b_2)$$

$$- c_2^2 (b_0 b_2^2 + 2 b_0 b_1^2) + 2 c_1 c_2 (b_1^3 + 5 b_0 b_1 b_2)$$
$$- 2 c_2 c_0 (b_0 b_2^2 + 2 b_2 b_1^2) - c_1^2 (b_0 b_2^2 + 2 b_2 b_1^2) + c_0^2 b_2^3 \}$$
$$- 2 d_3 \{ c_0^2 b_2^2 b_1 - c_0 c_1 (b_0 b_2^2 + 2 b_2 b_1^2) + c_0 c_3 b_0 b_1^2$$
$$+ 2 c_1^2 b_0 b_1 b_2 + c_1 c_2 b_0 b_1^2 - 2 c_1 c_3 b_0^2 b_1 - c_2^2 b_1 b_0^2 + c_2 c_3 b_0^3 \}$$
$$+ d_4 \{ c_0^2 b_2 b_1^2 - 2 c_0 c_1 (b_0 b_1 b_2 + b_1^3) + 2 c_0 c_2 b_1^2 b_0$$
$$+ c_1^2 (b_0^2 b_2 + 3 b_0 b_1^2) - 4 c_0 c_1 b_1 b_0^2 + b_0^3 c_2^2 \}; \text{ und}$$
$$(c^2 b) = b_2 (c_0 c_2 - c_1^2) - b_1 (c_0 c_3 - c_1 c_2) + b_0 (c_1 c_3 - c_2^2).$$

298. Wir haben im Art. 222. gesehen, dass wir durch die Kenntniss einer biquadratischen Covariante in der Lage sein würden, aus jeder bekannten Invariante eine Reihe anderer Invarianten abzuleiten und wir können eine solche Covariante erhalten, indem wir die Gleichung bilden für den Ort eines Punktes, dessen erste Polare eine Curve dritter Ordnung mit verschwindender Invariante S ist, oder indem wir die Invariante S (Art. 221.) der cubischen Polare gleich Null setzen. Die Covariante S der biquadratischen Form

$$a x^4 + b y^4 + c z^4 + d u^4 + e v^4 = 0$$

ist von der Form

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{u} + \frac{e}{v} = 0.$$

Und da wir früher sahen, dass die erstere Form, obwohl scheinbar eine hinreichende Zahl verfügbarer Constanten enthaltend, eine specielle ist, auf welche die Gleichung einer Curve vierter Ordnung nicht allgemein reduciert werden kann, so gilt dasselbe von der letztern; nur unter Bestand einer gewissen Relation zwischen den Invarianten ist diese Reduction ausführbar. Unter den verschiedenen biquadratischen Covarianten, welche existieren, ist die vorerwähnte vom niedrigsten Grade in den Coefficienten. Jede andere Covariante vom vierten Grade in diesen muss von der Form

$$S + \mathbf{k}\,\mathbf{A}\,U$$

sein für $\mathbf{k}$ als eine numerische Constante, und $\mathbf{A}$ als die erste Invariante; man bestätigt diess leicht in Bezug auf die Covariante, die man erhält, indem man von der Contravariante des Art. 293. die Contravariante bildet.

299. Die allgemeinen Werthe der Coefficienten von S sind nicht berechnet worden; ebensowenig irgend welche höhere Invarianten. Wir haben es jedoch für nützlich ge-

halten, den besondern Fall zu untersuchen, wo sich die biquadratische Form auf ihre ersten sechs Glieder reduciert, also

$$ax_1^4 + bx_2^4 + cx_3^4 + 6x_2^2x_3^2 + 6x_3^2x_1^2 + 6x_1^2x_2^2 = 0.$$

Diese Form enthält nur elf Constanten implicite und ist daher eine sehr specielle Form der allgemeinen Gleichung; aber sie bietet sich leicht der Berechnung dar, weil die Covariante S von derselben Form ist, schreiben wir

$$\mathsf{a}x_1^4 + \mathsf{b}x_2^4 + \mathsf{c}x_3^4 + 6\mathsf{f}x_2^2x_3^2 + 6\mathsf{g}x_3^2x_1^2 + 6\mathsf{h}x_1^2x_2^2 = 0;$$

deshalb kann nach Art. 222. aus jeder Invariante eine andere durch Vollzug der Operation

$$\mathsf{a}\frac{d}{da} + \mathsf{b}\frac{d}{db} + \text{etc.}$$

abgeleitet werden, eine Operation, die wir durch den Buchstaben Φ bezeichnen wollen. Indess freilich Invarianten, die im Allgemeinen existieren, für diesen speciellen Fall verschwinden können, so bleiben doch die Invarianten, die in diesem Falle verschieden sind, auch im Allgemeinen verschieden. Bei Berechnung der Invarianten unseres Specialfalls erhalten wir natürlich alle die Glieder der allgemeinen Invarianten, welche nur die Coefficienten a, b, c, f, g, h enthalten.

Die Werthe der Coefficienten von S für die fragliche Form sind nun

$$\mathsf{a} = 6g^2h^2,\ \mathsf{b} = 6h^2f^2,\ \mathsf{c} = 6f^2g^2;$$
$$\mathsf{f} = bcgh - f(bg^2 + ch^2) - f^2gh,$$
$$\mathsf{g} = cahf - g(ch^2 + af^2) - fg^2h,$$
$$\mathsf{h} = abfg - h(af^2 + bg^2) - fgh^2.$$

Wir merken auch an, dass die Werthe der Coefficienten der Covariante σ im Art. 293. in diesem Falle sind

$$A = bc + 3f^2,\ B = ca + 3g^2,\ C = ab + 3h^2,$$
$$F = af + gh,\ G = bg + hf,\ H = ch + fg.$$

300. Für das Weitere scheint es zweckmässig, die folgenden Abkürzungen zu gebrauchen:

$$abc = L,\ af^2 + bg^2 + ch^2 = P,\ bcg^2h^2 + cah^2f^2 + abf^2g^2 = Q,\ fgh = R;$$

dann werden die Ausdrücke der vorher berechneten Invarianten für den speciellen Fall

$$\mathbf{A} = L + 3P + 6R,\ \mathbf{B} = LR + 2R^2 - PR \text{ oder}$$
$$\mathbf{B} = AR - 4PR - 4R^2.$$

Die Ergebnisse der Operation Φ an diesen verschiedenen Grössen sind

$$\Phi(L) = 6Q,\ \Phi(P) = 6LR - 2PR - 4Q + 18R^2,$$
$$\Phi(Q) = -2PQ - 4RQ - 6LR^2 + 12PR^2 + 4LPR,$$
$$\Phi(R) = Q - 2PR - 3R^2, \text{ also } \Phi(\mathbf{A}) = 18\mathbf{B}.$$

Wir können sodann eine neue Invariante vom neunten Grade in den Coefficienten erhalten, indem wir die Operation Φ an $\mathbf{B}$ vollziehen. Das Ergebniss ist

$$\Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{C}_1 = Q(L - P + 14R) - LR(2P + 9R) + R(2P^2 - 3PR - 30R^2).$$

Diese Invariante ist aber nicht die einzige unabhängige Invariante neunten Grades in den Coefficienten. Wenn wir die allgemeine Gleichung der Curve vierter Ordnung in der Form

$$u_4 + u_3 z + u_2 z^2 + cz^4 = 0$$

schreiben, so sind die höchsten Potenzen von c. die in einer Invariante neunten Grades begegnen, die dritten und c ist mit einer Invariante sechsten Grades in den Coefficienten von der binären biquadratischen Form u_4 multipliciert. Diese letztere Invariante muss von der Form

$$s^3 + kt^2$$

sein und jede Invariante neunten Grades kann in zwei Theile zerlegt werden, von denen der eine c^3 mit s^3 und der andere c^3 mit t^2 multipliciert zeigt. Der erste Theil kann in der Form

$$l\mathbf{A}^3 + m\,\mathbf{A}\mathbf{B} + n\mathbf{C}_1$$

ausgedrückt werden mit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}_1$ als den vorher berechneten Invarianten. Für den Ausdruck des letzteren ist eine neue Invariante nöthig, und wir wollen einen der Wege angeben, auf denen dieselbe erhalten werden kann. Es ist aber vorerst nöthig, einige andere Covarianten und Contravarianten zu erwähnen.

301. Der Werth der Hesse'schen Covariante für unsern Fall ist, mit Andeutung einiger durch die cyklische Verschiebung $a, b, c; f, g, h$ aus den vorhergehenden entstehenden Glieder durch Punkte

$$agh x_1^6 + bhf x_2^6 + cfg x_3^6 + (abg + ahf - 3gh^2) x_1^4 x_2^2 + \cdots$$
$$+ (ach + afg - 3g^2 h) x_1^4 x_3^2 + \cdots$$
$$+ (abc - 3af^2 - 3bg^2 - 3ch^2 + 18fgh)\, x_1^2 x_2^2 x_3^2.$$

Es wurde ferner schon in Art. 92. constatiert, dass eine Curve vierter Ordnung eine Contravariante sechster Klasse hat, deren Symbol $(\xi 12)^2 (\xi 23)^2 (\xi 31)^2$ ist; der Werth derselben für den betrachteten Fall ist in derselben Abkürzung wie vorher

$$(bcf - f^3) \xi_1^6 + \cdots + (bcg + 6cfh - 3f^2 g) \xi_1^4 \xi_2^2 + \cdots$$
$$+ (bch + 6bfg - 3f^2 h) \xi_1^4 \xi_3^2 + \cdots$$
$$+ \{abc - 3(af^2 + bg^2 + ch^2) + 48fgh\}\, \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2.$$

Wenn man in diese Formen Differentialsymbole einführt, und die mit der einen ausgesprochenen Operationen an der andern dieser Formen ausführt, so erhält man

$$\mathbf{A}^2 + 576\,\mathbf{B}.$$

Wenn wir mit der Contravariante σ an der Hesse'schen Covariante operieren, so entsteht eine quadratische Covariante vom fünften Grade in den Coefficienten und wenn wir mit der biquadratischen Form selbst an der Contravariante sechsten Grades operieren eine quadratische Contravariante, vom vierten Grade in den Coefficienten; diese Formen sind

$$(af x_1^2 + bg x_2^2 + ch x_3^2)(L + 3P + 30R)$$
$$+ (gh x_1^2 + hf x_2^2 + fg x_3^2)(10L - 6P - 12R)$$
$$- 4(a^2 f^3 x_1^2 + b^2 g^3 x_2^2 + c^2 h^3 x_3^2);$$
$$(f \xi_1^2 + g \xi_2^2 + h \xi_3^2)(3L + 5P + 2R)$$
$$- 8(af^3 \xi_1^2 + bg^3 \xi_2^2 + ch^3 \xi_3^2)$$
$$+ 4(bcgh \xi_1^2 + cahf \xi_2^2 + abfg \xi_3^2).$$

Wenn wir in jede dieser beiden Concomitanten Differentialsymbole einsetzen und damit an der andern operieren, so erhalten wir eine neue Invariante

$$\mathbf{C}_2 \equiv (80L - 32P + 448R)\, Q + 3P^3 - 6P^2 L - 134 P^2 R$$
$$+ 3PL^2 + 128 PLR - 60 PR^2 + 102 L^2 R$$
$$+ 408 LR^2 - 72 R^3.$$

Für die betrachtete biquadratische Form scheint keine andere unabhängige Invariante neunten Grades zu existieren.

Wenn wir z. B. mit der quadratischen Contravariante an der biquadratischen Form selbst operieren, so ist das

Resultat in Function der vorher gefundenen Invarianten darstellbar, nämlich in der Form

$$3\mathbf{c}_2 - 80\mathbf{c}_1 - 180\mathbf{AB}.$$

Mit Vereinfachung könnten wir vielleicht als die zweite unabhängige Invariante wählen

$$\tfrac{1}{3}(\mathbf{c}_2 - 32\,\mathbf{c}_1)$$

oder

$$\mathbf{c}_3 \equiv 16\,QL + P^3 - 2\,P^2L - 66\,P^2R + PL^2 + 64\,PLR + 12\,PR^2 + 34\,L^2R + 232\,LR^2 + 296\,R^3.$$

302. Wir gehen zur Bildung von Invarianten vom zwölften Grade in den Coefficienten über. Zuerst die cubische Invariante der biquadratischen Form S bilden wir mit Hilfe der Formeln

$$L' = 216\,R^4,$$

$$P' = 6\,\{Q^2 - 2\,PQR - 4\,R^2Q + 2\,P^2R^2 - 2\,PLR^2 + 4\,PR^3 + 6\,LR^3 + 3\,R^4\},$$

$$R' = Q^2 - 2\,LRQ - P^2R^2 - 2\,PR^3 + L^2R^2 + 4\,LR^3 - R^4,$$

$$\text{also } L' + 3\,P' + 6\,R' = 6\,D_1,$$

wo

$$\mathbf{D}_1 \equiv 4\,Q^2 + Q\,(-6\,PR - 2\,LR - 12\,R^2) + 5\,P^2R^2 - 6\,PLR^2 + 10\,PR^3 + L^2R^2 + 22\,LR^3 + 44\,R^4 \text{ ist.}$$

Wir erhalten ferner durch Vollzug der Operation Φ an $\mathbf{c}_1$

$$\mathbf{D}_2 = 24\,Q^2 + Q\,(4\,P^2 - 4\,PL - 84\,PR - 20\,LR - 248\,R^2) - 4\,P^3R - 14\,P^2R^2 + 4\,PL^2R + 144\,PLR^2 + 444\,PR^3 - 18\,L^2R^2 - 84\,LR^3 + 216\,R^4.$$

Durch Combination dieser beiden bilden wir

$$\mathbf{D}_2 - 6\,\mathbf{D}_1 = 4\,\mathbf{D}_3 \text{ wo}$$

$$\mathbf{D}_3 \equiv Q\,(P^2 - PL - 12\,PR - 2\,LR - 44\,R^2) - P^3R - 11\,P^2R^2 + PL^2R + 45\,PLR^2 + 96\,PR^3 - 6\,L^2R^2 - 54\,LR^3 - 12\,R^4 \text{ ist.}$$

In Function dieser und der andern vorher angegebenen Invarianten können die andern Invarianten zwölften Grades, wie $\Phi\,(\mathbf{c}_2)$ und die Discriminante des contravarianten Kegelschnitts ausgedrückt werden. Ebenso auch die Invarianten der biquadratischen Contravarianten; wir haben

$$L' = L^2 + 3\,PL + 9\,Q + 27\,R^2,$$

$$R' = LR + Q + PR + R^2,$$

$$P' = 3P^2 - 5Q + 6PR + PL + 6LR + 9R^2,$$

$$Q' = 3Q^2 + Q(3P^2 + 4PL + 24PR + L^2 - 8LR + 6R^2) + 12P^2LR + 18P^2R^2 + 4PL^2R + 10PLR^2 + 36PR^3 - 36LR^3 + 27R^4$$

und sodann

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + 12\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = 4\mathbf{D}_1 + \mathbf{A}\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}^2\mathbf{B} - 12\mathbf{B}^2.$$

303. Es ist zu bemerken, dass während nur eine quadratische Contravariante vom vierten Grade in den Coefficienten existiert, zwei quadratische Convarianten fünften Grades vorhanden sind, nämlich ausser den früher gegebenen diejenige, welche durch Operation mit der quadratischen Contravariante an der biquadratischen Form selbst entsteht; sie ist

$$(3L + 9P + 10R)(afx_1^2 + bgx_2^2 + chx_3^2) + (10L + 2P + 4R)(ghx_1^2 + ..) - 12(a^2f^3x_1^2 + ..).$$

Durch Verbindung mit der früher gegebenen bildet man die einfache Form

$$4R(afx_1^2 + ..) + (L - P - 2R)(ghx_1^2 + ..)$$

Die Discriminante der Letztern giebt die einfachste Invariante vom fünfzehnten Grade, nämlich für

$$M \equiv L - P - 2R,$$

$$\mathbf{E}_1 \equiv 16MR^2Q + 4M^2R^2P + M^3R^2 + 64LR^4;$$

oder

$$\mathbf{E}_1 \equiv 16(L - P - 2R)QR^2 + R^2\{3P^3 - 5P^2L + 10P^2R + PL^2 - 4PLR + 4PR^2 + L^3 - 6L^2R + 76LR^2 - 8R^3\}.$$

Die drei übrigen Invarianten des Kegelschnittssystems sind übrigens auch Invarianten der Curve vierter Ordnung vom nämlichen Grade und wir können ausser ihnen noch $\Phi\mathbf{D}_1$, $\Phi\mathbf{D}_2$, etc. berechnen; alle sind mittelst $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$[61]) ausdrückbar, wenn das Letztere ist

$$\mathbf{E}_2 \equiv 16(L - P - 2R)Q^2 + (3P^3 - 5P^2L - 6P^2R + PL^2 - 228PLR - 2172PR^2 + L^3 + 298L^2R + 2636LR^2 - 4296R^3)Q + R(-12P^4 + 44P^3L - 52P^2L^2 + 20PL^3) + R^2(348P^3 - 852P^2L + 308PL^2 + 324L^3) + R^3(1320P^2 - 416PL + 216L^2) + 720PR^4 + 11376R^4 - 864R^5.$$

Es giebt ferner zwei unabhängige Invarianten vom Grade achtzehn; die erste ist das $\mathbf{C}_1$ der biquadratischen Contravariante, nämlich

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 \equiv\ & 128\,Q^3 \\
& + Q^2(-48\,P^2 + 80\,PL + 368\,PR + 32\,L^2 - 528\,LR - 160\,R^2) \\
& + Q\,(9\,P^4 - 12\,P^3L - 108\,P^3R - 2\,P^2L^2 + 324\,P^2LR \\
& + 240\,P^2R^2 + 4\,PL^3 + 60\,PL^2R - 288\,PLR^2 + 528\,PR^3 \\
& + L^4 - 20\,L^3R - 400\,L^2R^2 - 2512\,LR^3 - 144\,R^4) \\
& + 18\,P^5R - 24\,P^4LR + 27\,P^4R^2 - 4\,P^3L^2R + 180\,P^3LR^2 \\
& + 60\,P^3R^3 + 8\,P^2L^3R + 114\,P^2L^2R^2 + 716\,P^2LR^3 \\
& + 288\,P^2R^4 + 2\,PL^4R - 44\,PL^3R^2 + 52\,PL^2R^3 \\
& - 592\,PLR^4 + 288\,PR^5 - 21\,L^4R^2 - 60\,L^3R^2 - 720\,L^2R^4 \\
& - 2076\,LR^5 + 240\,R^6.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_2 \equiv\ & 128\,Q^3 + Q^2\,(-8\,P^2 - 240\,PL - 5312\,PR + 312\,L^2 \\
& + 9536\,LR + 11680\,R^2) + Q\,(-18\,P^4 + 54\,P^3L + 1146\,P^3R \\
& - 54\,P^2L^2 - 1978\,P^2LR + 7548\,P^2R^2 + 18\,PL^3 + 262\,PL^2R \\
& - 4432\,PLR^2 + 49272\,PR^3 + 570\,L^3R + 1620\,L^2R^2 \\
& + 6648\,LR^3 + 77808\,R^4) + 24\,P^5R - 76\,P^4LR - 1224\,P^4R^2 \\
& + 84\,P^3L^2R + 2622\,P^3LR^2 - 13032\,P^3R^3 - 36\,P^2L^3R \\
& - 946\,P^2L^2R^2 + 8268\,P^2LR^3 - 30192\,P^2R^4 + 4\,PL^4R \\
& - 822\,PL^3R^2 - 368\,PL^2R^3 - 73784\,PLR^4 - 5472\,PR^5 \\
& + 114\,L^4R^2 - 1524\,L^3R^3 - 14712\,L^2R^4 - 113904\,LR^5 \\
& + 25920\,R^6.
\end{aligned}
$$

Auch in diesem speciellen Falle ist keine lineare Abhängigkeit der gegebenen Invarianten höherer Grade von denen der niederen erkannt worden, noch haben wir zu entdecken vermocht, dass die Discriminante in Function der niedrigeren Invarianten darstellbar sei.

Siebentes Kapitel.

Transcendente Curven.

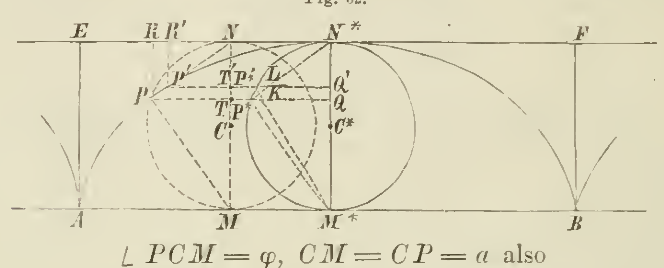
304. Nachdem bisher ausschliesslich Gleichungen discutiert wurden, welche auf eine endliche Zahl von Gliedern mit positiven ganzen Potenzen von x und y reducierbar sind, bleibt Einiges von den Eigenschaften der durch transcendente Gleichungen dargestellten Curven zu erwähnen. Da dieselben Functionen enthalten, welche nur durch unendliche Reihen von algebraischen Gliedern ausdrückbar sind, so sind transcendente Curven als Curven von unendlich hoher Ordnungszahl zu betrachten, als Curven also, die von einer geraden Linie in unendlich vielen Punkten geschnitten werden und die eine unbeschränkte Anzahl vielfacher Punkte und Tangenten haben können. Es lässt sich daher eine allgemeine Theorie von den Singularitäten dieser Curven nicht geben, aber es ist nothwendig, die hauptsächlichsten Eigenschaften einiger der merkwürdigsten unter ihnen zu entwickeln.

Vorher gedenken wir einer von Leibnitz als interscendent bezeichneten Classe von Gleichungen, in denen nämlich die Variabeln als mit irrationalen Exponenten behaftet auftreten, z. B. $y = x^{\sqrt{2}}$. Wenn wir hier für $\sqrt{2}$ die Reihe rationaler Brüche substituieren, welche als Näherungswerthe der Wurzel erscheinen, so erhalten wir eine Reihe von algebraischen Curven von stets wachsender Ordnungszahl, die sich der Gestalt der geforderten Curve mehr und mehr annähern, ohne sie zu genau darzustellen, so lange die Ordnungszahl endlich ist.

Unter den transcendenten Curven verdient nach dem historischen Interesse sowohl als nach der Mannigfaltigkeit ihrer physikalischen Anwendungen die Cycloide den ersten

Platz. Sie wird erzeugt durch die Bewegung eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises, der längs einer geraden Linie rollt. Ist A die Anfangslage des bewegten Punktes und P die dem Kreise vom Mittelpunkt C und der Berührungsstelle M mit der Basisgeraden entsprechende Lage desselben, so ist nothwendig arc $PM = AM$. und mit den Bezeichnungen

Fig. 62.



$$\angle PCM = \varphi,\ CM = CP = a \text{ also}$$
$$y = a\,(1 - \cos\varphi),\ x = a\,(\varphi - \sin\varphi).$$

Daraus ergiebt sich durch Elimination die Gleichung der Curve

$$a - y = a \cos\left\{\frac{x + \sqrt{2\,ay - y^2}}{a}\right\};$$

es ist aber im Allgemeinen zweckmässiger, die Curve als durch die beiden vorigen Gleichungen bestimmt zu betrachten. Die Form derselben wird leicht als die in der Figur dargestellte erkannt und zwar wegen der unbegrenzten Fortsetzbarkeit der Rollbewegung des Kreises als zusammengesetzt aus unendlich vielen gleichen Stücken $= AN^*B$, die in ihren Vereinigungspunkten A, B Spitzen zeigen.

Ist $M^*P^*N^*$ die dem höchsten Punkte N^* entsprechende Lage des erzeugenden Kreises, so ist wegen $AM =$ arc. PM, $AM^* =$ arc. $M^*P^*N^*$ auch $M^*M = P^*P =$ arc. P^*N^*, d. h. die Curve wird erzeugt, indem man die Ordinaten eines Kreises so verlängert, dass die Verlängerung dem entsprechenden vom Endpunkt des Durchmessers aus gemessenen Bogen gleich ist. Setzen wir $\angle P^*C^*N^* = \theta$, so wird die Curve auf AM^*, M^*N^* als Axen bezogen durch die Gleichungen

$$y = a\,(1 + \cos\theta),\ x = a\,(\theta + \sin\theta)$$

dargestellt.

305. Die Construction der Tangente der Curve ergiebt

sich aus der Bemerkung, dass in jedem Moment der Bewegung des erzeugenden Kreises der tiefste Punkt M dieses Letzteren in Ruhe ist, so dass die Bewegung eines Punktes P in demselben Augenblick eine Kreisbewegung um M und die Normale seiner Bahn nach M gerichtet, die Tangente derselben also die Gerade PN ist.

Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi$$

beweist das Nämliche analytisch, denn die Tangente macht darnach mit der Axe der x einen Winkel, welcher zu $\angle CNP$ oder $\frac{1}{2}\varphi$ complementär ist.

Wir verbinden hiermit die geometrischen Beweise der Haupteigenschaften der Cycloide.

Die von der Cycloide mit ihrer Basis umgrenzte Fläche ist dreimal so gross wie die Fläche des erzeugenden Kreises. Denn man hat das Flächenelement $PP'R'R =$ El. $PP'T'T =$ El. $P^*P^{*\prime}Q'Q$ und somit die von der Cycloide begrenzte Fläche AEN^*FB der Fläche des erzeugenden Kreises gleich, oder weil die Fläche $AEFB$ das Vierfache der Letztern ist, die Fläche AN^*BM^* gleich dem Dreifachen der Fläche des erzeugenden Kreises.

Der Bogen N^*P der Cycloide ist doppelt so gross, wie die Sehne N^*P' des erzeugenden Kreises. Denn für L als Schnittpunkt von P^*N^* mit $P'Q'$ ist $P^{*\prime}L = P^{*\prime}P^*$ und somit K, der Schnittpunkt von P^*N^* mit $P^{*\prime}M^*$, der Mittelpunkt von P^*L; oder P^*L, das Wachsthum des Cycloidenbogens, ist das Doppelte von P^*K, dem Wachsthum der Kreissehne.

Bezeichnet also s den Bogen der Cycloide, b den Durchmesser des erzeugenden Kreises und x die Abscisse N^*Q vom Scheitel, so ist die Gleichung der Curve auch — nützlich in der Mechanik —

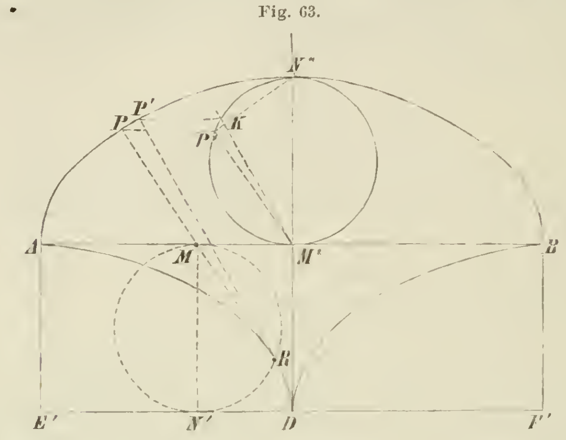
$$s^2 = 4bx.$$

Der Krümmungsradius ist doppelt so gross wie die Normale PM. Denn das von zwei auf einander folgenden Normalen gebildete Dreieck $PP'R$ hat seine Seiten parallel zu denen des Dreiecks P^*KM^* und da nach dem so eben Bewiesenen die Basis des ersten Dreiecks P^*L das

Doppelte von der des zweiten gleich $P^* K$ ist, so ist auch der Krümmungsradius PR das Doppelte von $P^* M^*$.

Die Evolute der Cycloide ist eine ihr gleiche Cycloide. Denn wenn wir einen die Basis in M berühren-

Fig. 63.



den Kreis durch den Krümmungsmittelpunkt R legen, so ist derselbe dem erzeugenden Kreis gleich und der Bogen $N'R$ ist gleich Bogen $N^* P^* = N'D$; d. h. der Ort von R ist die Cycloide, welche der auf der Geraden $E'F'$ rollende Kreis MRN' erzeugt.[62])

Man kann auch den Ort eines in der Ebene des erzeugenden Kreises gelegenen und mit ihm fest verbundenen Punktes untersuchen, einen Ort, den man als verlängerte Cycloide für einen Punkt ausserhalb des Kreises und als verkürzte Cycloide für Punkte innerhalb des Kreises, oder auch mit gemeinschaftlichem Namen Trochoide benennt. Die Aufstellung der Gleichungen und die Bestimmung der Formen dieser Curven bietet keine Schwierigkeiten und mag hier unterbleiben. Die Tangentenconstruction der Cycloiden geht auf sie über. Offenbar können diese Curven auch erzeugt werden durch das Rollen eines Kreises und einen auf demselben gelegenen Punkt P, wobei der Bogen PM in einem constanten Verhältniss zur Geraden AM bleibt.

306. Eine natürliche Erweiterung des Problems der Cycloide war die Discussion der Curve, welche ein Punkt beschreibt, der fest verbunden ist mit einem Kreise, welcher

auf der Peripherie eines andern Kreises abrollt. Man nennt die erzeugte Curve Epi- oder Hypo-Cycloide für den Punkt auf dem rollenden Kreise, jenachdem die Berührung desselben mit dem Grundkreise stets eine äussere oder stets eine innere Berührung ist; und man nennt sie entsprechend Epi- oder Hypo-Trochoide, wenn der erzeugende Punkt der Peripherie des rollenden Kreises nicht angehört.

Nehmen wir diejenige Lage CB des gemeinsamen Durchmessers beider Kreise, welche den erzeugenden Punkt enthält als Axe der x, und sei CO eine andere Lage des gemeinsamen Durchmessers, welcher die Lage Q des erzeugenden Punktes entspricht; sei dann

Fig. 64.

$$CN = a,\ ON = b,$$
$$\angle NCB = \varphi,$$
$$\angle PON = \psi,\ OQ = d,$$

so ist wegen der Gleichheit der Bogen BN und NP

$$a\varphi = b\psi.$$

Auch ist

$$< OQM = 180 - (\varphi + \psi)$$

und die Cordinaten von Q sind

$$y = (a + b) \sin \varphi - a \sin (\varphi + \psi),$$
$$x = (a + b) \cos \varphi - d \cos (\varphi + \psi),$$

oder für $a + b = mb$

$$y = mb \sin \varphi - a \sin m\varphi,$$
$$x = mb \cos \varphi - d \cos m\varphi;$$

Gleichungen, aus denen durch Elimination von φ die Gleichung der Curve entsteht, die nicht nothwendig transcendent ist. Denn sobald zwischen den Umfängen der beiden Kreise ein endlich angebbares Verhältniss besteht, kommt der erzeugende Punkt nach einer gewissen Anzahl von Umdrehungen in seine Anfangslage zurück und die Curve ist geschlossen oder von endlicher Ordnung, also algebraisch; sind dagegen beide Kreise nicht commensurabel, so kommt der erzeugende Punkt nach keiner endlichen Anzahl von Umdrehungen in seine Anfangslage zurück und die Curve ist transcendent.

Man erhält die Gleichungen der entsprechenden Cycloiden für $d = \pm b$, also

$$y = b\,(m \sin \varphi \pm \sin m\varphi),\quad x = b\,(m \cos \varphi \pm \cos m\varphi);$$

und zwar entsprechen die unteren Vorzeichen der Annahme, dass die Axe der x durch den erzeugenden Punkt auf dem festen Kreise, die oberen der andern, dass sie durch den erzeugenden Punkt in seiner Maximalentfernung vom festen Kreise geht.

307. Die den Fällen der Hypotrochoide und Hypocycloide entsprechenden Gleichungen entspringen aus den vorigen, wie man leicht bestätigt, durch Aenderung des Zeichens von b und werden daher von denselben mit umfasst, wenn man negative Werthe von m zulässt, oder indem man setzt $m = -n$ und $n = (a - b) : b$.

Die obigen Gleichungen geben für Vertauschung von b und m mit mb und $\frac{1}{m}$

$$y = mb\left(\frac{1}{m} \sin \varphi + \sin \frac{1}{m}\varphi\right),$$

$$x = mb\left(\frac{1}{m} \cos \varphi + \cos \frac{1}{m}\varphi\right),$$

und wir erkennen für $\varphi = m\psi$, dass diese Gleichungen denselben Ort darstellen, wie die vorigen, können somit beweisen, dass die nämliche Hypocycloide mit $b = \frac{1}{2}(c + a)$ und mit $b = \frac{1}{2}(c - a)$ erzeugt wird.[63]) Wenn der Radius des rollenden Kreises grösser ist als derjenige des festen, so kann die Hypocycloide auch als Epicycloide erzeugt werden, da dann

$$m\left(= -\frac{a-b}{b}\right)$$

positiv ist.

308. Man verzeichnet leicht die Tangenten dieser Curven, weil aus denselben Gründen, wie in Art. 305. die Gerade NQ die Normale der Curve in Q ist. Wir erkennen so auch, dass die von einem Punkte im Umfang einer Figur beim Rollen derselben auf einer andern erzeugte Curve in jedem Punkte eine Spitze haben muss, in welchem sie jener Grundlinie begegnet; denn nach jener Construction nähert sich der erzeugende Punkt an einer solchen Stelle der festen Curve in der Richtung ihrer Normale und entfernt sich unmittelbar

darnach in derselben Richtung von ihr, d. h. der besagte Punkt ist stationär und die Normale der festen Curve ist die entsprechende Tangente. Eine Epicycloide besteht daher aus einer Anzahl gleicher durch Rückkehrpunkte begrenzter Theile und die Radien des festen Kreises, die den letztern für einen solchen Theil entsprechen, sind unter dem Winkel $\frac{2b\pi}{a}$ zu einander geneigt. Die Zahl dieser Spitzen ist somit endlich für die algebraischen und unendlich gross für die transcendenten Curven dieser Art und im letztern Falle ist jeder Punkt der Basis einmal eine Spitze oder die Basis ist als der Ort der Spitzen der Curve zu bezeichnen, jedoch so, dass die aufeinander folgenden Punkte der Basis nicht aufeinander folgende Punkte dieses Ortes sind.

309. Diese Curven haben überdiess wie Epitrochoiden im Allgemeinen stets eine Anzahl von Doppelpunkten — isolierte oder Knoten — welche in Kreisen liegen und zwar in endlicher Zahl für algebraische, in unendlicher für transcendente Curven. Betrachten wir die Gleichungen

$$y = mb \sin \varphi - d \sin m\varphi, \quad x = mb \cos \varphi - d \cos m\varphi,$$

wo $\varphi = 0$ der Anfangslage des erzeugenden Punktes entspricht, nämlich der in der Centrallinie beider Kreise oder der Axe der x und in der Anfangsentfernung vom Ursprung

$$mb - d.$$

Alle die andern Lagen des bewegten Kreises, für welche der erzeugende Puukt der Axe dem x angehört, entsprechen den von $\varphi = 0$ verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$mb \sin \varphi = d \sin m\varphi.$$

Diese Wurzeln sind offenbar paarweis gleich und von entgegengesetzten Zeichen und jedem dieser Paare entspricht ein und derselbe Werth

$$mb \cos \varphi - d \cos m\varphi$$

von x; d. h. die entsprechenden Punkte sind Doppelpunkte des Ortes.

Der Werth

$$mb \cos \varphi - d \cos m\varphi$$

kann mit Hilfe der Bedingung

$$mb \sin \varphi = d \sin m\varphi$$

in der Form

$$x \sin \varphi = d \sin (m - 1)\varphi$$

dargestellt werden. So oft der erzeugende Punkt in die analoge Lage zu beiden Centren kommt, so oft haben wir eine Linie mit Doppelpunkten und die Zahl solcher Lagen und daher der letztern ist, wie schon ausgesprochen, endlich für algebraische und unendlich gross für transcendente Curven.

310. Die Gleichungen der Tangenten der Epi- und Hypo-Cycloiden können in sehr einfachen Formen geschrieben werden. Denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\varphi \pm \cos m\varphi}{-(\sin\varphi \pm \sin m\varphi)} = -\frac{\cos\frac{1}{2}(m+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}(m+1)\varphi}$$

oder auch

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(m+1)\varphi}{\cos\frac{1}{2}(m+1)\varphi};$$

man erhält also durch Berücksichtigung der Bedingung, dass die Tangente durch den Punkt von den Coordinaten x, y im Art. 306. gehen muss, ihre Gleichung in der Form

$$x\cos\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi + y\sin\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi$$
$$= (m+1)\,b\cos\tfrac{1}{2}(m-1)\varphi$$

für die Axe der x, welche durch den erzeugenden Punkt in der Maximalentfernung vom Centrum des festen Kreises geht, und

$$x\sin\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi - y\cos\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi$$
$$= (m+1)\,b\sin\tfrac{1}{2}(m-1)\varphi$$

für die durch den in der kleinsten.

Die Gleichung der Normale ist im letztern Falle

$$x\cos\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi + y\sin\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi$$
$$= (m-1)\,b\cos\tfrac{1}{2}(m-1)\varphi;$$

und man erkennt aus Vergleichung derselben mit der ersten Form der Gleichung der Tangente, dass die Evolute einer Epicycloide eine gleiche Epicycloide ist, für welche die Radien der Kreise im Verhältniss $(m-1):(m+1)$ verändert sind und die ihren erzeugenden Punkt in demselben Durchmesser des festen Kreises in Maximalentfernung hat, in dem er für die gegebene in der Minimalentfernung liegt.

Dieselben Bemerkungen gelten für die Hypocycloide.

Die Gleichung der Tangente einer Epitrochoide findet man ebenso in der Form

$$(b\cos\varphi - d\cos m\varphi)\,x + (b\sin\varphi - d\sin m\varphi)\,y$$
$$= \{mb^2 + d^2 - (m+1)\,bd\cos(m-1)\varphi\}$$

311. Wir verbinden mit dem Vorigen Beispiele von den einfachsten Fällen, in denen die Gleichungen dieser Curven algebraisch sind und leicht gebildet werden können. Diese Fälle sind folgende.

a) Wenn die Gleichung der Tangente in der Form

$$a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + c \cos\theta + d \sin\theta + c = 0$$

enthalten ist, deren Enveloppe wir in Art. 85., 3 gegeben haben.

b) Wenn die Gleichung der Tangente unter die Form

$$a \cos 3\theta + b \sin 3\theta + 3c \cos\theta + 3d \sin\theta = 0$$

fällt, welche nach der analogen Methode behandelt eine Enveloppe giebt, deren Gleichung als Discriminante einer cubischen Form erhalten wird, nämlich in der Form

$$(a^2 + b^2)^2 + 8(ac^3 - bd^3) - 24cd(ad - bc)$$
$$= 3(c^2 + d^2)^2 + 6(a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

c) Wenn m ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner um Eins verschieden sind. Denn aus den Gleichungen

$$x = mb \cos n\varphi - d \cos(n+1)\varphi,$$
$$y = mb \sin n\varphi - d \sin(n+1)\varphi$$

entsteht durch Quadrieren und Addieren

$$x^2 + y^2 = m^2 b^2 + d^2 - 2mbd \cos\Phi$$

und der Werth von $\cos\varphi$ aus dieser Gleichung giebt durch Substitution in den Ausdruck für x den Vollzug der Elimination.

Beispiel 1. Man finde die Epitrochoide für $d = mb$.

Die Gleichungen lassen sich dann auf die Form bringen

$$x = 2d \sin \tfrac{1}{2}(m-1)\varphi \sin \tfrac{1}{2}(m+1)\varphi,$$
$$y = 2d \sin \tfrac{1}{2}(m-1)\varphi \cos \tfrac{1}{2}(m+1)\varphi,$$

so dass offenbar $\frac{1}{2}(m+1)\varphi$ der Winkel ω ist, den der Radius vector mit der Axe der y macht. Die Polargleichung ist somit

$$\varrho = 2d \sin \frac{m-1}{m+1}\omega.$$

Beispiel 2. Man bestimme die Gleichungen der Epitrochoide und Epicycloide für gleiche Radien der Kreise oder für $m = 2$.

Indem man die Gleichungen

$$x = 2b \cos\varphi - d \cos 2\varphi,$$
$$y = 2b \sin\varphi - d \sin 2\varphi$$

wie in c) behandelt, erhält man

$$(x^2 + y^2 - 2b^2 - d^2)^2 = 4b^2(b^2 + 2d^2 - 2dx),$$

die Gleichung eines Cartesichen Ovals, welches den Punkt $y = 0$, $x = d$ zum Doppelpunkt hat, also insbesondere eine Limaçon ist. (Art. 281.)

Die Theorie des Art. zeigt, dass dieser Punkt dem Werthe $\cos\varphi = \frac{b}{d}$ entspricht; wenn also $d > b$ ist, oder wenn der erzeugende Punkt ausserhalb des bewegten Kreises liegt, so entspricht der Doppelpunkt zwei reellen Lagen des rollenden Kreises und ist also ein Knoten; liegt aber der erzeugende Punkt innerhalb des rollenden Kreises, so entspricht dem Doppelpunkte keine reelle Lage desselben und er ist isoliert.

Man erhält den Fall der Epicycloide für $d = b$, also mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 3b^2)^2 = 4b^3(3b - 2x).$$

Der Doppelpunkt ist insbesondere eine Spitze und die Curve eine Cardioide. Aus dem Gesagten erhellt, dass die Evolute einer Cardioide eine Cardioide ist.

Beispiel 3. Man soll die Gleichung der Epicycloide finden, für die der Radius des rollenden Kreises halb so gross ist, wie der des festen.

Die Gleichung der Tangente ist von der Form Art. 85., 3

$$x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = 4b\cos\theta,$$

und die ihrer Enveloppe daher

$$(x^2 + y^2 - 4b^2)^3 = 108b^4x^2.$$

Beispiel 4. Bestimme die Hypo-Trochoide und Cycloide in dem Falle, wo der Radius des rollenden Kreises die Hälfte von dem des festen ist.

Für $m = 1$ sind die Gleichungen

$$x = b\cos\varphi + d\cos\varphi,$$
$$y = b\sin\varphi - d\sin\varphi;$$

und die Hypotrochoide ist daher die Ellipse

$$\frac{x^2}{(b+d)^2} + \frac{y^2}{(b-d)^2} = 1,$$

die sich für $b = d$ auf den Durchmesser y reduciert.

Beispiel 5. Man bestimme die Hypocycloide für $m = -2$, d. h. für den Radius des festen Kreises als das Dreifache von dem des beweglichen.

Die Gleichung der Tangente ist

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi = b\cos 3\varphi$$

und die der Enveloppe nach der Methode b)

$$(x^2 + y^2)^2 + 8bx^3 - 24bxy^2 + 18b^2(x^2 + y^2) = 27b^4;$$

dieselbe ist also eine Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen, deren Rückkehr-Tangenten im Mittelpunkt des festen Kreises zusammen laufen. Die Curve ist von Steiner als die Enveloppe der geraden Linie studiert worden, die die Fusspunkte der Normalen auf die Seiten eines Dreiecks aus Punkten des ihm umschriebenen Kreises verbindet.[64]) In der That ergiebt sich die Gleichung dieser Geraden für das Centrum des Kreises als Anfangspunkt und $r\cos 2a$, $r\sin 2a$; etc. als Coordi-

naten der Ecken so wie $r \cos 2\varphi$, $r \sin 2\varphi$ als Coordinaten des entsprechenden Punktes im Kreise in der auf die obige zurückführbaren Form

$$x \sin(\alpha + \beta + \gamma - \varphi) - y \cos(\alpha + \beta + \gamma - \varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2} r \left\{ \sin(\alpha + \beta + \gamma - 3\varphi) + \sin(\beta + \gamma - \alpha - \varphi) + \sin(\gamma + \alpha - \beta - \varphi) \right.$$
$$\left. + \sin(\alpha + \beta - \gamma - \varphi) \right\}.$$

Beispiel 6. Wenn der Radius des festen Kreises das Vierfache von dem des beweglichen ist, so wird für die Hypocycloide $m = -3$, die Gleichung der Tangente

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = 2b \sin 2\varphi$$

und die der Enveloppe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4b)^{\frac{2}{3}}.$$

312. Die Gleichung der Reciproken einer Epicycloide wird leicht erhalten; denn da die der Tangente ist

$$x \cos\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi + y \sin\tfrac{1}{2}(m+1)\varphi = (m+1)\, b \cos\tfrac{1}{2}(m+1),$$

so ist klar, dass die Senkrechte auf die Tangente einen Winkel $\frac{1}{2}(m+1)\varphi$ mit der Axe der x macht, und die Länge

$$(m+1)\, b \cos\tfrac{1}{2}(m-1)\varphi$$

hat; der Ort des Fusspunktes dieser Senkrechten ist daher durch

$$p = (m+1)\, b \cos\left(\frac{m-1}{m+1}\,\omega\right)$$

und die reciproke Curve durch

$$\varrho \cos\left(\frac{m-1}{m+1}\,\omega\right) = (m+1)\, b$$

dargestellt. In der Originalcurve ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = b^2\,[m^2 + 1 + 2m \cos(m-1)\varphi]$$

oder

$$\varrho^2 = b^2 (m-1)^2 + 4mb^2 \cos^2\tfrac{1}{2}(m-1)\varphi$$

oder

$$\varrho^2 = a^2 + \frac{4m}{(m+1)^2}\, p^2.$$

Nach der Formel

$$R = \frac{\varrho\, d\varrho}{dp}$$

erhalten wir also den Krümmungsradius

$$R = \frac{4m}{(m+1)^2}\, p.$$ [65])

313. Ein andrer allgemeiner Ausdruck für den Krümmungsradius der Rouletten, d. i. der durch einen Punkt einer rollenden Curve erzeugten Curven, kann wie folgt gefunden werden: Seien P, P' zwei aufeinander folgende

Punkte der Curve, M der Berührungspunkt der rollenden mit der festen Curve, R der Krümmungsmittelpunkt, so ist PP', das Bogenelement der Roulette, gleich $MP.PMP'$; aber indem wir die Curven als Polygone von unendlicher Seitenzahl betrachten, können wir sehen, dass PMP', der Winkel, um welchen PM sich dreht, gleich der Summe oder Differenz der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Tangenten der festen und der rollenden Curve ist. Wenn also $d\sigma$ das Bogenelement der Roulette und ds das gemeinschaftliche Element der Bogen der festen und der erzeugenden Curve ist, wenn ϱ und ϱ' die Krümmungsradien beider sind, so haben wir

$$ds = MP\left(\frac{ds}{\varrho} + \frac{ds}{\varrho'}\right);$$

aber diess Element $d\sigma$ ist auch gleich dem Product des Krümmungshalbmessers in den Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Normalen; und wenn wir den Winkel OMP zwischen den Normalen der Roulette und der festen Curve φ nennen, so ist der Winkel zwischen zwei einander folgenden Normalen der Roulette

$$\frac{\cos\varphi\, ds}{MR}$$

Also

$$\frac{MP + MR}{MP.MR} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)$$

und somit

$$PR = \frac{MP^2\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)}{MP\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) - \cos\varphi} \quad ^{66}).$$

314. Eine ausgedehnte Klasse transcendenter Curven wird erhalten, indem man die Ordinate als irgend eine trigonometrische Function der Abscisse nimmt; es hat keine Schwierigkeit, die Form solcher Curven und ihrer Gleichung abzuleiten; z. B. $y = \sin x$ hat positive und stetig wachsende Ordinaten bis zu $x = \frac{1}{2}\pi$, von wo an die Ordinaten in derselben Art abnehmen bis $x = \pi$, wo die Curve die Axe unter einem Winkel von 45^0 schneidet; ein ganz gleicher Theil der Curve liegt auf der negativen Seite der Axe zwischen $x = \pi$ und $x = 2\pi$. Die Curve besteht daher aus einer Unendlichkeit gleicher Theile zu beiden Seiten der Axe.

So ferner stellt $y = \tan x$ eine Curve dar, deren Ordina-

ten von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}\pi$ — wo $y = \infty$ ist — regelmässig wachsen und für die die Linie $x = \frac{1}{2}\pi$ eine Asymptote ist. Für grössere Werthe von x ändert sich y von negativ Unendlich bis Null bei $x = \pi$. Die Curve besteht daher aus einer Unendlichkeit unendlicher Zweige, die zu ihren Asymptoten die geraden Linien $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$, u. s. w. haben und überdiess, wie leicht gesehen werden kann, Inflexionspunkte in $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, u. s. w. besitzen.

In gleicher Weise kann der Leser die Gestalt der Curve $y = \sec x$ discutieren, welche auch aus einer Anzahl unendlicher Zweige besteht, nur dass jeder Zweig, anstatt die Axe zu durchsetzen, wie im letztern Falle, ganz auf einer Seite von ihr liegt; nämlich abwechselnd auf der positiven und negativen Seite derselben. Zu derselben Familie gehört eine Curve, die man die Gefährtin der Cycloide nennt. Sie wird erzeugt, indem man die Ordinaten eines Kreises nicht wie im Fall der Cycloide so verlängert, dass die Verlängerung dem Bogen gleich sei, sondern so, dass das Ganze ihm gleich werde. Wenn dann das Centrum der Ursprung ist, so wird die Curve durch die Gleichungen

$$x = a\cos\theta,\ y = a\theta,\ \text{oder}\ a = a\cos\frac{y}{a}$$

dargestellt; eine Curve derselben Familie, wie die Sinuscurve.

315. Nächst den von trigonometrischen Functionen abhängigen Curven erwähnen wir die, welche von Exponentialfunctionen abhängen. Die logarithmische Curve wird durch die Eigenschaft charakterisiert, dass die Abscisse dem Lagarithmus der Ordinate proportional ist, und ihre Gleichung ist daher

$$x = m\log y \ \text{oder}\ y = a^x.$$

Die Curve hat dann die Axe der x zu einer Asymptote, weil für $x = -\infty$, $y = 0$ ist; der Abscisse Null entspricht die Ordinate von der Länge Eins und dieselbe wächst von da ab ohne Ende. Die Subtangente der logarithmischen Curve ist constant, da ihr allgemeiner Ausdruck $y\frac{dx}{dy}$ für sie den Werth m erhält.

Die geeignetste Interpretation der Gleichung $y = e^x$ ist controvers. Man hat zuerst nur den auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theil beachtet, in welchem je ein Punkt

dem einzigen reellen und positiven Werthe von e^x entspricht, welcher aus einem bestimmten Werthe von x hervorgeht. Seit Euler hat man die verschiedenen Werthe in Betracht gezogen, welche die Function gleichzeitig annimmt. So hat für x als einen Bruch mit geradzahligem Nenner e^x einen reellen negativen sowohl als einen reellen positiven Werth und es existiert daher auch ein jenem Werthe von x entsprechender Punkt auf der negativen Seite der Axe; aber, weil für x als einen Bruch mit ungeradem Nenner e^x nur einen reellen positiven Werth haben kann, so bilden die Punkte auf jener Seite der Axe keine stetige Reihe, d. h. keine Curve. Man bildet den alle Werthe der Ordinate umfassenden allgemeinen Ausdruck, indem man den numerischen Werth von e^x mit den imaginären Wurzeln der Einheit multipliciert, deren Ausdruck $\cos 2\,mx\pi + i \sin 2\,mx\pi$ ist für m als die Reihe aller ganzen Zahlen und i als die Quadratwurzel aus der negativen Einheit. Diess ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Gleichung $y = e^x$ zu betrachten sei als die Gleichung einer reellen Curve und zugleich als Ausdruck unendlich vieler in der Formel $y = e^{x(1+2mi\pi)}$ enthaltenen nicht reellen Aeste. Jeder beliebige dieser imaginären Aeste enthält reelle Punkte, in denen er den Ast $y = e^{x(1-2mi\pi)}$ schneidet, Punkte, welche somit als conjugierte Punkte der Curve anzusehen sind.

Die Zahl solcher Punkte ist unendlich gross und sie liegen entweder im reellen Theil der Curve oder in dem zu ihm symmetrischen auf der negativen Seite der Axe der x gelegenen Aste. Von dem Letzteren ist aber hervorzuheben, dass obschon jeder einzelne seiner Punkte als zur logarithmischen Curve gehörig anzusehen ist, doch keine zwei seiner Punkte als benachbart angesehen werden können, weil zwei solche zu verschiedenen Aesten gehören. So bildet er, was man eine punktierte Curve genannt hat. Betrachten wir einen solchen Punkt als einen Zweig von der Gleichung $y = e^{x(1+2m\pi i)}$ gehörig, so ist der ihm entsprechende Differentialcoefficient $y(1+2m\pi i)$; und derselbe kann auch nach dem Vorbemerkten nicht reell sein, weil sonst nach dem Taylor'schen Satze auch der nächstfolgende Punkt und folglich der betrachtete Curventheil ein reeller Ast wäre.

Denken wir einen isolierten Punkt als Durchschnitt von zwei nicht reellen Aesten in Anologie zu dem Knotenpunkt als Durchschnitt von zwei reellen, so sind die in Frage stehenden Punkte als isolierte zu betrachten, weil als Durchschnittspunkte nicht reeller Aeste. In der That sahen wir früher, dass eine transcendente Curve unendlich viele Knotenpunkte oder isolierte Punkte haben könne und in dem Falle der Epitrochoiden bemerkten wir auch bereits, dass solche Punkte in unstetiger Weise in gewisse Oerter vertheilt sein können.[67])

316. Die Kettenlinie ist die von einem gleichförmig dichten unelastischen Faden in seiner Ruhelage angenommene Form. Sehr einfache Betrachtungen der Meckanik führen zu der Eigenschaft, welche wir als die mathematische Definition der Curve annehmen wollen: dass der von ihrem tiefsten Punkte aus gemessene Bogen der Curve der trigonometrischen Tangente des Winkels proportional ist, den die Curventangente in seinem Endpunkte mit der horizontalen Tangente der Curve bildet. Denken wir die Axen als eine Horizontale und die Verticale durch den tiefsten Punkt, so ist $s = c\frac{dy}{dx}$. Bei rechtwinkligen Axen ist aber das Bogenelement die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten dx und dy, d. h. $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Mittelst der Gleichung der Curve folgt daraus

$$s^2 + c^2 = c^2\frac{ds^2}{dx^2}, \qquad dx = \frac{c\,ds}{\sqrt{(s^2+c^2)}},$$

$$\text{und } \frac{x}{c} = \log\left[\frac{s + \sqrt{(s^2+c^2)}}{c}\right]$$

wo die Constante so zu nehmen ist, dass s und x gleichzeitig den Werth Null erreichen. Also ist auch

$$e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2\sqrt{(s^2+c^2)}}{c}, \quad e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2s}{c}.$$

Aber die Gleichung der Curve giebt ebenso

$$\frac{s^2+c^2}{s^2} = \frac{ds^2}{dy^2}, \quad dy = \frac{s\,ds}{\sqrt{(s^2+c^2)}}$$

und somit

$$y^2 = s^2 + c^2,$$

wenn wir voraussetzen, dass die Axen so gewählt seien, dass

für s oder x gleich Null y den Werth c erhält. Dieser Werth von y giebt die Gleichung der Curve

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

oder mit der Bezeichnung der hyperbolischen sinus oder cosinus, also mit

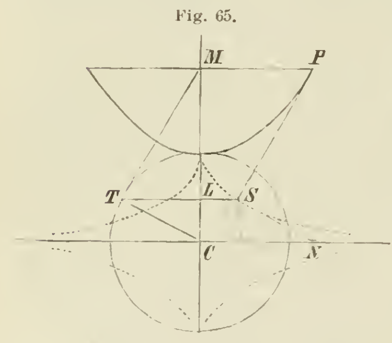
$$\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x,$$
$$\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x,$$
$$y = c \cosh \frac{x}{c}, \quad s = c \sinh \frac{x}{c}.$$

317. Aus der Gleichung der Curve erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) = \frac{s}{c} = \frac{\sqrt{(y^2 - c^2)}}{c}$$

und werden dadurch zu folgender Construction geführt: Vom

Fig. 65.



Fusspunkt der Ordinate M ziehen wir die Tangente MT an den aus dem Centrum C mit dem Radius c beschriebenen Kreise; dann ist $MC = y$, $CT = c$,

$$MT = \sqrt{(y^2 - c^2)};$$
$$\tan MCT = \tan MTL = \frac{1}{c}\sqrt{(y^2 - c^2)},$$

somit die Tangente PS parallel zu MT. Diese Werthe beweisen auch, dass $PS = MT =$ der Länge des Bogens vom tiefsten Punkte bis zum Punkte P ist. Der Ort des Punktes S ist somit die Involute oder Evolvente der Kettenlinie und SN parallel TC ist ihre Tangente, weil PS zum Ort von S als Tangente seiner Evolute normal sein muss. Die Evolvente der Kettenlinie ist daher eine Curve, für die der Abschnitt SN auf der Tangente zwischen dem Berührungspunkte und einer festen Geraden constant ist.[68]) Man hat diese Curve die Tractrix genannt.

318. Man findet die Gleichung der Tractrix ohne Schwierigkeit, denn die Länge zwischen dem Fusspunkt der Ordinate von S und dem Punkt N ist $\sqrt{(c^2 - y^2)}$; und zugleich für $y = 0$ in der Gleichung der Tangente gleich $-\frac{y\,dx}{dy}$, so dass die Differentialgleichung der Curve ist

$$-\frac{y\,dx}{dy} = \sqrt{(c^2 - y^2)};$$

wir machen sie durch die Substitution $z^2 = c^2 - y^2$ rational und erhalten

$$dx = \frac{c^2 dz}{c^2 - z^2} - dz.$$

Dann ist

$$x = c \log \left\{ \frac{c + \sqrt{(c^2 - y^2)}}{y} \right\} - \sqrt{(c^2 - y^2)}.$$

Man erkennt leicht, dass die Curve aus vier gleichen Theilen besteht, wie die punktierte Linie der Figur, und aus dem letzten Art. ergiebt sich die geometrische Construction ihrer Tangente.

Den Ort eines Punktes Q in der Tangente der Tractrix, der die constante Linie SN in gegebene Theile zerlegt, hat man die Syntractrix genannt. Sind x', y' die Coordinaten des Punktes der Tractrix und $x, y =$ die des letzteren Punktes, so ist für $QN = d$ auch $y'd = yc$ und

$$\sqrt{(c^2 - y'^2)} - \sqrt{(d^2 - y^2)} = x - x';$$

und da nach der Gleichung der Tractrix

$$x' + \sqrt{(c^2 - y^2)} = c \log \left\{ \frac{c + \sqrt{(c^2 - y'^2)}}{y'} \right\}$$

ist, so wird die Gleichung der Syntractrix

$$x + \sqrt{(d^2 - y^2)} = c \log \left\{ \frac{d + \sqrt{(d^2 - y^2)}}{y} \right\}.$$

Die Tractrix ist ein besonderer Fall der allgemeinen Aequitangentialcurven, die aus der Forderung entstehen, eine Curve solle auf ihrer Tangente zwischen dem Berührungspunkt und einer festen Directrix einen Abschnitt von constanter Länge erzeugen.

319. Das Problem der Verfolgungscurven von dem Weg eines Hundes, der seinem Herrn nachläuft, lässt sich mathematisch so aussprechen: Der Punkt A durchläuft mit constanter Geschwindigkeit eine bekannte Curve; man verlangt den Weg des mit constanter Geschwindigkeit stets auf A zueilenden Punktes B zu bestimmen.[69]) Denken wir A längs einer geraden Linie bewegt, die wir als Axe der y wählen, so ist der von der Tangente in dieser Axe gebildete Abschnitt

gleich $y - x\frac{dy}{dx}$ und das Wachsthum desselben ist nach der Voraussetzung dem Wachsthum des Bogens proportional, also für $\frac{dy}{dx} = p$

$$-x dp = h\sqrt{(1+p^2)}\, dx,$$
$$\log x^h + \log\{p + \sqrt{(1+p^2)}\} + \log A = 0,$$
$$2p = A^{-1} x^{-h} - A x^h,$$

$$2y = L - \frac{A}{h+1} x^{h+1} - \frac{A^{-1}}{h-1} x^{-h+1}.$$

Die Curve ist daher algebraisch, den Fall $h = 1$ ausgenommen, in welchem wir für $-\frac{x^{-h+1}}{h-1}$ den $\log x$ einzusetzen haben.

320. Die Involute oder Evolvente des Kreises ist eine weitere transcendente Curve von leicht bestimmbarer Gleichung, denn sie ist der Ort eines Punktes Q in der Tangente des Kreises im Punkte P, für welchen die Strecke PQ dem von einem festen Punkte A des Kreises aus gemessenen Bogen AP gleich ist. Ist a der Radius des Kreises, C sein Centrum, $CQ = \varrho$ der Radius vector,

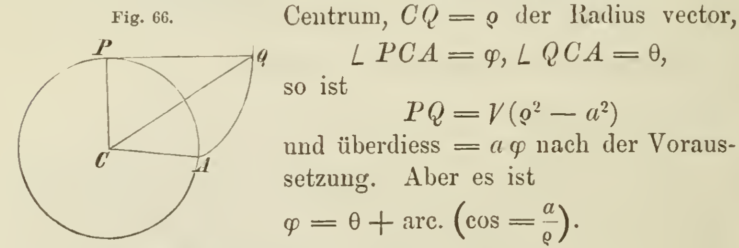


Fig. 66.

$$\angle PCA = \varphi,\ \angle QCA = \theta,$$

so ist

$$PQ = \sqrt{(\varrho^2 - a^2)}$$

und überdiess $= a\varphi$ nach der Voraussetzung. Aber es ist

$$\varphi = \theta + \text{arc.}\left(\cos = \frac{a}{\varrho}\right).$$

Die Polargleichung des Ortes ist daher

$$\frac{\sqrt{(\varrho^2 - a^2)}}{a} = \theta + \text{arc.}\left(\cos = \frac{a}{\varrho}\right).$$

Die Evolvente des Kreises ist der Ort der Durchschnittspunkte der Tangenten in solchen Punkten des Kreises und der entsprechenden Cycloide, in denen eine Ordinate sie schneidet.

321. Wir wollen diess Kapitel mit einer Uebersicht von den Spiralen beschliessen. In den Gleichungen dieser Curven in Polarcoordinaten ist der Radius vector nicht eine perio-

dische Function des Winkels, sondern eine solche, die für

$$\omega = \theta, \omega = 2\pi + \theta, \omega = 4\pi + \theta, \text{etc.}$$

unendlich viele verschiedene Werthe giebt. Dann schneidet dieselbe Gerade die Curve in unendlich vielen Punkten und dieselbe ist also transcendent. Die Spirale des Archimedes zuerst ist der Weg eines Punktes, der vom Anfangspunkt aus im Radius vector gleichförmig fortschreitet, indess dieser sich gleichförmig um jenen dreht; ihre Polargleichung ist daher

$$\varrho = a\omega.$$

Dieselbe ist auch der Ort des Fusspunktes der Senkrechten, welche vom Anfangspunkt auf die Tangenten der Kreisevolvente gefällt werden. Denn nach der Natur der Evoluten ist die Tangente des Ortes von Q normal zu PQ und die Länge der aus C auf dieselbe gefällten Senkrechten ist $= PQ = a\varphi$ für φ als den von der Senkrechten mit einer festen Geraden gebildeten Winkel. Darum ist auch die Reciprocalcurve der Evolvente die hyperbolische Spirale $\varrho\omega = a$, die wir im nächsten Art. besprechen wollen.

Die Spirale des Archimedes gehört der durch die allgemeine Gleichung $\varrho = a\omega^n$ bezeichneten Familie von Curven an, bei welchen die Tangente sich um so mehr der zum Radius vector normalen Lage nähert, je weiter der Punkt sich vom Anfangspunkt entfernt. Denn man hat

$$\varrho\, d\omega : d\varrho = \omega : n,$$

so dass (Art. 95.) die trigonometrische Tangente des vom Radius vector mit der Curventangente gebildeten Winkels mit ω stetig wächst, ohne doch früher als ω unendlich gross zu werden.

322. Die oben erwähnte hyperbolische Spirale

$$\varrho\omega = a$$

hat eine Asymptote parallel zu der Geraden, von welcher aus die ω gemessen werden, denn die Normale von einem Punkte der Spirale auf diese Gerade ist $\varrho \sin\omega = \frac{a \sin\omega}{\omega}$ und wird daher für verschwindendes ω und unendlich anwachsendes ϱ in den endlichen Werth a übergeführt.

Wir können ferner die Länge der Normalen vom Anfangspunkt auf die Tangente berechnen; denn die Tangente

des Winkels, den der Radius vector mit der Curventangente macht, ist $\varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = -\omega$, sodass die Normale $= \frac{a\varrho}{\sqrt{(a^2 + \varrho^2)}}$ wird, d. h. gleich a für unendlich wachsendes ϱ.

Fig. 67.

Die Form der Curve ist die in der Figur gegebene. Ihre Polarsubtangente ist constant. Der Bogen AB des mit dem festen Radius OA durch einen Punkt der Curve beschriebenen Kreises ist auch constant.

Eine andere der Erwähnung würdige Spirale ist der Lituus[70])

$$\varrho^2 \omega = a^2.$$

Dieselbe hat die Gerade zur Asymptote, von welcher aus die ω gemessen werden; denn die Entfernung eines Punktes in ihr von dieser Geraden $\varrho \sin \omega = \frac{a^2 \sin \omega}{\varrho \omega}$ nimmt ohne Ende ab, indem ϱ ohne Ende wächst und ω verschwindet.

323. Wir erwähnen endlich die logarithmische Spirale

$$\varrho = a^{\omega}.$$

In dieser Curve wächst ϱ unbegrenzt mit ω; es ist für $\omega = 0$ gleich Eins und nimmt für negative Werthe von ω fortwährend ab, ohne früher Null zu werden als bis ω negativ unendlich ist. Die Curve nähert sich daher in unendlich vielen Umdrehungen um ihn dem Pol.

Es ist eine ihrer Fundamentaleigenschaften, dass sie alle Radien vectoren unter constantem Winkel schneidet, weil $\varrho \frac{d\omega}{d\varrho}$ dem Modus des Logarithmensystems gleich wird, das a zur Basis hat und somit der Winkel des Radius vector mit der Tangente diesen Modul zu seiner trigonometrischen Tangente hat.

Aus dieser Eigenschaft erhalten wir die Rectification der Curve. Denn aus der Betrachtung des Elementardreiecks, in welchem das Bogenelement die Hypotenuse und das Wachsthum des Radius vectors die eine Kathete ist, ersehen wir, dass das Bogenelement gleich dem mit der Secante dieses constanten Winkels multiplicierten Wachsthum des Radius

vectors ist und dass daher jeder Bogen gleich der mit der Secante desselben Winkels multiplicierten Differenz der Radien vectoren seiner Endpunkte ist. Die vom Punkte P bis zum Pol gemessene Bogenlänge $\varrho \sec \theta$ wird construiert, indem man im Pol O die Normale OQ zu OP errichtet und bis zur Tangente der Curve in P verlängert; sie ist gleich PQ. Der Ort von Q ist eine Involute oder Evolvente der Curve; da aber die Winkel des Dreiecks OPQ constant sind, so ist OQ zu OP proportional und macht mit OP einen rechten Winkel, d. h. der Ort von Q ist auch eine logarithmische Spirale, die durch Drehung der Radien vectoren der gegebenen um einen rechten Winkel und gleichzeitige Veränderung derselben in einem gegebenen Verhältniss entsteht. Umgekehrt ist auch die Evolute einer logarithmischen Spirale eine Curve derselben Art. Der Ort der Fusspunkte der Senkrechten auf die Tangente ist ebenfalls eine logarithmische Spirale, weil sie in einem festen Verhältniss zum Radius vector steht und einen constanten Winkel mit ihm bildet. Die Brennlinien durch Reflexion und Refraction für Licht aus dem Pole sind gleichfalls logarithmische Spiralen.[71])

Achtes Kapitel.

Transformation der Curven.

324. Nachdem im ersten Theile dieses Werkes („Kegelschnitte“ Kap. XXII—XXIV) ausser verschiedenen speciellen Methoden der Ableitung von Eigenschaften einer Curve aus denen anderer Curven, — wie den Methoden der Projection und der reciproken Polaren, der Inversion oder der reciproken Radien etc. — auch die allgemeine Theorie der linearen oder projectivischen Transformationen oder der Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität entwickelt worden ist, soll nun hier die allgemeine Theorie solcher Methoden dargestellt werden.

Wir haben dafür im Allgemeinen die Correspondenz oder das Entsprechen zweier Punkte P, P' zu betrachten, die ebensowohl in derselben Ebene als in verschiedenen Ebenen gedacht werden können. Im letztern Falle können beide Ebenen als in einem gemeinsamen Raume liegend angesehen werden und es ist dann möglich, den Uebergang zwischen P und P' durch geometrische Constructionen in diesem Raume zu vollziehen; die Methode der Projection bietet das einfachste Beispiel dieser Art, die gerade Verbindungslinie der entsprechenden Punkte $P P'$ geht immer durch einen gegebenen festen Punkt, das Centrum der Projection. Man erhält ein andres System der Transformation, indem man der Geraden $P P'$ die Bedingung auferlegt, zwei feste sich kreuzende Gerade zu schneiden[72], etc.

Die Entwickelung solcher Theorien gehört der Geometrie des Raumes an.

An diesem Orte untersuchen wir die beiden Ebenen ohne Beziehung auf einen gemeinsamen Raum. Wir denken die Punkte jeder Ebene durch Coordinaten in Bezug auf ein willkürlich gewähltes System von Fundamental-Elementen be-

stimmt und nehmen an, dass zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte eine bekannte algebraische Abhängigkeit bestehe, insbesondere also Gleichheit oder lineare Abhängigkeit, wie im Falle der projectivischen Transformationen, etc. In jedem Falle bestehen Sätze über die Beziehung beider Ebenen im Allgemeinen und Sätze über die Beziehung derselben als in einer einzigen Ebene vereinigt. Um diese Beziehungen auszudrücken, sprechen wir von zwei entsprechenden Figuren — nämlich Systemen von Punkten, geraden Linien oder von Curven — in diesen Ebenen oder in derselben Ebene; oder auch, wir sprechen von allen Punkten der Ebene und ihren entsprechenden.

Die insbesondere genau untersuchte Art von Transformationen hat ihren wesentlichen Charakter darin, dass einer gegebenen Lage von P im Allgemeinen eine einzige Lage von P' entspricht, und umgekehrt einer Lage von P' eine einzige von P'. Die projectivische ist der einfachste Fall derselben; man bezeichnet sie aber allgemein als die rationale oder auch die birationale Transformation.

Quadratische Transformation.

325. Es ist nützlich vor der allgemeinen Theorie noch ausser der linearen Transformation einen andern speciellen Fall näher zu untersuchen, nämlich den Fall, wo die Coordinaten des Punktes P' Functionen zweiten Grades in den Coordinaten von P sind, oder wo man hat

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3.$$

Dann entsprechen den geraden Linien

$$x_1' = 0,\ x_2' = 0,\ x_3' = 0$$

die drei Kegelschnitte

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,$$

und einer Curve n^{ter} Ordnung entspricht im Allgemeinen eine Curve von der Ordnung $2n$, deren Gleichung man durch Substitution der X_i für die x_i in die gegebene Gleichung erhält. In den Art. 253., 273. ist diese Methode schon benutzt worden. Man erhält ein einfaches Beispiel durch die Annahme

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1^2 : x_2^2 : x_3^2.$$

Dann entspricht der geraden Linie

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

ein Kegelschnitt

$$a_1 x_1^{\frac{1}{2}} + a_2 x_2^{\frac{1}{2}} + a_3 x_3^{\frac{1}{2}} = 0,$$

welcher die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt und einer geraden Linie in der zweiten Figur entspricht wieder ein Kegelschnitt in der ersten. Einem Kegelschnitt der ersten Figur von der Gleichung

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{13} x_1 x_3 \\ + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0$$

entspricht die Curve vierter Ordnung

$$a_{11} x_1 + a_{22} x_2 + a_{33} x_3 + 2 a_{23} x_2^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}} + 2 a_{13} x_1^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}} \\ + 2 a_{12} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Und da die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts in der Form

$$\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{13}} + \frac{x_3}{a_{12}} = \left\{ \left(\frac{1}{a_{23}^2} - \frac{a_{11}}{a_{23} a_{13} a_{12}} \right) x_1^2 + \left(\frac{1}{a_{13}^2} - \frac{a_{22}}{a_{23} a_{13} a_{12}} \right) x_2^2 \\ + \left(\frac{1}{a_{12}^2} - \frac{a_{33}}{a_{23} a_{13} a_{12}} \right) x_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

geschrieben werden kann, so ergiebt sich, dass die Gleichung der entsprechenden Curve in der Form

$$a x_1^{\frac{1}{2}} + b x_2^{\frac{1}{2}} + c x_3^{\frac{1}{2}} + d x_4^{\frac{1}{2}} = 0$$

darstellbar ist und dass sie also drei Doppelpunkte und die geraden Linien

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

zu Doppeltangenten hat.

326. Die eben beschriebene Methode der Transformation auf Grund der Beziehung

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3$$

ist im Allgemeinen nicht rational. Denn aus gegebenen x_i folgen zwar die x_i' rational, aber für gegebene x_i' sind die entsprechenden x_i aus den Gleichungen

$$\frac{X_1}{x_1'} = \frac{X_2}{x_2'} = \frac{X_3}{x_3'}$$

zu berechnen, aus Gleichungen also, welche Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Punkten darstellen und somit vier ver-

schiedene Lagen des dem Punkte x_i' entsprechenden Punktes x_i liefern. Wenn die Kegelschnitte $X_i = 0$ einen festen gemeinsamen Punkt hätten, so könnte derselbe als von der Lage des Punktes x_i' unabhängig ausser Betracht bleiben und jedem Punkte x_i' entsprächen drei Punkte x_i; wenn die $X_i = 0$ zwei feste gemeinsame Punkte hätten, ebenso zwei, und endlich für drei feste gemeinsame Punkte derselben besitzen die Kegelschnitte

$$\frac{X_1}{x_1'} = \frac{X_2}{x_2'} = \frac{X_3}{x_3'}$$

nur einen andern dem x_i' entsprechenden gemeinschaftlichen Punkt. Die Transformation ist daher in diesem Falle rational, d. h. es entspricht jeder Lage des einen Punktes nur eine Lage des andern.

Da es nur einer Coordinatenveränderung gleichkommt, wenn wir anstatt der Kegelschnitte $X_i = 0$ drei beliebige Kegelschnitte des Systems

$$b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 = 0$$

wählen und die ihnen entsprechenden Geraden

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

zu Fundamentallinien machen, so wird die Allgemeinheit durch die Festsetzung nicht vermindert, dass die $X_i = 0$ die drei Paare von geraden Linien sein sollen, welche die drei gemeinsamen Punkte verbinden und die in Art. 284. angewendete durch die Relationen

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2' x_3^2 : x_3' x_1' : x_1' x_2' \text{ und } x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$$

ausgedrückte Transformation ist daher die allgemeinste birationale quadratische Transformation.

Schon in Art. 284. ist dargethan worden, dass dem Punkte $x_i = x_j = 0$, jeder Punkt der Linie $x_k' = 0$ entspricht. Transformiert man also eine Curve, so entspricht jedem der n Punkte, in welchen sie die Gerade $x_k' = 0$ schneidet, der Punkt $x_i = x_j = 0$ oder genauer gesprochen das Element eines durch diesen Punkt gehenden Astes der entsprechenden Curve, d. h. dieser Punkt ist ein $n$facher Punkt der Letzteren. So oft die Originalcurve die Gerade $x_k' = 0$ berührt, so oft fallen die Tangenten zweier Aeste der entsprechenden

oder Bild-Curve in eine zusammen. Einer Curve n^{ter} Ordnung, welche durch keinen der festen Punkte

$$x_2' = x_3' = 0,\ x_3' = x_1' = 0,\ x_1' = x_2' = 0$$

hindurchgeht, entspricht daher eine Curve von der Ordnung $2n$, welche die drei Punkte

$$x_2 = x_3 = 0,\ x_3 = x_1 = 0,\ x_1 = x_2 = 0$$

zu $n$fachen Punkten hat. Wenn wir aber voraussetzen, dass die Curve n^{ter} Ordnung durch den Punkt $x_i' = x_j' = 0$ hindurchgeht, so gehört die Gerade $x_k = 0$ der entsprechenden Curve an und insofern wir diese Gerade ausser Betracht lassen, ist die Ordnung der transformierten Curve um Eins vermindert. Und überdiess geht die entsprechende Curve durch jeden der Punkte $x_k = x_i = 0$, $x_k = x_j = 0$ nur $(n-1)$ statt n mal, weil die gerade Linie $x_k = 0$ jeden derselben enthält. In derselben Weise erkennen wir allgemein, dass einer Curve n^{ter} Ordnung, welche durch die drei Hauptpunkte — wie wir sie nennen wollen — respective f_1, f_2, f_3 mal hindurchgeht, eine Curve von der Ordnung

$$n' = 2n - f_1 - f_2 - f_3$$

entspricht, die durch die drei entsprechenden Hauptpunkte der andern Figur respective f_1', f_2', f_3' mal hindurchgeht, für

$$f_1' = n - f_2 - f_3,\ f_2' = n - f_3 - f_1,\ f_3' = n - f_1 - f_2.$$

327. Man bestätigt leicht, dass die so erhaltenen Zahlen die reciproken Beziehungen zwischen beiden Curven erfüllen, d. h. dass man hat

$$n = 2n' - f_1' - f_2' - f_3';$$
$$f_1 = n' - f_2' - f_3',\ f_2 = n' - f_3' - f_1',\ f_3 = n' - f_1' - f_2'.$$

Wir zeigen auch, dass die entsprechenden Curven denselben Defect haben oder vom nämlichen Geschlecht sind. Denn nach Art. 43. ist ein $p$facher Punkt $\frac{1}{2}p(p-1)$ Doppelpunkten äquivalent und der Defect der ersten Curve ist somit

$$\tfrac{1}{2}\left\{(n-1)(n-2) - f_1(f_1-1) - f_2(f_2-1) - f_3(f_3-1)\right\};$$

mit Benutzung der für n' und die f_i' so eben ermittelten Werthe zeigt man aber leicht, dass diese Zahl der folgenden stets gleich ist

$$\tfrac{1}{2}\left\{(n'-1)(n'-2)-f_1'(f_1'-1)-f_2'(f_2'-1)\right.$$
$$\left.-f_3'(f_3'-1)\right\}.$$

328. Ein besonderer Fall der Methode der quadratischen Transformation ist die der Inversion oder die Transformation durch reciproke Radien vectoren, die in Art. 153. und in Art. 397 f. der „Kegelschnitte“ besprochen ist. Wir haben einen festen Punkt O, den wir als Anfangspunkt der Coordinaten wählen werden, und entsprechende Punkte P, P' liegen mit denselben in einer geraden Linie und in Entfernungen, deren Product constant ist, setzen wir $OP.OP'=1$. Dann begründet man leicht die Relationen

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2},\ y'=\frac{y}{x^2+y^2};\ x=\frac{x'}{x'^2+y'^2},\ y=\frac{y'}{x'^2+y'^2},$$

aus denen die Gleichungen

$$x'+iy'=\frac{1}{x-iy},\ x'-iy'=\frac{1}{x+iy}$$

hervorgehen. Setzen wir also x_1, x_2, x_3, respective gleich $x-iy$, $x+iy$, 1 und ebenso x_1', x_2', x_3', respective gleich $x'+iy'$, $x'-iy'$, 1, so haben wir

$$x_1':x_2':x_3'=x_2x_3:x_3x_1:x_1x_2$$

oder die Transformation ist von der in diesem Abschnitt betrachteten Art. Man nennt bekanntlich den Punkt 0 das Centrum der Inversion und den aus ihm mit der der Quadratwurzel aus $OP.OP'$ entsprechenden Länge beschriebenen Kreis den Inversionskreis. Wenn der Punkt P eine Curve durchläuft, so beschreibt der Punkt P' die Inverse derselben. Insbesondere ist die Inverse einer geraden Linie ein durch O gehender Kreis, der die Länge OA' zum Durchmesser hat, welche der dem Fusspunkt der Normale OA auf die Gerade entsprechende Punkt begrenzt. Der Punkt O selbst entspricht dem unendlich fernen Punkt der Geraden. Die Inverse eines Kreises ist wieder ein Kreis („Kegelschn.“ Art. 397.) und insbesondere ist die Inverse eines Kreises K, der den Inversionskreis orthogonal durchschneidet, dieser Kreis K selbst, d. h. der Punkt P und der Punkt P' liegen auf einem Kreise, welcher sich selbst invers ist. In diesem Beispiel kündigt sich eine weiterhin vollständiger zu entwickelnde Theorie an, in der die allgemeine Theorie der Transformation als eine

Theorie der Correspondenz oder des Entsprechens von Punkten in einer gegebenen Curve erscheint. In unserm Falle entspricht dem Punkte P des Kreises K der zweite Schnittpunkt P', welchen die Gerade OP mit ihm bestimmt.

329. Für die allgemeine Theorie der Inversion erhellt aus dem Vorigen, dass zwei Paare entsprechender Punkte A, A' und B, B' stets auf einem Kreise liegen, der den Inversionskreis orthogonal schneidet und nach der Eigenschaft eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks so, dass die Verbindungslinie der Punkte A, B mit dem Radius vector OA denselben Winkel macht, wie die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte A', B' mit dem Radius vector. Und beim Uebergang zur Grenze für AB als Tangente einer Curve im Punkte A, dass die entsprechende Tangente der inversen Curve mit dem Radius vector denselben Winkel einschliesst wie jene; endlich, dass der von irgend zwei Curven in irgend einem Punkte gebildete Winkel dem Winkel der inversen Curven im entsprechenden Punkte gleich ist.

Die Inverse ergiebt sich unmittelbar für Curven, die in der Gleichung $\varrho^n = a^n \cos n\omega$ enthalten sind. So ist für $n=2$ die Lemniscate die Inverse der gleichseitigen Hyperbel; für $n = \frac{1}{2}$ die Cardioide die Inverse einer Parabel, die ihren Brennpunkt im Centrum hat; etc. Die Inverse eines Kegelschnitts ist im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, nämlich im Centrum und in den unendlich fernen Kreispunkten. Ist das Centrum ein Brennpunkt des Kegelschnitts, so ist sie insbesondere die Pascal'sche Schnecke; für das Centrum als einen Punkt der Curve eine durch die Kreispunkte gehende Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt im Centrum.

Einem Osculationskreis der Curve entspricht ein solcher der inversen Curve, geht der erstere aber insbesondere durch das Centrum der Inversion, so entspricht ihm eine Inflexionstangente.

Beispiel 1. Die drei Inflexionspunkte einer circularen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt liegen in einer geraden Linie. Daher lassen sich durch jeden Punkt eines Kegelschnitts drei Kreise legen, die ihn an je einem andern Punkte osculieren und diese drei Punkte liegen mit dem gegebenen Punkte in einem Kreise. Die drei Oscula-

tionspunkte sind sämmtlich reell, wenn die Curve eine Ellipse ist; für die Hyperbel sind zwei von ihnen imaginär.[73])

Beispiel 2. Analog gehen durch jeden Punkt einer circularen Curve dritter Ordnung oder einer bicircularen Curve vierter Ordnung neun die Curve anderwärts osculierende Kreise; von denselben sind drei reell und ihre Osculationspunkte liegen auf einem auch durch den gegebenen Punkt gehenden Kreis.

Beispiel 3. „Die Fusspunkte der von einem Punkte des umschriebenen Kreises auf die Seiten eines Dreiecks gefällten Perpendikel liegen in einer geraden Linie.“ Wenn über drei von demselben Punkte ausgehenden Sehnen AB, AC, AD eines Kreises als ihren Durchmessern Kreise beschrieben werden, so liegen die zweiten Schnittpunkte derselben in einer geraden Linie.

Beispiel 4. „Der einem Dreieck aus drei Parabeltangenten umschriebene Kreis geht durch den Brennpunkt der Parabel.“ Wenn drei Kreise eine Cardioide berühren und durch ihre Spitze gehen, so liegen ihre drei zweiten Durchschnittspunkte in einer geraden Linie.

Beispiel 5. „Wenn eine gerade Linie die Pascal'sche Schnecke in vier Punkten schneidet, so ist die Summe ihrer Entfernungen vom Doppelpunkt derselben constant.“ Wenn ein durch den einen Brennpunkt gehender Kreis einen Kegelschnitt in vier Punkten schneidet, so ist die Summe der reciproken Werthe ihrer Entfernungen vom Brennpunkte constant.

Beispiel 6. Man soll die Enveloppe von Kreisen bestimmen, die durch einen festen Punkt gehen und deren Centren in einer gegebenen Curve liegen. Wir nehmen den festen Punkt zum Centrum der Inversion und bemerken, dass der Ort des andern Endpunktes des durch ihn gehenden Durchmessers eine zur gegebenen ähnliche Curve ist. Daraus ergiebt sich, dass die negative Fusspunktcurve (Art. 122.) der Inversen der letztern Curve die Inverse der geforderten Enveloppe und folglich nach Art. 123., dass die Enveloppe selbst die Inverse der Polarreciproken der gegebenen Curve ist.[74])

331. Es bleibt übrig, diejenigen Fälle der rationalen quadratischen Transformation zu erwähnen, welche nicht auf die Substitution

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2' x_3' : x_3' x_1' : x_1' x_2'$$

zurückführbar sind. Von den drei den Kegelschnitten $X_i = 0$ gemeinsamen Punkten können zwei zusammenfallen und es sei $x_2 = 0$ die gemeinschaftliche Tangente derselben im Punkte $x_2 = x_1 = 0$, sowie $x_1 = x_3 = 0$ der dritte ihnen gemeinsame Punkt, so können, weil die Gleichungen solcher Kegelschnitte von der Form

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

sein müssen,

$$x_1^2 = 0, \ x_2x_3 = 0 \text{ und } x_1x_2 = 0$$

als solche Kegelschnitte genommen werden und die Substitution erhält die Form der im Art. 290. angewendeten

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_2 : x_1^2 : x_2x_3 \text{ und}$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_1'^2 : x_2'x_3'.$$

In dieser Substitution entspricht wie in der allgemeinen dem Punkte $x_1' = x_3' = 0$ die Gerade $x_2 = 0$ und jeder Curve, welche diese gerade Linie in n Punkten schneidet, eine Curve, welche jenen Punkt zum $n$fachen Punkte hat. Dem Punkte $x_1' = x_2' = 0$ entspricht die gerade Linie $x_1 = 0$, aber für alle Punkte der Letztern erhält man die nämliche Tangentenrichtung im erstern, nämlich $x_2' = 0$; einer Curve, die die Gerade $x_1 = 0$ in n Punkten schneidet, entspricht somit eine Curve, die den Punkt $x_1' = x_2' = 0$ zu einem $n$fachen Punkt mit zusammenfallenden Tangenten hat. In kurzem Ausdruck, die Theorie ist im wesentlichen dieselbe wie vorher, nur modificiert durch das Zusammenfallen von zweien der Hauptpunkte.

Wenn endlich alle drei Hauptpunkte zusammenfallen, so sind nach Art. 247. der „Kegelschn.“ die Gleichungen der Kegelschnitte von der Form

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}(x_2x_3 - mx_1^2) = 0$$

und wir kommen zu der in Art. 291. gebrauchten Form der Substitution

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_2 : x_2^2 : x_2x_3 - mx_1^2,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_2'^2 : x_2'x_3' + mx_1'^2.$$

Allgemeine Theorie der rationalen Transformation.

332. Es ist zweckmässig vor dem Eingehen auf die allgemeine Theorie der rationalen Transformation in Ausdehnung des in Art. 329. Gesagten zu erwähnen, dass die Substitution von x_1^n, x_2^n, x_3^n für x_1, x_2 x_3 respective dann eine sehr einfache Form annimmt, wenn $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade ist und $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ nach den Kreispunkten

in derselben gehen. Denn] durch Transformation zu Polarcoordinaten werden die Gleichungen der Letztern

$$\varrho\,(\cos\theta \pm i \sin\theta) = 0$$

und man erkennt, dass die Ersetzung dieser Functionen durch ihre n^{ten} Potenzen auf die Einführung von ϱ^n und von $n\theta$ für ϱ und θ respective zurückkommt. Diese Transformation ist nicht rational, aber sie wird vortheilhaft auf Curven von der Gleichungsform $\varrho^m = a^m \cos m\omega$ angewendet, welche so in Curven der nämlichen Familie transformiert werden. Für $n = 2$ wird ein Kreis zu einer Cassini'schen Curve, für $n = \frac{1}{2}$ zu einer Pascal'schen Schnecke.

Roberts hat[75]) auch bemerkt, dass durch diese Transformation der Winkel nicht geändert wird, unter welchem sich zwei Curven durchschneiden. Denn die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente einer Curve mit dem Radius vector bildet (Art. 95.), wird durch $\varrho\,\frac{d\omega}{d\varrho}$ ausgedrückt und die Substitution von $n\,d\omega$ für $d\omega$ und von $\frac{n\,d\varrho}{\varrho}$ für $\frac{d\varrho}{\varrho}$ lässt dies ungeändert. Die als Beispiele zur Theorie der Inversion gegebenen Sätze liefern hiernach für die verschiedenen Werthe von n ebensoviele neue Sätze; und Sätze in Bezug auf die Winkel, unter welchen Curven sich durchschneiden, werden leicht durch diese Methode transformiert, wie beispielsweise die Sätze, dass ein Kreis der Ort der Schnittpunkte zu einander rechtwinkliger Geraden ist, von denen jede durch einen von zwei festen Punkten geht; dass eine Reihe concentrischer Kreise durch das System ihrer Durchmesser rechtwinklig geschnitten wird; etc.

333. Nach einer allgemeinen rationalen Transformation entspreche einem System von Werthen der x_i ein einziges System von Werthen der x_i' z. B.

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3$$

für die X_i als bekannte Functionen der x_i, die wir vom Grade n annehmen; und umgekehrt entspricht einem beliebigen System von Werthen x_i' ein einziges System von Werthen

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1' : X_2' : X_3'.$$

Dann müssen zuerst, damit eine solche Ausdrucksweise möglich sei, die X_i' auch vom Grade n in den x_i' sein. Denn den n Durchschnittspunkten einer beliebigen Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

mit irgend einer Curve

$$b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 = 0$$

entsprechen im andern System nothwendig die Schnittpunkte der Curve

$$a_1 X_1' + a_2 X_2' + a_3 X_3' = 0$$

mit der Geraden

$$b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3 = 0,$$

deren Anzahl daher gleichfalls n sein muss.

334. Wir untersuchen hiernach die Bedingungen, unter welchen die vorausgesetzte gegenseitige Ausdrückbarkeit der x_i und x_i' möglich ist. Im Allgemeinen entsprechen dem Punkte

$$x_1' : x_2' \; x_3' = a_1 : a_2 : a_3$$

des einen Systems die gemeinschaftlichen Punkte der Curven

$$X_1 : X_2 : X_3 = a_1 : a_2 : a_3$$

im andern System; ihre Anzahl ist n^2, wenn die X_i allgemeine Curven ihrer Ordnung sind. Wenn jedoch p den drei Curven $X_i = 0$ gemeinsame Punkte vorhanden wären, so würden nur $n^2 - p$ mit den a_i veränderliche Durchschnittspunkte derselben existieren, die also dem gegebenen Punkte im andern System enstprechen. Und für $p = n^2 - 1$ wäre nur ein einziger veränderlicher Schnittpunkt vorhanden; oder mit andern Worten, wenn alle Durchschnittspunkte der Curven

$$X_1 : X_2 : X_3 = a_1 : a_2 : a_3$$

bis auf einen bekannt sind, so sind die Coordinaten dieses letzten Durchschnittspunktes eindeutig bestimmt und somit rationale Functionen der a_i, d. h. der x_i' und wir erhalten Ausdrücke von der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1' : X_2' : X_3'.$$

335. Dass die Curven $X_i = 0$ gemeinsame Durchschnittspunkte in der Zahl $n^2 - 1$ haben, ist also die eine Bedingung

für rationale Transformation; aber dieselbe unterliegt noch einer andern Bedingung. Das System der Curven

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

muss von demselben Grade der Allgemeinheit sein, wie das System der Geraden

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' = 0,$$

welchem es entspricht, d. h. eine Curve des Systems muss zwei weiteren Bedingungen unterworfen werden können, ohne überbestimmt zu sein, zwei Bedingungen, welche die beiden Constanten $a_1 : a_2 : a_3$ bestimmen. Die Zahl der Bedingungen, welchen die Curven $X_i = 0$ unterworfen werden, muss wenigstens um zwei kleiner sein als die Zahl derer, welche zur Bestimmung einer Curve n^{ter} Ordnung hinreicht. Wenn z. B. die Curven $X_i = 0$ Curven dritter Ordnung sind, und wenn wir die Bedingung stellen, dass sie acht verschiedene Punkte gemein haben sollen, so haben sie nach Art. 29. auch einen neunten Punkt gemein und können daher keinen variabeln Durchschnittspunkt besitzen, so dass die Construction des vorigen Artikels ihren Zweck verfehlt. Wir können jedoch den Bedingungen des Problems genügen, indem wir annehmen, dass die Curven dritter Ordnung $X_i = 0$ einen gemeinsamen Doppelpunkt und vier einfache gemeinsame Punkte haben. Denn diess zählt für sieben Bedingungen, da ein gegebener Doppelpunkt deren drei repräsentiert (Art. 41.), und es sind daher zwei weitere Bedingungen nöthig, um irgend eine Curve des Systems

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

zu bestimmen. Dagegen zählen die gemeinsamen Punkte für acht, weil ein Punkt, der in zwei Curven zugleich ein Doppelpunkt ist, für vier unter ihren Schnittpunkten zählt. Und so können wir auch allgemein die $X_i = 0$ nicht als Curven n^{ter} Ordnung annehmen, welche $n^2 - 1$ verschiedene gemeinsame Punkte haben, weil sie, sobald n grösser ist als zwei, dann einen weiteren gemeinsamen Punkt haben müssten und keinen veränderlichen Schnittpunkt haben könnten. Wir können aber den Bedingungen des Problems genügen, indem wir die $X_i = 0$ als Curven denken, die α_1 einfache, α_2 doppelte, α_3 dreifache Punkte, etc. gemein haben, so dass diese $n^2 - 1$

Durchschnittspunkten äquivalent sind und dass zugleich die Zahl der Bedingungen, welche dieser Festsetzung entsprechen, um zwei kleiner ist als die Zahl derer, welche eine Curve n^{ter} Ordnung bestimmen. Indem wir erinnern, dass ein gegebener vielfacher Punkt r^{ter} Ordnung $\frac{1}{2} r (r + 1)$ Bedingungen äquivalent ist, und dass ein solcher Punkt, wenn er zwei Curven als $r$facher Punkt gemeinsam ist, unter ihren Schnittpunkten für r^2 zählt, erhalten wir die zwei Gleichungen

$$1) \quad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \cdots + r^2 \alpha_r = n^2 - 1,$$

$$2) \quad \alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \cdots + \tfrac{1}{2} r (r + 1) \alpha_r = \tfrac{1}{2} n (n + 3) - 2.$$

Verdoppelt man die zweite und zieht man davon die erste ab, so erhält man eine mit Vortheil an Stelle von 2) zu verwendende Gleichung, nämlich

$$3) \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + r\alpha_r = 3 (n - 1).$$

Und wir erhalten somit so viele Arten der Transformation durch Curven n^{ter} Ordnung als es Lösungen dieser Gleichungen durch ganze positive Werthe der α_i giebt, immer vorausgesetzt, dass die Zahl der höheren vielfachen Punkte, welche die Curven $X_i = 0$ nach denselben besitzen, den bei Art. 43. gefundenen Grenzen unterworfen bleibt.[76])

335. Die Gründe des vorigen Art. beweisen genau genommen nur, dass in der Gleichung 2) die rechte Seite nicht grösser sein kann als der angegebene Werth; wir können jedoch zeigen, dass sie auch nicht kleiner sein kann, denn wenn wir ein Glied $-t$ addieren und die Gleichung 2) dann von 1) abziehen, erhalten wir

$$4) \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots \tfrac{1}{2} r (r - 1) \alpha_r = \tfrac{1}{2} (n - 1)(n - 2) + t.$$

Indem wir erinnern, dass ein dreifacher Punkt drei Doppelpunkten und ein $r$facher $\frac{1}{2} r (r - 1)$ Doppelpunkten äquivalent ist, sehen wir, dass die linke Seite der Gleichung die Anzahl von Doppelpunkten ausdrückt, welcher die vielfachen Punkte einer der Curven des Systems

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

gleichwerthig sind. Und weil in Art. 42. gezeigt ist, dass diese Zahl $\frac{1}{2} (n - 1)(n - 2)$ nicht übersteigen kann, so muss $t = 0$ sein und die Gleichung 4) drückt aus, dass jede der Curven des Systems

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

die Maximalzahl von Doppelpunkten enthält, oder mit andern Worten, dass sie unicursal oder vom Geschlecht Null sind.

Es ist überdiess evident, dass diess so sein muss, weil diese Curven geraden Linien des andern Systems entsprechen und nicht nur jede Gerade sondern jede Unicursalcurve in eine Unicursalcurve transformiert wird; denn wenn die Coordinaten eines Punktes rationale Functionen eines Parameters sind, so müssen die Coordinaten der entsprechenden Punkte als rationale Functionen dieser Letzteren auch rationale Functionen desselben Parameters sein.

336. Wir haben gesehen, dass für n grösser als zwei die Gleichungen 1) und 2) nicht befriedigt werden können, wenn die gemeinsamen Punkte der Curven $X_i = 0$ nur einfache Schnittpunkte sind. Wir werden in gleicher Art zeigen, dass für n grösser als fünf ein vielfacher Punkt von höherer als der zweiten Ordnung vorhanden sein muss, etc. Ist r der höchste der vorkommenden Indices, so multiplicieren wir die Gleichung 3) mit r und ziehen die Gleichung 1) von ihr ab, und erhalten

$$(r-1)\,\alpha_1 + 2\,(r-2)\,\alpha_2 + 3\,(r-3)\,\alpha_3 + \cdots (r-1)\,\alpha_{r-1} = (n-1)\,(3r-n-1).$$

Da hier jedes Glied der linken Seite positiv ist, so kann r nicht kleiner sein als $\frac{1}{3}\,(n+1)$. Wir können r gleich dieser Zahl nehmen, wenn $\frac{1}{3}\,(n+1)$ eine ganze Zahl ist oder mit andern Worten für ein n von der Form $3p-1$ können wir $r = p$ machen; alsdann müssen aber alle die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{r-1}$ verschwinden und die Curven haben nur die $p$fachen Punkte gemein; wir haben nach 3) $p\,\alpha_p = 3\,(3p-2)$, welches (den Fall $p = 6$, $\alpha_p = 8$ ausgenommen) durch keine ganzen Werthe von α_p befriedigt werden kann, sobald p die drei übersteigt. Ausgenommen also für $n = 2, 5$ und 8 muss r immer grösser als $\frac{1}{3}\,(n+1)$ sein.

337. In derselben Art wird eine Relation begründet, aus welcher wir jetzt eine wichtige Folgerung ziehen wollen, nämlich den Satz, dass die Summe der drei höchsten Ordnungszahlen der vielfachen Punkte n über-

schreiten muss. Seien r, s, t die drei höchsten unter diesen Ordnungszahlen, so zwar dass $s \leq r$ und $t \leq s$ ist, so entstehen aus den Gleichungen 1) und 3) durch Uebertragung der Glieder, welche r und s entsprechen, auf die andere Seite die Gleichungen

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots + t^2\alpha_t = n^2 - 1 - r^2 - s^2,$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + t\alpha_t = 3n - 3 - r - s,$$

und wir erhalten wie vorher eine Grenze für den niedrigsten annehmbaren Werth von t aus der Bemerkung, dass der Rest wesentlich positiv ist, den die um die erste verminderte $t$fache zweite Gleichung lässt. Unsere Absicht ist nun, zu zeigen, dass $n - r - s$ zu klein ist, um ein Werth von t zu sein, oder dass in diesem Falle immer

$$n^2 - 1 - r^2 - s^2 > t(3n - 3 - r - s)$$

ist. Setzen wir $r + s = n - t$, so wird diess

$$2rs - 1 + 2nt - t^2 > t(2n - 3 + t);$$

und da nach der Voraussetzung r und s nicht kleiner sind als t, so wird der kleinste Werth, welchen die erste Grösse haben kann, gefunden, indem man r und s gleich t setzt, wodurch die Ungleichheit entsteht

$$t^2 + 2nt - 1 > t^2 + 2nt - 3t,$$

welche augenscheinlich richtig ist.

338. Cremona hat für alle n bis auf $n = 10$ die annehmbaren Lösungen des betrachteten Systems von Gleichungen angegeben und wir wollen einige seiner Resultate entwickeln. Es ist aber bereits genug gesagt, um zu zeigen, dass wir immer Functionen X_i vom n^{ten} Grade in den x_i wählen können, so dass die Gleichungen

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3$$

drei Curven repräsentieren, welche gewisse feste für $n^2 - 1$ Schnittpunkte zählende Punkte — wir werden sie Hauptpunkte nennen, — gemeinsam haben und einen variablen Punkt bestimmen, dessen Coordinaten in Function der x_i' ausgedrückt das umgekehrte System von Gleichungen

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1' : X_2' : X_3'$$

liefern. Wir haben vorher gezeigt, dass die X_i' Functionen

n^{ten} Grades in den x_i' sind und es ist offenbar, dass sie gleich Null gesetzt gleichfalls Curven darstellen, welche eine gewisse Anzahl fester Punkte so gemein haben, dass den erörterten Bedingungen 1) und 2) Genüge geleistet wird. Es folgt aber damit nicht, dass dieselbe Lösung des Systems der beiden Gleichungen in dem einen und in dem andern Falle Anwendung findet, oder mit andern Worten das Curvennetz (Bündel, Gebilde zweiter Stufe)

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0,$$

welches den geraden Linien des einen Systems und das Curvennetz

$$a_1 X_1' + a_2 X_2' + a_3 X_3' = 0,$$

welches den geraden Linien des andern Systems entspricht, haben nicht nothwendig dieselbe Vertheilung der vielfachen Punkte.

339. Wir sahen im Falle der quadratischen Transformation, dass jedem der drei Hauptpunkte des einen Systems im andern System nicht ein Punkt, sondern eine Gerade entsprach und wir erweitern diesen Satz jetzt zu dem andern, dass im Allgemeinen jedem der Punkte α_r eine Unicursalcurve r^{ter} Ordnung entspricht.

Offenbar wird das System von Gleichungen

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3$$

illusorisch, wenn wir den Punkt x_i' suchen, welcher einem den Curven $X_i = 0$ gemeinschaftlichen Punkte x_i entspricht. Sei zuerst dieser Punkt ein einfacher Schnittpunkt derselben, so erhalten wir die Coordinaten x_i' eines ihm unendlich nahe benachbarten Punktes, respective proportional zu den Grössen

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\delta x_3,$$
$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\delta x_3,$$
$$\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\delta x_3;$$

wir erhalten somit für jedes in andrer Richtung vom Punkte x_i ausgehende Element einen andern entsprechenden Punkt x_i'. Wenn aber drei Curven einen gemeinschaftlichen Punkt haben, so geht ihre Jacobi'sche Curve durch diesen Punkt,

wie man nachweist, indem man die Gleichungen $X_i = 0$ in der Form

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial X_1}{\partial x_3} x_3 = 0,$$
$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial X_2}{\partial x_3} x_3 = 0,$$
$$\frac{\partial X_3}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial X_3}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} x_3 = 0$$

schreibt und zwischen denselben die x_i eliminiert. (Vergl. „Kegelschn." Art. 360.) So erkennen wir, dass, wenn wir δx_1 und δx_2 aus den vorher für die x_i' erhaltenen Ausdrücken eliminieren, δx_3 auch verschwindet, und dass somit alle die Punkte, welche den in x_i beginnenden Elementen oder kurz dem Punkte x_i entsprechen, in der geraden Linie

$$x_1' \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)$$
$$+ x_2' \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)$$
$$+ x_3' \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = 0$$

liegen.

340. Wir verfahren ganz ähnlich, wenn der den Curven $X_i = 0$ gemeinsame Punkt ein vielfacher Punkt ist. Sei derselbe beispielsweise ein Doppelpunkt, so verschwinden die im vorigen Art. für die x_i' gegebenen Werthe; wenn wir aber die Differentiale durch obere Indices, die zweiten Differentiale durch doppelte obere Indices bezeichnen — wie früher durch untere, nur dass wir denselben noch das trennende Komma beifügen, um die Verwechslung mit Exponenten auszuschliesssen — so sind x_1', x_2' x_3' respective proportional den Grössen

$$X_1^{1,1}\delta x_1^2 + X_1^{2,2}\delta x_2^2 + X_1^{3,3}\delta x_3^2 + 2X_1^{2,3}\delta x_2\delta x_3$$
$$+ 2X_1^{3,1}\delta x_3\delta x_1 + 2X_1^{1,2}\delta x_1\delta x_2,$$
$$X_2^{1,1}\delta x_1^2 + \ldots + 2X_2^{1,2}\delta x_1\delta x_2,$$
$$X_3^{1,1}\delta x_1^2 + \ldots + 2X_3^{1,2}\delta x_1\delta x_2.$$

Die Elimination der δx_i zwischen diesen Gleichungen führt auf die Beziehung der x_i zu den X_i, welche wir suchen. Aber die vorhergehenden Ausdrücke sind in der That nur scheinbar ternär, sie sind in Wirklichkeit binär; denn für

eine Function U und die frühere Bezeichnung der Differentiale ist

$$U_{11}x_1^2 + U_{22}x_2^2 + U_{33}x_3^2 + 2\,U_{23}x_2x_3 + \ldots = 0$$

die Gleichung des Tangentenpaares im Doppelpunkt der Curve $U = 0$ und somit auf die Form

$$U_{11}\,(x_1 - m x_3)^2 + 2\,U_{12}\,(x_1 - m x_3)\,(x_2 - n x_3) \\ + U_{22}\,(x_2 - n x_3)^2 = 0$$

zurückführbar. Es sind daher zwischen den drei durch das Vorige gegebenen Gleichungen nur zwei Grössen

$$\delta x_1 - m\,\delta x_3\,,\ \delta x_2 - n\,\delta x_3$$

zu eliminieren und man darf ohne das Resultat zu ändern δx_3 gleich Null setzen und δx_1 und δx_2 eliminieren. Damit erhalten wir aber sofort allgemein für einen $r$fachen Punkt die x_i' proportional zu den Grössen

$$(a, \ldots \between \delta x_1, \delta x_2)^r;\ (a', \ldots \between \delta x_1, \delta x_2)^r;\ (a'', \ldots \between \delta x_1, \delta x_2)^r;$$

und indem wir nach der in Art. 44. erklärten Methode δx_1 und δx_2 zwischen den entstehenden Gleichungen eliminieren, finden wir die x_i' als rationale Functionen eines Parameters, als die Coordinaten eines Punktes in einer Unicursalcurve von der Ordnung r.

341. Die Curven des einen Systems, welche den Hauptpunkten des andern entsprechen, sollen die Hauptcurven des Systems genannt werden und wir wollen zeigen, dass ihre Gesammtheit die Jacobi'sche Curve des Systems der Curven

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

bildet. Denn die Jacobi'sche Curve ist der Ort der neuen Doppelpunkte in solchen Curven des Systems, welche einen Doppelpunkt enthalten ausser den vielfachen Punkten, die allen seinen Curven gemeinschaftlich sind. Da aber jede dieser Curven bereits in diesen Hauptpunkten die Maximalzahl von Doppelpunkten hat, so kann sie einen neuen Doppelpunkt nur durch Zerfallen in Curven niederer Ordnungen erhalten und diess wird nur geschehen, wenn die gerade Linie des andern Systems, welche ihr entspricht, durch einen der Hauptpunkte hindurchgeht. In diesem Falle zerfällt die Curve

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

in die feste Curve r^{ter} Ordnung, welche diesem Hauptpunkt entspricht, und eine andere Curve von der Ordnung $n - r$, welche mit der gegebenen durch α_r gehenden Geraden veränderlich ist. Für zwei Unicursalcurven, deren Ordnungszahlen r und r' die Summe n haben, ist aber die Gesammt-Vielfachheit, welche aus den Singularitäten der Curven und aus ihren Durchschnittspunkten entspringt, gleichwerthig mit

$$\tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) + \tfrac{1}{2}(r'-1)(r'-2) + rr'$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$$

Doppelpunkten. So erkennen wir, dass die zusammengesetzte Curve, welche einer durch den Hauptpunkt α_r gehenden Geraden des andern Systems entspricht, ausserhalb der Hauptpunkte einen neuen Doppelpunkt besitzt, welcher ein Durchschnittspunkt der festen dem Hauptpunkt α_r entsprechenden Hauptcurve mit der veränderlichen Restcurve ist; der Ort solcher Punkte ist daher jene feste Curve. Dass in der That die Summe der Ordnungszahlen aller dieser Hauptcurven die Ordnung der Jacobi'schen Curve des Systems

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

ausmacht, ist schon in der Gleichung 3) ausgedrückt, nämlich

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + r\alpha_r = 3(n-1).$$

Aus der allgemeinen Theorie der Jacobi'schen Curve, in die wir im nächsten Kapitel genauer eingehen werden, ergiebt sich, dass das System der Hauptcurven durch jeden Punkt α_1 zweifach, durch jeden Punkt α_2 fünffach und durch jeden Punkt α_r $(3r-1)$fach hindurchgeht. Andere Sätze über die Anordnung der Hauptcurven in Bezug auf die Hauptpunkte brauchen wir nur anzuzeigen. Wenn wir z. B. eine gerade Linie in einem System nehmen, die nicht durch einen Hauptpunkt α_r geht, so kann die entsprechende Curve

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

keinen gewöhnlichen Punkt mit der Hauptcurve α_r gemein haben, die Durchschnittspunkte von beiden müssen ausschliesslich Hauptpunkte sein. Auf diesem Wege können wir sehen, dass jede Hauptgerade durch zwei Hauptpunkte geht, deren

Ordnungssumme der Vielfachheit n ist, und jeder Hauptkegelschnitt durch fünf Hauptpunkte von der Ordnungssumme $2n$, etc.

342. Wir sind nun in der Lage, die Charaktere der Curve zu bestimmen, welche einer Curve S von der Ordnung k entspricht und von der wir voraussetzen, dass sie nicht durch einen der Hauptpunkte geht. Wenn wir in eine Function vom Grade k für die Veränderlichen x_i' die X_i einsetzen, so erhalten wir offenbar eine Function vom Grade nk; und wenn die Curven $X_i = 0$ einen Punkt A gemeinschaftlich haben, so schneidet die ihm in der andern Figur entsprechende Gerade die Curven S' in k Punkten, welche sämmtlich A entsprechen und daher einen $k$fachen Punkt bilden; und ebenso entspricht jedem der Hauptpunkte α_r ein rkfacher singulärer Punkt. Wenn die Originalcurve keine vielfachen Punkte enthält, so hat die transformierte Curve keine solchen ausser in den Hauptpunkten. Die transformierte Curve ist also von der Ordnung nk, welcher als Maximalzahl der Doppelpunkte

$$\tfrac{1}{2}(nk-1)(nk-2)$$

entspricht; die Hauptpunkte ihrer Figur sind vielfache Punkte in ihr, zusammen gleichwerthig mit

$$\tfrac{1}{2}\alpha_1 k(k-1) + \tfrac{1}{2}\alpha_2\, 2k(2k-1) + \ldots + \tfrac{1}{2}\alpha_r\, rk(rk-1)$$

oder

$$\tfrac{1}{2}k^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots + r^2\alpha_r) - \tfrac{1}{2}k(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r)$$

oder in Folge der Gleichungen 1) und 3) mit

$$\tfrac{1}{2}(n^2-1)k^2 - \tfrac{3}{2}(n-1)k$$

Doppelpunkten. In Folge dessen ist der Defect der transformierten Curve

$$\tfrac{1}{2}nk(nk-1) - \left\{\tfrac{1}{2}(n^2-1)k^2 - \tfrac{3}{2}(n-1)k\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$$

d. h. dem der Originalcurve gleich.

Wenn aber die Originalcurve vielfache Punkte ausser den Hauptpunkten ihres Systems hat, so entsprechen denselben in der transformierten Curve vielfache Punkte von derselben Ordnung und die Defecte oder Geschlechter der beiden Curven sind auch dann einander gleich.

Wenn die Originalcurve durch einen der Hauptpunkte α_r' geht, so ist für jeden einzelnen Durchgang die entsprechende Curve α_r ein Theil der transformierten Curve und die Ordnung der eigentlichen transformierten Curve wird entsprechend reduciert. Es tritt auch eine entsprechende Reduction ein in der Zahl der Durchgänge, welche die transformierte Curve durch diejenigen Hauptpunkte macht, welche α_r enthält. Die Wirkung ist auch jetzt, dass die Gleichheit der Defecte beider Curven erhalten bleibt. Wenn z. B. die Originalcurve durch einen der Punkte α_1 geht, so erhält die transformierte Curve als Theil eine Gerade und die Ordnung der Restcurve wird von nk auf $nk - 1$ vermindert; es entspringt daraus eine Verminderung um $nk - 2$ in der Maximalzahl der Doppelpunkte. Geht nun diese gerade Linie durch zwei Punkte α_s, α_t so wird die Zahl der Durchgänge der Restcurve durch diese Punkte um je Eins verringert und die äquivalente Anzahl der Doppelpunkte um $sk - 1$ und $tk - 1$ respective oder ebenfalls um $nk - 2$ weil

$$s + t = n \text{ ist.}$$

Wir ersparen das Eingehen in weitere Einzelheiten, weil wir sofort auf einem andern Wege zu denselben Ergebnissen gelangen werden.

343. Jede Cremona'sche Transformation kann durch eine Folge von quadratischen Transformationen ersetzt werden.

Betrachten wir die allgemeinste Transformation, bei welcher den geraden Linien der einen Figur in der andern Curven n^{ter} Ordnung entsprechen, welche α_1 einfache, α_2 doppelte Punkte, etc. mit einander gemein haben. Wir haben in Art. 337. gesehen, dass es drei unter diesen Punkten giebt, deren Ordnungszahlen der Vielfachheit mehr als n zur Summe geben. Wählen wir diese als Hauptpunkte und vollziehen eine quadratische Transformation, so wird die Ordnungszahl der transformierten Curve

$$2n - r - s - t$$

nothwendig kleiner als n. In derselben Weise vermindern wir durch eine weitere quadratische Transformation die Ordnungszahl der Curve und setzen diess Verfahren so lange

fort, bis wir gerade Linien als entsprechend den Curven n^{ter} Ordnung erhalten. Da wir in Art. 327. bewiesen haben, dass durch eine beliebige quadratische Transformation das Geschlecht einer Curve nicht geändert wird, so zeigt die gegenwärtige Entwickelung wieder, dass diess auch durch eine Cremona'sche Transformation nicht geschieht.

Der folgende besondere Fall erläutert die Methode und kann zugleich zeigen, wie man die Anordnung der Hauptcurven verfolgen kann. Wir betrachten die Transformation, bei welcher gerade Linien in Curven fünfter Ordnung übergehen, die in A_1, A_2, A_3 drei einfache Punkte, in B_1, B_2, B_3 drei doppelte Punkt und in C einen dreifachen Punkt gemein haben. Nehmen wir C, B_1, B_2 als Hauptpunkte, so verwandeln sich durch eine quadratische Transformation die Curven fünfter Ordnung in solche von der dritten, welche B_3' als Doppelpunkt und die Punkte A_1', A_2', A_3', C' als einfache Punkte enthalten. Nehmen wir sodann A_3', B_3', C' als Hauptpunkte einer neuen quadratischen Transformation, so gehen die Curven dritter Ordnung in Kegelschnitte über, die durch die Punkte A_1'', A_2'', B_3'' gehen; eine letzte Transformation mit diesen Punkten als Hauptpunkten führt dann auf das Gebilde zweiter Stufe aus geraden Linien zurück. Wir können in derselben Weise untersuchen, wie die geraden Linien oder allgemeiner wie Curven k^{ter} Ordnung im ersten System transformiert werden, die $a_1$fach durch den Punkt A_1, etc. gehen. Nach der ersten Transformation haben wir

$$\begin{aligned}
k' &= 2k - c - b_1 - b_2;\\
c' &= k - b_1 - b_2;\\
b_1' &= k - c - b_2,\ b_2' = k - c - b_1,\ b_3' = b_3;\\
a_1' &= a_1,\ a_2' = a_2,\ a_3' = a_3.
\end{aligned}$$

Nach der zweiten Transformation, bei welcher A_3', B_3', C' die Hauptpunkte sind, haben wir

$$\begin{aligned}
k'' &= 3k - 2c - a_3 - b_1 - b_2 - b_3;\\
c'' &= 2k - c - a_3 - b_1 - b_2 - b_3;\\
b_2'' &= k - c - b_1,\ b_3'' = k - c - a_3,\ b_1'' = k - c - b_2;\\
a_3'' &= k - c - b_3,\ a_1'' = a_1,\ a_2'' = a_2.
\end{aligned}$$

Endlich nach der dritten Transformation mit den Hauptpunkten A_1'', A_2'', B_3''

$$k''' = 5k - 3c - 2b_1 - 2b_2 - 2b_3 - a_1 - a_2 - a_3;$$
$$c''' = 2k - c - b_1 - b_2 - b_3 - a_3;$$
$$a_1''' = 2k - c - b_1 - b_2 - b_3 - a_2,$$
$$a_2''' = 2k - c - b_1 - b_2 - b_3 - a_1, \; a_3''' = k - c - b_2;$$
$$b_2''' = k - c - b_1, \; b_1''' = k - c - b_2,$$
$$b_3''' = 3k - 2c - b_1 - b_2 - b_3 - a_1 - a_2 - a_3.$$

Wenn wir $k = 1$ und die übrigen Zahlen gleich Null setzen, so sehen wir, dass gerade Linien in Curven fünfter Ordnung übergehen, die einen dreifachen Punkt, drei doppelte und drei einfache Punkte gemein haben.

Um ferner die Correspondenz der Hauptpunkte zu zeichnen, bemerken wir, dass in der ersten Transformation dem Punkte C die gerade Linie $B_1' \, B_2'$ entspricht, dieser sodann in der zweiten Transformation ein durch

$$C'', A_3'', B_1'', B_2'', B_3''$$

gehender Kegelschnitt, und endlich diesem Letztern eine Curve dritter Ordnung, welche B_3''' zum Doppelpunkt und die übrigen sechs Punkte zu einfachen Punkten hat.

Die folgende Reihe von Beispielen giebt die Wirkungen der verschiedenen Arten der Cremona'schen Transformationen bis zu $n = 6$ an. Die Werthe zeigen auch die den Hauptpunkten entsprechenden Curven auf; z. B. im 3. drückt der Werth

$$c' = 3k - 2c - \Sigma(a)$$

aus, dass dem Punkte C' eine Curve dritter Ordnung entspricht, die C zum Doppelpunkt hat und durch die Punkte A geht.

Beisp. 1. (II.) $n = 2, \; \alpha_1 = 3.$

$$k' = 2k - a_1 - a_2 - a_3, \; a' = k - a_2 - a_3,$$
$$a_2' = k - a_3 - a_1, \; a_3' = k - a_1 - a_2.$$

Beisp. 2. (III.) $n = 3, \; \alpha_1 = 4, \; \alpha_2 = 1.$

$$k' = 3k - 2b - a_1 - a_2 - a_3 - a_4.$$
$$b' = 2k - b - a_1 - a_2 - a_3 - a_4, \; a_1' = k - b - a_1, \text{ etc.}$$

Beisp. 3. (IV., 1) $n = 4, \; \alpha_1 = 6, \; \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1.$

$$k' = 4k - 3c - \Sigma(a), \; c' = 3k - 2c - \Sigma(a), \; a_1' = k - c - a_1, \text{ etc.}$$

Beisp. 4. (IV., 2) $n = 4, \; \alpha_1 = 3, \; \alpha_2 = 3.$

$$k' = 4k - 2\Sigma(b) - \Sigma(a), \; b' = 2k - \Sigma(b) - a_2 - a_3,$$
$$b_2' = \text{etc}, \; a_1' = k - b_2 - b_3, \; a_2' = \text{etc.}$$

Beisp. 5. (V., 1) $n = 5$, $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$.
$k' = 5k - 4d - \Sigma(a)$, $d' = 4k - 3d - \Sigma(a)$, $a_1' = k - d - a_1$.

Beisp. 6. (V., 2) $n = 5$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$.
$k' = 5k - c - 2\Sigma(b) - \Sigma(a)$, $c' = 3k - 2c - \Sigma(b) - \Sigma(a)$,
$b_1' = 2k - c - a_1 - \Sigma(b)$, $a_1' = k - c - b_1$.

Beisp. 7. (V., 3) $n = 5$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 6$.
$k' = 5k - 2\Sigma(b)$, $b_1' = 2k - b_2 - b_3 - b_4 - b_5 - b_6$, etc.

Beisp. 8. (VI., 1) $n = 6$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_5 = 1$.
$k' = 6k - 5e - \Sigma(a)$, $e' = 5k - 4e - \Sigma(a)$, $a' = k - e - a_1$, etc.

Beisp. 9. (VI., 2) $n = 6$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$.
$k' = 6k - 3\Sigma(c) - 2\Sigma(b) - a$, $c_1' = 3k - 2c_1 - c_2 - \Sigma(b) - a$,
$b_1' = 2k - \Sigma(c) - b_2 - b_3 - b_4$, $a' = k - \Sigma(c)$.

Beisp. 10. (VI., 3) $n = 6$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$.
$k' = 6k - 3\Sigma(c) - 2b - \Sigma(a)$, $d' = 4k - 2\Sigma(c) - b - \Sigma(a)$,
$b_1' = 2k - \Sigma(c) - b - a_1'$, b_2' = etc., b_3' = etc. b_4' = etc.
$a_1' = k - c_2 - c_3$, a_2' = etc., a_3' = etc.

Beisp. 11. (VI., 4) $n = 6$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$.
$k' = 6k - 4d - 2\Sigma(b) - \Sigma(a)$; $c_1' = 3k - 2d - \Sigma(b) - a_2 - a_3$,
c_2' = etc., c_3' = etc., $b' = 2k - d - \Sigma(b)$, $a_1' = k - d - b_1$,
a_1' = etc., a_3' = etc., a_4' = etc.

Transformation einer gegebenen Curve.

344. Die im letzten Abschnitt entwickelten Bedingungen sind nothwendig für die allgemeine rationale Transformation zwischen zwei Ebenen, bei der irgend einem Punkte der einen Ebene ein Punkt der andern entsprechen soll. Aber sie sind nicht nothwendig zur rationalen Transformation, wenn wir nur die Transformation einer gegebenen Curve $S = 0$ untersuchen wollen. Wenden wir auf die Curve $S = 0$ eine Transformation

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3$$

an, in welcher die X_i Functionen n^{ten} Grades in den x_i sind, die nicht nothwendig den Cremona'schen Bedingungen genügen, so entspricht offenbar jedem Punkte der ersten Ebene ein einziger Punkt der zweiten Ebene, weil die x_i' als rationale Functionen der x_i gegeben sind. Nach der vorhergehenden Theorie würden aber, wenn die Curven $X_i = 0$ einfache Punkte in der Zahl α_1, doppelte in α_2, etc. gemein haben, einem Punkte der zweiten Ebene

$$n^2 - \alpha_1 - 4\alpha_2 - \dots$$

Punkte der ersten entsprechen und diese Anzahl — wir wollen sie θ nennen — wird im Allgemeinen von Eins verschieden sein. Der Ort der Punkte der zweiten Ebene, welche den Punkten der Curve S entsprechen, wird eine zu S entsprechende Curve S' sein und jedem Punkt P der ersten entspricht ein bestimmter Punkt P' der zweiten. Aus dem Gesagten geht aber hervor, dass dem Punkte P' in der ersten Figur ausser P noch $\theta - 1$ andere Punkte entsprechen; jedoch liegen diese Punkte gewöhnlich nicht in S, so dass die Curve der ersten Figur, welche der S' der zweiten entspricht, aus der Curve S und einer andern Curve besteht, die der Ort jener $\theta - 1$ Punkte ist. Und wenn wir nun die Punkte der Curve S betrachten, so erhellt, dass ebenso wie jedem Punkte P in S ein einziger Punkt P' in S' entspricht, auch umgekehrt dem Punkte P' in S' ein einziger bestimmter Punkt P in S entspricht.

Obwohl also die Gleichungen

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3$$

an sich nicht hinreichen, um rationale Ausdrücke für

$$x_1,\ x_2,\ x_3,$$

in Function der x_i' zu liefern, so thun sie dies in Verbindung mit der Gleichung $S = 0$. Wenn wir zwischen diesen Gleichungen die x_i eliminieren, so erhalten wir eine Gleichung $S' = 0$, welche die Bedingung für die Verträglichkeit der Gleichungen des Systems ist. Und wenn diese Gleichung erfüllt ist, so können die Werthe der x_i rational bestimmt werden, welche allen Gleichungen des Systems genügen. („Vorlesungen“ VI.) Wenn also eine gegebene Curve $S = 0$ durch die Substitution

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3$$

transformiert wird, so kann im Allgemeinen eine rationale umgekehrte Ausdrucksform

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1' : X_2' : X_3'$$

erhalten werden.

Beisp. Sei gegeben

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 + x_1^2 : x_2 x_3 + x_1 x_2 : x_2 x_3 + x_1 x_2;$$

so dass geraden Linien der zweiten Ebene Kegelschnitte der ersten entsprechen, die nur die beiden Punkte

$$x_2 = x_1 = 0,\ x_3 = x_1 = 0$$

mit einander gemein haben. Einem Punkte der zweiten Ebene entsprechen daher im Allgemeinen zwei Punkte der ersten. Die allgemeinen Ausdrücke der x_i in Function der x_i' können leicht gebildet werden, indem man bemerkt, dass

$$x_1 - x_2,\ x_1 - x_3$$

respective proportional sind zu

$$x_1' - x_2',\ x_1' - x_3',$$

was geometrisch aussagt, dass die Punkte x_i und x_i' als in derselben Ebene liegend betrachtet und auf dasselbe System von Fundamentalelementen bezogen mit dem Einheitpunkte in einer Geraden liegen. Mit andern Worten, die Gleichungen werden für

$$x_1 = x_1' + \lambda,\ x_2 = x_2' + \lambda,\ x_3 = x_3' + \lambda$$

mit denjenigen Werthen von λ erfüllt, welche der Gleichung

$$2\lambda^2 + \lambda(x_1' + x_2' + x_3') + x_2' x_3' = 0$$

genügen. Man sieht, dass jedem Werthsystem der x_i' zwei verschiedene Werthsysteme der x_i entsprechen. Diess ist aber nicht mehr der Fall, wenn wir die Transformation einer gegebenen Curve betrachten. Nehmen wir die gerade Linie der ersten Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

so ist die Beziehung zwischen einem Punkt dieser Geraden und dem entsprechenden Punkt der zweiten Ebene durch die Gleichungen

$$x_i = x_i' + \lambda$$

mit der Bedingung

$$(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\lambda = -(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')$$

ausgedrückt.

Sei ferner $S = 0$ ein Kegelschnitt der ersten Ebene und durch die Substitution von

$$x_i = x_i' + \lambda$$

in seine Gleichung erhalte man (vergl. „Kegelsch." Art. 353.)

$$\lambda^2 + P\lambda + S';$$

so ist die dem Kegelschnitt $S = 0$ entsprechende Curve eine Curve vierter Ordnung, deren Gleichung man durch Elimination von λ zwischen

$$\lambda^2 + P\lambda + S' = 0 \text{ und}$$

$$2\lambda^2 + \lambda(x_1' + x_2' + x_3') + x_2' x_3' = 0$$

erhält. Und der Ausdruck der x_i in Function der x_i' wird gebildet, indem man für λ die gemeinschaftliche Wurzel dieser Gleichungen nimmt, welche durch die Gleichung

$$\left\{2P - (x_1' + x_2' + x_3')\right\}\lambda + 2S' - x_2' x_3' = 0$$

bestimmt ist.

345. Die Unveränderlichkeit des Geschlechtes besteht, wie wir schon aus Art. 83. wissen, für jede Transformation, bei welcher einem Punkte der einen Curve ein einziger bestimmter Punkt der andern Curve entspricht.

Es wird wie in Art 342. bewiesen, dass bei der Transformation einer Curve S von der Ordnung μ mittelst der Gleichungen

$$x_1' : x_2' : x_3' = X_1 : X_2 : X_3,$$

in denen die X_i Functionen vom Grade p sind, die Ordnung der transformierten Curve

$$\mu p - \alpha_1 - 2\alpha_2 - \text{etc.}$$

ist, für α_1, α_2, etc. als die respectiven Anzahlen der einfachen, der doppelten, etc. Punkte, welche den Curven $X_i = 0$ gemeinsam sind und zugleich in $S = 0$ liegen; denn die Punkte, in denen eine beliebige gerade Linie ξ_i die transformierte Curve schneidet, entsprechen den Punkten, in denen die Curve $S = 0$ von der Curve

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 = 0$$

geschnitten wird.

Wir untersuchen nun, wie durch diese Transformation die Ordnung der transformierten Curve so stark als möglich reduciert werden kann. Wie in Art. 335. können die $X_i = 0$ nur zwei Bedingungen weniger unterworfen werden als der zur Bestimmung einer Curve p^{ter} Ordnung hinreichenden Anzahl, d. h.

$$\tfrac{1}{2} p (p + 3) - 2$$

Bedingungen; und wenn wir diese Curven durch eine möglichst grosse Anzahl der Doppelpunkte von S hindurchführen, so verfügen wir über jene Bedingungen so, dass die Ordnung der transformierten Curve am meisten verringert wird. Sei D der Defect der Curve S, also die Zahl ihrer Doppelpunkte

$$\tfrac{1}{2} (\mu^2 - 3\mu) - D + 1$$

und nehmen wir zuerst an

$$p = \mu - 1,$$

so können wir die X_i durch

$$\tfrac{1}{2} (\mu^2 + \mu) - 3$$

Punkten hindurchführen; wir wählen als solche die sämmtlichen Doppelpunkte und dazu

$$2\mu + D - 4$$

andere Punkte der Curve S. Schreiben wir daher

$\alpha_1 = 2\mu + D - 4,\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(\mu^2 - 3\mu) - D + 1,\ p = \mu - 1,$

so erhalten wir für die Ordnung von S' den Werth

$$\mu p - \alpha_1 - 2\alpha_2 = D + 2.$$

Nehmen wir ferner

$$p = \mu - 2,$$

was also voraussetzt, dass μ grösser als zwei ist. Indem wir ganz in der vorigen Weise verfahren, erkennen wir, dass

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\mu^2 - 3\mu) - D + 1,\ \alpha_1 = \mu + D - 4$$

gewählt werden muss und dass die Ordnung der transformierten Curve noch immer $D + 2$ sein wird.

Nehmen wir endlich

$$p = \mu - 3,$$

so wählen wir

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\mu^2 - 3\mu) - D + 1,\ \alpha_1 = D - 3,$$

vorausgesetzt, dass D grösser ist als zwei; wir finden dann die Ordnung der transformierten Curve gleich $D + 1$.

Da die transformierte Curve, wie wir bewiesen haben, mit der Originalcurve denselben Defect hat, so lautet unser Ergebniss dahin, dass eine Curve von der Ordnung μ mit dem Defect D oder mit

$$\frac{1}{2}(\mu^2 - 3\mu) - D + 1$$

Doppelpunkten immer in eine Curve von der Ordnung $D + 2$ mit dem Defect D oder mit $\frac{1}{2}(D^2 - D)$ Doppelpunkten transformiert werden kann; und insbesondere wenn D grösser als zwei ist, in eine Curve von der Ordnung $D + 1$ mit $\frac{1}{2}(D^2 - 3D)$ Doppelpunkten.

Ist aber das Geschlecht D grösser als μ oder die Ordnungszahl μ grösser als fünf, so kann man durch

$$p = \mu - 4,$$

α_2 wie früher und

$$\alpha_1 = D - p - t$$

überführen in eine Cure von der Ordnung $D - 1$ mit

$$\tfrac{1}{2}(D-1)(D-6)$$

Doppelpunkten.[77])

Die Anwendung derselben Transformation auf die transformierte Curve giebt eine Curve der nämlichen Art wieder.

So kann also eine Curve für $D=0$ in einen Kegelschnitt und dieser durch eine Cremona'sche Transformation weiter in eine Gerade, für $D=1$ in eine Curve dritter Ordnung, für $D=2$ in eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte, für $D=3$ in eine allgemeine Curve vierter Ordnung, für $D=4$ in eine Curve fünfter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, etc. transformiert werden; für $D=7$ aber entweder in eine Curve achter Ordnung mit vierzehn oder eine Curve sechster Ordnung mit drei Doppelpunkten, etc.

346. Der Fall der Unicursalcurven hält uns nicht auf; es ist $D=0$ und die transformierte Curve ein Kegelschnitt, die Coordinaten x_i' sind, wie wir wissen, als quadratische Functionen eines Parameters θ ausdrückbar, so dass die Coordinaten x_i, welche rationale Functionen der x_i' sind, als rationale Functionen dargestellt werden können.

Betrachten wir den Fall $D=1$; die transformierte Curve ist eine Curve dritter Ordnung und zwar, was zu bemerken wichtig ist, von einer absoluten Invariante, die von der gewählten Transformation unabhängig ist; d. h. das Doppelverhältniss der vier Tangenten ist unabhängig von ihr, welche von einem Punkte der Curve aus an sie gehen. (Art. 230.) Es besteht daher ein entsprechender Satz für jede Curve vom Geschlecht Eins.[78]) Diese Curven haben eine absolute Invariante. Die Coordinaten eines Punktes der Curve können als rationale Functionen eines Parameters θ und von $\sqrt{\Theta}$ ausgedrückt werden, wo Θ eine Function vierten Grades von θ ist. Es ist hinreichend, diess für den Fall der Curve dritter Ordnung zu zeigen, weil die x_i als rationale Functionen der x_i' dargestellt werden können; für diesen Fall ergiebt es sich aber direct, indem man den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ in der Curve gelegen denkt und dann $x_2 = \theta x_1$ einsetzt in die Gleichung der Curve, die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ werden unmittelbar in der bezeichneten Form erhalten. Und die Werthe von θ, für welche $\Theta = 0$ ist, sind diejenigen, welche den vier Tangenten von $x_1 = x_2 = 0$ an die Curve entsprechen.

Die Coordinaten eines Punktes einer Curve vom Geschlecht Eins können also als rationale Functionen von θ und $\sqrt{\Theta}$ ausgedrückt werden und man kann durch eine lineare Transformation von θ d. h. durch Einführung einer zweckmässig bestimmten Function

$$(a\theta + b) : (c\theta + d)$$

für θ die Grösse $\sqrt{\Theta}$ auf die Form

$$\sqrt{(1 - \theta^2)(1 - k^2\theta^2)}$$

bringen, welche für $\theta = \sin\text{am}\, u$ nichts anderes ist als $\cos\text{am}\, u\, \Delta\,\text{am}\, u$, so dass wir sagen können, die Coordinaten einer Curve vom Geschlecht Eins können als elliptische Functionen eines Parameters u ausgedrückt werden.

347. Es giebt eine analoge Theorie für das Geschlecht zwei, wo die Curve auf eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt zurückführbar ist. Wenn wir den Doppelpunkt dieser Letzteren als $x_1 = x_2 = 0$ wählen und $x_2 = \theta x_1$ setzen, so können wir die Verhältnisse der x_i als rationale Functionen von θ und $\sqrt{\Theta}$ darstellen, wo Θ eine Function sechsten Grades von θ ist; und diess ist gleichbedeutend damit, dass die Coordinaten als hyperelliptische Functionen der ersten Art von einem Parameter u ausdrückbar sind.

Für höhere Werthe von D sind die Coordinaten irrationale Functionen eines Parameters und es ist nur in speciellen Fällen möglich, sie durch Radicale darzustellen.

348. Wir wollen, ehe wir diesen Theil der Untersuchung abschliessen, eine andere Methode erwähnen, durch welche das nämliche Problem studiert werden kann. Wir gehen aus von den Gleichungen, setzen wir

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,$$

die die Coordinaten x_i und x_i' verbinden und welche in den einen wie in den andern homogen sind; seien ihre Grade in den verschiedenen Variabeln

$$a_1, a_2, a_3 \text{ und } a_1', a_2', a_3'$$

respective. Wenn wir zwischen diesen drei Gleichungen die x_i' eliminieren, so erhalten wir eine Gleichung $S = 0$ vom Grade

$$a_1 a_2' a_3' + a_2 a_3' a_1' + a_3 a_1' a_2'$$

in den x_i, und durch Elimination der x_i eine Gleichung der $S' = 0$ vom Grade

$$a_1' a_2 a_3 + a_2' a_3 a_1 + a_3' a_1 a_2$$

in den x_i'. Die Bedingungen $S = 0$, $S' = 0$ müssen erfüllt werden, damit die Gleichungen

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0$$

zugleich bestehen können; aber für jedes System von Werthen der x_i, welches der Gleichung $S = 0$ genügt, lässt sich ein Werthsystem der x_i' finden, welches die Gleichungen $A_i = 0$ und daher auch die Gleichung $S' = 0$ befriedigt.

Die Zahl der Doppelpunkte der Curve $S = 0$ kann nach den Methoden der Algebra untersucht werden, und das Resultat, das wir erhalten, ist

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} a_2' a_3' (a_2' a_3' - 1) a_1^2 + \tfrac{1}{2} a_3' a_1' (a_3' a_1' - 1) a_2^2 \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} a_1' a_2' (a_1' a_2' - 1) a_3^2 \\ &+ \left\{(a_1' a_2' - 1)(a_3' a_1' - 1) - \tfrac{1}{2}(a_1' - 1)(a_1' - 2)\right\} a_2 a_3 \\ &+ \left\{(a_2' a_3' - 1)(a_1' a_2' - 1) - \tfrac{1}{2}(a_2' - 1)(a_2' - 2)\right\} a_3 a_1 \\ &+ \left\{(a_3' a_1' - 1)(a_2' a_3' - 1) - \tfrac{1}{2}(a_3' - 1)(a_3' - 2)\right\} a_1 a_2; \end{aligned}$$

man erhält den entsprechenden Ausdruck für die Zahl der Doppelpunkte in $S' = 0$ durch Vertauschung der gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen. Wir finden endlich den Defect in jedem Falle gleich $\frac{1}{2}(\Omega + 2)$ für

$$\begin{aligned} \Omega = a_1^2 a_2' a_3' + a_2^2 a_3' a_1' + a_3^2 a_1' a_2' + a_1'^2 a_2 a_3 + a_2'^2 a_3 a_1 \\ + a_3'^2 a_1 a_2 + 2 a_1 a_1' (a_2 a_3' + a_2' a_3) + \ldots \\ - 3 (a_1 a_2' a_3' + \ldots + a_1' a_2' a_3 + \ldots). \end{aligned}$$

Beide Curven sind also vom nämlichen Geschlecht.

Entsprechen von Punkten in einer gegebenen Curve.

349. Das bisher Gesagte mag hinreichen, um die Theorie des rationalen Entsprechens zu erklären. Im Folgenden untersuchen wir das allgemeine Entsprechen zweier Punkte derselben Curve, bei welchem jeder Punkt den oder die ihm entsprechenden andern bestimmt. Nehmen wir an, eine gegebene Lage von P entspreche α' Lagen von P' und einer gegebenen Lage von P' α Lagen von P, so soll diess Entsprechen ein (α, α') Entsprechen oder eine (α, α') Correspon-

denz heissen. Für $\alpha = \alpha' = 1$ ist diese Beziehung die einer rationalen Transformation.

Als ein einfaches Beispiel des Entsprechens in einer Curve von der Ordnung μ nehmen wir an, dass die Punkte P und P' mit einem festen Punkte O in einer geraden Linie liegen; dann entsprechen dem gegebenen P $\mu - 1$ verschiedene Lagen von P' und dem gegebenen P' $\mu - 1$ Lagen von P, oder die so festgesetzte Beziehung ist eine $(\mu - 1, \mu - 1)$ Correspondenz. In Art. 329. stiessen wir auf diese besondere Beziehung im Fall eines Kreises. Dieses Entsprechen ist rational im Fall des Kegelschnittes $\mu = 2$. Wenn der Punkt O in der betrachteten Curve liegt, so entsprechen einer gegebenen Lage des einen Punktes $\mu - 2$ Lagen des andern; oder allgemeiner, wenn O ein vielfacher Punkt vom Grade p in der Curve ist, so entsprechen einer gegebenen Lage des einen Punktes $\mu - p - 1$ Lagen des andern und das Entsprechen ist ein $(\mu - p - 1, \mu - p - 1)$ Entsprechen. Wir erhalten in dieser Weise ein $(1, 1)$ Entsprechen von Punkten in einer Curve dritter Ordnung, indem wir O willkürlich in der Curve wählen, oder in einer Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt, indem wir O im Doppelpunkt annehmen; aber wir können kein $(1, 1)$ Entsprechen in einer allgemeinen Curve vierter Ordnung auf diesem Wege herstellen.

350. Im vorher betrachteten Beispiel war das Entsprechen ein symmetrisches, man gelangte von P zu P' durch dieselbe Construction wie von P' zu P und überdiess war $\alpha = \alpha'$. Als Beispiel eines nicht symmetrischen Entsprechens betrachten wir das, bei welchem P' als Tangentialpunkt von P gegeben wird. Dann ist für gegebenes P der Punkt P' einer von den Schnittpunkten der Tangente in P mit der Curve, d. h. einer gegebenen Lage von P entsprechen $\mu - 2$ Lagen von P'; wenn aber P' gegeben ist, so ist P einer der Berührungspunkte der von P' an die Curve gehenden Tangenten und einer gegebenen Lage von P' entsprechen somit $\nu - 2$ Lagen von P für ν als die Classe der Curve. Wir haben also ein $(\nu - 2, \mu - 2)$ Entsprechen. Vielleicht ist es unnöthig zu bemerken, dass $\alpha = \alpha'$ sein kann, ohne dass das Entsprechen ein symmetrisches ist.

351. Im Falle einer Unicursalcurve, wo einem gegebenen Punkte der Curve ein einziger Werth des Parameters θ entspricht, und einem gegebenen Werthe von θ ein einziger Punkt der Curve, können wir in Ausdehnung des Begriffs der Correspondenz von einem (1, 1) Entsprechen der Punkte und der Parameter sprechen. Es folgt daraus, dass, wenn der Punkt P α Lagen hat, sein Parameter θ durch eine Gleichung vom Grade α gegeben sein muss, dass also, wenn die Punkte P, P' ein Entsprechen (α, α') haben, die Relation zwischen ihren Parametern θ, θ' durch eine Gleichung von der Form

$$(\theta, 1)^{\alpha} (\theta', 1)^{\alpha'} = 0$$

gegeben sein muss, eine Gleichung nämlich, welche für gegebenes θ vom Grade α' in θ' und für gegebenes θ' vom Grade α in θ ist.

352. Ein Punkt kann sich selbst entsprechen und heisst dann ein Verbindungspunkt; wenn z. B. die Punkte P, P' mit einem festen Punkte O in gerader Linie liegen, so ist der Berührungspunkt einer von O ausgehenden Tangente der Curve ein Verbindungspunkt und wenn diese Punkte die einzigen Verbindungspunkte sind, so ist ihre Anzahl $= \nu$. Die einzigen andern Punkte, welche auf den ersten Blick als Verbindungspunkte erscheinen könnten, sind die Doppelpunkte und Spitzen der Curven; denn wenn P ein Doppelpunkt oder eine Spitze ist, so schneidet die Gerade OP die Curve in P, in demselben Punkte als einen der $\mu - 1$ Durchschnittspunkte und in $\mu - 2$ andern Punkten, oder die Gerade aus O nach dem Doppelpunkt oder der Spitze schneidet die Curve ebenda zweifach und in $\mu - 2$ andern Punkten. Aber im Falle des Doppelpunktes gehören die beiden in ihm liegenden Schnittpunkte zu verschiedenen Aesten der Curve, sie fallen zwar zusammen, aber sie sind keine aufeinander folgenden Punkte; im Falle der Spitze sind sie solche. Wirklich nimmt im Falle einer Unicursalcurve der Parameter θ im Doppelpunkt zwei verschiedene Werthe an, denen die nämlichen Coordinaten entsprechen, während für die Spitze jene beiden Werthe einander gleich werden. Mit noch andern Worten, die Gerade von O nach einer Spitze ist obwohl keine eigentliche Tangente der Curve doch in einem höhern Sinne eine

Tangente der Curve als die Gerade von O nach einem Doppelpunkt. Wir schliessen also, dass der Doppelpunkt kein Verbindungspunkt ist, während die Spitze es in einem besondern Sinne ist. Ausser den Spitzen sind die Berührungspunkte der Tangenten aus O die eigentlichen Verbindungspunkte in der Curve.

Indem wir zur Unicursalcurve und zur Gleichung

$$(\theta, 1)^{\alpha} (\theta', 1)^{\alpha'} = 0$$

zurückkehren, so haben wir in einem Verbindungspunkt $\theta = \theta'$ und erhalten daher zur Bestimmung dieser Punkte eine Gleichung

$$(\theta, 1)^{\alpha + \alpha'} = 0,$$

d. h. wenn die Punkte P, P' ein Entsprechen (α, α') haben, so ist die Anzahl der Verbindungspunkte gleich $\alpha + \alpha'$. (Art. 83.) Die Anwendung des Satzes auf den Fall, wo P, P' mit einem festen Punkte O in gerader Linie liegen und das Entsprechen ein $(\mu - 1, \mu - 1)$ Entsprechen ist, giebt $2(\mu - 1)$ Verbindungspunkte; unter ihnen ist die Zahl der eigentlichen Verbindungspunkte $= \nu$ und die der besondern als die der Spitzen $= \varkappa$ oder wir müssen, wie es in der That für eine Unicursalcurve der Fall ist, die Relation haben

$$\nu + \varkappa = 2(\mu - 1).$$

In dem andern Falle, wo P' ein Tangentialpunkt von P ist, sahen wir das Entsprechen als ein $(\nu - 2, \mu - 2)$ und die Zahl der Verbindungspunkte muss also $\mu + \nu - 4$ sein; nun sind aber in diesem Falle die eigentlichen Verbindungspunkte die Inflexionspunkte und die besondern die Spitzen, die Gesammtzahl derselben also gleich $\iota + \varkappa$ und wir erhalten den Satz

$$\iota + \varkappa + \mu + \nu - 4 \text{ oder}$$
$$\iota = 3(\mu - 1) - 2\varkappa,$$

was wirklich für eine Unicursalcurve mit $\varkappa$ Spitzen der Fall ist.

353. Wenn wir den Punkt P als gegeben denken, so kommt die geometrische Construction zur Bestimmung von P' im Allgemeinen darauf hinaus, dass eine gewisse von P abhängige Curve Θ durch ihre Durchschnitte mit der gegebenen Curve die P' angiebt. In manchen Fällen ist P' irgend einer der fraglichen Durchschnittspunkte, in andern

Fällen liegt eine gewisse Anzahl von ihnen im Allgemeinen im gegebenen Punkte P und diese werden ausgeschlossen. So ist in dem Falle, wo P und P' mit O in einer Geraden liegen, diese Gerade OP die Curve Θ und sie schneidet die gegebene Curve in dem einfachen auszuschliessenden Punkte P und in $\mu - 1$ andern Punkten. Und wenn P' ein Tangentialpunkt von P ist, so ist die Tangente in P, welche die gegebene Curve daselbst in zwei nicht zählenden Punkten schneidet, die Curve Θ und es giebt $\mu - 2$ zählende Punkte als entsprechend.

Die Curve Θ kann aber ferner die gegebene Curve in Punkten von zwei oder mehreren verschiedenen Classen von Punkten schneiden, so dass nur die Punkte von einer derselben Lagen von P' sind. So ist es im letzt vorhergehenden Beispiele, wenn wir die Punkte P und P' vertauschen oder P' als den Berührungspunkt einer von P an die Curve gehenden Tangente betrachten; die Curve Θ ist das System der $\nu - 2$ Tangenten, welche von P an die Curve gehen. Jede dieser Tangenten schneidet die Curve in P, welcher einfach zählt, im Berührungspunkt P', der zweifach zählt, und in $\mu - 3$ andern Punkten P'', welche wie wir sagen wollen zu P cotangential sind, so dass PP'' die Curve in einem von P und P'' verschiedenen Punkte P' berührt. Oder was dasselbe ist, die Curve Θ von der Ordnung $\nu - 2$ schneidet die gegebene Curve in dem für $\nu - 2$ zählenden Punkte P, in $\nu - 2$ Punkten P', deren jeder für zwei zählt, und in $(\nu - 2)(\mu - 3)$ Punkten P', die einfach zählen. Die Correspondenz (P, P') ist, wie wir sahen $(\mu - 2, \nu - 2)$, die Correspondenz (P, P'') ist offenbar $(\overline{\nu - 2}\, \overline{\mu - 3}, \overline{\nu - 2}\, \overline{\mu - 3})$.

354. Der Satz für eine Unicursalcurve führt zu einem analogen Satze für eine allgemeine Curve; man erwartet, dass die Anzahl der Verbindungspunkte die um ein Vielfaches des Defects vermehrte Summe von α und α' sei; etwa

$$= \alpha + \alpha' + k . 2D.$$

Das letzte Beispiel zeigt jedoch, dass es nöthig ist, die Curve Θ und die verschiedenen Classen von Schnittpunkten zu unterscheiden, die sie mit der betrachteten Curve hat. Der allgemeine Satz sagt daher aus, dass für eine Curve von

gegebenem Defect D, wenn P', P'', ... die entsprechenden Punkte von P sind und wenn P, P' eine (α, α') Correspondenz mit a als Anzahl der Verbindungspunkte haben, P, P'' eine (β, β'') Correspondenz mit b Verbindungspunkten etc., und wenn die Θ, die durch ihre Schnittpunkte mit der gegebenen Curve die Punkte P', P'', ... bestimmt, dieselbe in in dem Punkte P als k fach, in jedem der Punkte P' als p fach und in jedem der Punkte P'' als q fach zählend schneidet, etc., die Relation besteht

$$p(a - \alpha - \alpha') + q(b - \beta - \beta') + \ldots = k.\, 2D,$$

wobei in jeder der verschiedenen Correspondenzen die speciellen Verbindungspunkte, wenn solche vorhanden sind, gezählt werden müssen.

Wir erörtern diess an den schon erwähnten Beispielen. Wenn P und P' mit O in einer Geraden liegen, so erhalten wir

$$1) \quad \nu + \varkappa = 2(\mu - 1) + 2D.$$

Wenn P' ein Tangentialpunkt von P ist, so folgt

$$2) \quad \iota + \varkappa = \mu + \nu - 4 + 4D;$$

und in dem Falle wo P ein Tangentialpunkt von P' ist und wo b, β, β' sich auf die Correspondenz P, P'' der Cotangentialen beziehen,

$$b - 2(\mu - 3)(\nu - 2) + 2(a - \alpha - \alpha') = (\nu - 2)\, 2D,$$

wo nach dem vorigen Beispiel

$$a - \alpha - \alpha' = \iota + \varkappa - (\mu + \nu - 4) = 4D$$

ist; somit

$$b - 2(\mu - 3)(\nu - 2) = (\nu - 6)\, 2D.$$

Die eigentlichen Verbindungspunkte b sind hier die Berührungspunkte der Doppeltangenten, deren Zahl 2τ ist; aber als specielle Verbindungspunkte zählen die Spitzen jede $(\nu - 3)$ fach, wie wir annehmen müssen, und das Ergebniss ist also

$$3) \quad 2\tau = 2(\mu - 3)(\nu - 2) + (\nu - 6)\, 2D - (\nu - 3)\varkappa.$$

Die Gleichungen 1), 2) und 3), welche die Classe, die Zahl der Inflexionen und die Zahl der Doppeltangenten einer Curve von der Ordnung μ aus δ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen angeben, stimmen mit den Plücker'schen Gleichungen überein; man bestätigt sie am leichtesten, indem man die in

Art. 83. gegebenen Ausdrücke der verschiedenen Grössen in μ, ν und $\alpha = 3\nu + \varkappa$ anwendet.

355. Wenn in einer Curve die Punkte P und P' eine (1, 1) Correspondenz haben, die Punkte (P', P'') eine ebensolche, und so fort bis zu den Punkten $P^{(n-1)}$, $P^{(n)}$, so haben offenbar auch die Punkte P, $P^{(n)}$ eine (1, 1) Correspondenz. Und umgekehrt, die Punkte $P, P^{(n)}$, welche sich (1, 1) entsprechen, können als mit einander verbunden durch die Reihe der vermittelnden Punkte $P', P'', \ldots P^{(n-1)}$ betrachtet werden.

Im Fall einer Curve vom Geschlecht Null bringt die (1, 1) Correspondenz der Punkte P, P' auch eine solche Correspondenz der bezüglichen Parameter θ, θ' mit sich; nämlich von der Form

$$(\theta, 1)(\theta', 1) = 0$$

oder was dasselbe ist

$$a\theta\theta' + b\theta + c\theta' + d = 0,$$

d. h. die Parameter θ, θ' sind projectivisch von einander abhängig. Die Transformation hängt von drei willkürlichen Parametern ab.

Denken wir die Curve als Kegelschnitt, so ist bekannt, dass für ein (1, 1) Entsprechen der Punkte P, P' die Gerade PP' einen Kegelschnitt umhüllt, der mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat; ein solcher Kegelschnitt hängt als der Bedingung der Doppelberührung unterliegend wirklich von drei Bedingungen oder Parametern ab. Wenn wir aber die Punkte A, B willkürlich wählen und sodann zwei Punkte P, Q des Kegelschnitts mit A in gerader Linie annehmen, P' aber in gerader Linie mit BQ, so haben die Punkte P, P' ein (1, 1) Entsprechen, welches scheinbar von vier Parametern abhängt; es folgt daraus, dass die Punkte A und B ohne Verlust an Allgemeinheit einer einfachen Bedingung unterworfen werden können.

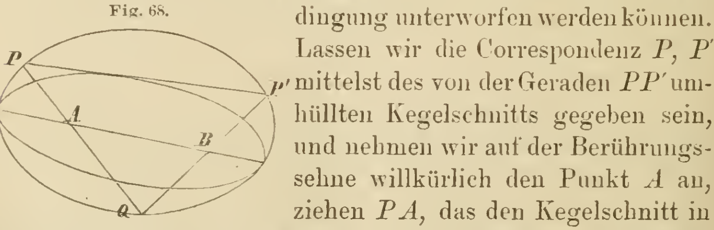


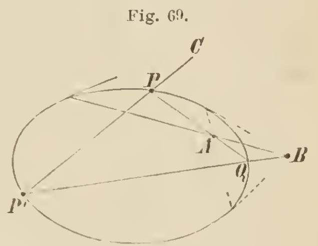
Fig. 68.

Lassen wir die Correspondenz P, P' mittelst des von der Geraden PP' umhüllten Kegelschnitts gegeben sein, und nehmen wir auf der Berührungssehne willkürlich den Punkt A an, ziehen PA, das den Kegelschnitt in Q schneidet und QP', welches in der Sehne den Punkt B

bestimmt, so ist mittelst der Punkte A, B die (1, 1) Correspondenz auch bestimmt, aber A ist als ein bestimmter Punkt in der Berührungssehne, sagen wir als ihr Schnittpunkt mit einer festen Geraden gegeben und B wird nach dem Vorigen gefunden und wir haben also die durch diese zwei Punkte vermittelte Correspondenz ganz ebenso, als wenn A in der Berührungssehne willkürlich gewählt wäre.

Ein im Vorherigen mit enthaltener Fall ist es, wenn die (1, 1) Correspondenz von P, P' so beschaffen ist, dass die Gerade PP' durch einen festen Punkt C geht; der umhüllte Kegelschnitt ist als Liniengebilde betrachtet hier der zweifach genommene Punkt C, als Punktgebilde aber das Paar der von C an den gegebenen Kegelschnitt gehenden Tangenten; d. h. die Berührungssehne ist die Polare von C und die Construction ist die nämliche wie vorhin, indem wie man leicht sieht die Punkte A, B, C ein Tripel conjugierter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt bilden; die Originalcorrespondenz der Punkte P, P' als in einer Geraden aus C gelegen, wird durch eine Correspondenz mittelst der Punkte A und B ersetzt, die mit C ein Tripel harmonischer Pole bilden.

Fig. 69.



Die vorhergehenden Eigenschaften stehen in Beziehung zu dem Problem von der Einschreibung eines Polygons in einen Kegelschnitt, falls seine Seiten entweder durch gegebene Punkte gehen oder Kegelschnitte berühren müssen, die selbst mit dem gegebenen in doppelter Berührung sind.

356. In einer Curve dritter Ordnung ($D = 1$) haben wir eine (1, 1) Correspondenz, die von einem einzigen Parameter abhängt; aber es giebt zwei Arten dieser Correspondenz, nämlich 1) die, dass die Punkte P, P' mit einem Punkte A der Curve dritter Ordnung in gerader Linie liegen, und 2) so, dass P mit Q in einer Geraden aus dem Punkte A der Curve liegt, indess Q und P' in einer Geraden durch den festen Punkt B der Curve enthalten sind. Die letztere Beziehung ist auch nur scheinbar von zwei Parametern abhängig; denn für C als einen bestimmten Punkt der Curve dritter Ordnung

und mittelst der Geraden AC, welche die Curve noch in O und BO, welche sie noch in D schneidet, wird derselbe correspondirende Punkt P' zu P erhalten, indem man PDR und RCP' zieht, d. h. mittelst eines einzigen Punktes D. Es ist in Wahrheit offenbar, dass von P ausgehend und P' als Schnitt von QB mit RC construierend, die Curve dritter Ordnung durch die Punkte A, B, C, D, O, P, Q, R auch durch den Punkt P' geht, so dass die Punkte A, B und die Punkte C, D zu demselben Punkte D führen.

Fig. 70.

Der in der vorigen Construction enthaltene Satz kann in folgender Art ausgesprochen werden: Wenn in einer Curve dritter Ordnung die Punkte A, B, C, D so liegen, dass die Geraden AC, BD sich in einem Punkte O derselben schneiden, so giebt es unendlich viele der Curve eingeschriebene Vierecke $PQP'R$, deren Seiten durch A, B, C, D respective gehen; jeder Punkt P der Curve kann als Ecke eines solchen Vierecks angenommen werden.

357. Denken wir allgemeiner in die Curve dritter Ordnung ein ungeschlossenes Polygon $PQ \dots X$ von $2n-1$ Seiten eingeschrieben, dessen Seiten durch feste Punkte der Curve gehen, so ist das Entsprechen der Punkte P und X ein (1, 1) Entsprechen der ersten Art, d. h. die letzte Seite XP schneidet die Curve dritter Ordnung in einem festen Punkt. Wir erhalten damit unendlich viele der Curve dritter Ordnung eingeschriebene $2n$ecke, deren Seiten durch feste Punkte der Curve gehen. Und diese festen Punkte sind willkürlich bis auf einen, der durch Construction eines solchen Polygons bestimmt wird.

Wir können diese Theorie durch die Ausdrucksweise der Punkte der Curve dritter Ordnung mittelst Parameter nach Art. 347. erläutern. Das (1, 1) Entsprechen zwischen zwei Punkten einer Curve dritter Ordnung erfordert einen rationalen Ausdruck für die Parameter sinam u', cosam u', Δam u' in Function der sinam u, cosam u, Δam u und diess sodann erfordert eine Gleichung von einer der beiden Formen

$$u + u' = \text{const. oder } u - u' = \text{const.}$$

Wenn aber drei Punkte P, P' und A in gerader Linie liegen, so findet im Allgemeinen eine Relation

$$u + u' + a = \Lambda$$

statt, für Λ als eine von der absoluten Invariante der Curve dritter Ordnung abhängige Constante. Eine Gleichung von der Form $u + u' = \text{const.}$ fordert also, dass P und P' mit einem festen Punkte A in einer geraden Linie liegen. Wenn aber die Gleichung $u - u' = \text{const.}$ besteht, so denken wir die Constante in der Form der Differenz $b - a$ gegeben, und können dann schreiben

$$u + v + a = \Lambda, \; v + b + u' = \Lambda;$$

daraus aber ergiebt sich die geometrische Bedeutung dahin, dass P und Q mit einem festen Punkt A und Q, P' mit einem festen Punkt B in gerader Linie liegen.

Wir können offenbar für die Punkte A, B zwei andere C, D substituieren, vorausgesetzt, dass wir haben

$$b - a = c - d, \text{ oder } a + c = b + d,$$

d. h. vorausgesetzt, dass die Geraden AC und BD sich in der Curve durchschneiden. Wir haben so die vorher erhaltenen Resultate wieder gefunden.

358. Für eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten ($D = 1$) existiert eine gleiche Theorie des Entsprechens (1, 1); für eine solche mit einem Doppelpunkt ($D = 2$) wird durch diesen Letzteren ein (1, 1) Entsprechen vermittelt, das von keinem Parameter abhängig ist, indem die Gerade PP' sich um den Doppelpunkt dreht.

Es giebt eine interessante Theorie der (2, 2) Correspondenz in einer Unicursalcurve und insbesondere in einem Kegelschnitt; die Parameter, welche die Lage der Punkte P, P' bestimmen, sind dann durch eine Gleichung von der Form

$$(\theta, 1)^2 (\theta', 1)^2 = 0$$

verbunden. Für Kegelschnitte erhalten wir die Poncelet'schen Sätze in Bezug auf die ein- und umgeschriebenen Polygone.[79])

Neuntes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Curven.

359. Wir wollen in diesem Kapitel die allgemeine Theorie der Curven im Sinne des Kap. II. weiterführen und beginnen mit der Theorie der Doppeltangenten einer durch die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades dargestellten Curve, welche wir in Art. 78. vertagt hatten. Wir wollen zwei Methoden erklären, durch welche man die Gleichung einer Curve bilden kann, deren Durchschnittspunkte mit einer gegebenen Curve die Berührungspunkte ihrer Doppeltangenten bestimmen.

In Art. 64. wurde die Theorie der Tangenten einer Curve vermittelst der Gleichung $\Lambda = 0$ studiert oder der Gleichung

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1} \mu \Delta U' + \tfrac{1}{2} \lambda^{n-2} \mu^2 \Delta^2 U' + \ldots = o,$$

welche die Coordinaten der Punkte bestimmt, in denen die Verbindungsgerade zweier gegebenen Punkte die Curve schneidet. Wir sahen dort, dass für einen Punkt x_i' der Curve und einen beliebigen Punkt x_i der in ihm die Curve berührenden Tangente die Relationen

$$U' = 0, \ \Delta U' = 0$$

und wenn diese Tangente in drei auf einander folgenden Punkten schneidet, zugleich die Relation $\Delta^2 U' = 0$ bei vier auf einander folgenden Schnittpunkten auch $\Delta^3 U' = 0$ erfüllt ist und so fort.

Wenn die Tangente im Punkte x_i' die Curve noch in einem andern Punkte berührt, so muss die durch $U' = 0$ und $\Delta U' = 0$ reducierte Gleichung $\Lambda = 0$, die nun vom Grade $(n-2)$ ist, gleiche Wurzeln haben und wenn wir die Discriminante dieser Gleichung durch Y repräsentieren, so muss die Relation $Y = 0$ durch die Coordinaten x_i und x_i' erfüllt werden.

Im Falle der Inflexionspunkte, wo die zwei Bedingungen

$$\Delta U' = 0, \quad \Delta^2 U' = 0$$

bestehen, welche respective vom ersten und vom zweiten Grade in den x_i sind, und doch beide für jeden beliebigen Punkt der Tangente befriedigt sein müssen, ist offenbar, wie wir in Art. 74. entwickelten, dass $\Delta U' = 0$ die Gleichung der Tangente ist und dass $\Delta^2 U'$ den Factor $\Delta U'$ enthält. In derselben Art muss im Falle einer Doppeltangente Y die Grösse $\Delta U'$ als Factor enthalten und durch Aufstellung der Bedingung, unter welcher diess der Fall ist, erhält man die Bedingung, unter welcher der Punkt x_i' der Berührungspunkt einer Doppeltangente ist. Da die in Art. 74. benutzte specielle Methode auf den allgemeinen Fall nicht anwendbar ist, so gebrauchen wir die folgende von Cayley herrührende Methode. Es ist zweckmässig mit dem nachstehenden Lemma zu beginnen.

360. Wenn die Gleichungen von zwei Curven $U = 0$ und $V = 0$ die Variabeln x_i in den Graden a, b respective und die x_i' in den Graden a', b' enthalten und wenn die ab Schnittpunkte dieser Curve sämmtlich mit x_i' zusammenfallen, so wird der Grad der weiteren Bedingung verlangt, unter welcher sie andere gemeinschaftliche Punkte haben, was offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn U und V einen gemeinsamen Factor besitzen. Wir bemerken, dass in diesem Falle eine beliebige Gerade

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

einen den Curven $U = 0$ und $V = 0$ gemeinschaftlichen Punkt enthalten muss, nämlich den Punkt oder die Punkte, in welchen sie die durch Verschwinden des gemeinschaftlichen Factors dargestellte Curve schneidet. Daraus folgt, dass das Resultat der Elimination zwischen $U = 0$, $V = 0$ und der linearen Gleichung in diesem Falle gleich Null sein muss. Diess Resultat enthält die ξ_i im Grade ab, die x_i' im Grade $ab' + a'b$ und die Coefficienten von U und V in den Graden b und a respective. Da aber das Eliminationsresultat erhalten wird, indem man die Substitutionsresultate der Coordinaten der Durchschnittspunkte von U und V in

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

mit einander multipliciert, so ist sie in diesem Falle von der Form

$$\Pi(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^{ab}.$$

Die Bedingung

$$\xi_1 x_1' + \ldots = 0$$

zeigt aber nur an, dass die willkürliche Linie durch den Punkt x_i' gehe, in welchem Falle sie allerdings einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven unter allen Umständen enthält. Die Existenz eines gemeinschaftlichen Factors von U und V wird also nur durch das Verschwinden des andern Theils der Resultante, also durch $\Pi = 0$ bedingt und wir sehen, dass diese Bedingung die ξ_i nicht mehr enthält und vom Grade

$$ab' + a'b - ab$$

in den x_i' sowie von den Graden b und a respective in den Coefficienten von U und V ist.

361. Wenn wir die beschriebene Methode auf die Untersuchung der Inflexionspunkte anwenden, d. h. auf die Bestimmung der Bedingung, unter welcher $\Delta U'$ und $\Delta^2 U'$ einen gemeinsamen Factor haben, so ist

$$a = 1,\ a' = n - 1,\ b = 2,\ b' = n - 2$$

und die erhaltene Formel giebt für den Grad von Π in den x_i' die Zahl $3(n-2)$, die früher gefundene Ordnungszahl der Hesse'schen Determinante; auch ergiebt sich, dass Π vom zweiten Grade in den Coefficienten von $\Delta U'$ und vom ersten in denen von $\Delta^2 U'$ ist, also da beide die Coefficienten von U sind, vom dritten Grade in den Coefficienten von U, was ebenfalls dem Früheren entspricht.

Für den Fall der Doppeltangenten reduciert sich die Gleichung $\Lambda = 0$ auf die Form

$$\tfrac{1}{2}\Delta^2 U' \lambda^{n-2} + \ldots + U\mu^{n-2} = 0$$

und ein Glied ihrer Discriminante ist z. B.

$$(\Delta^2 U')^{n-3}\ U^{n-3},$$

d. h. diese Function Y ist vom Grade $(n+2)(n-3)$ in den x_i, von dem Grade $(n-2)(n-3)$ in den x_i' und von $2(n-3)$ in den Coefficienten der Originalgleichung $U = 0$. Wir können dann ferner zeigen, dass alle Schnittpunkte von $Y = 0$ und $\Delta U' = 0$ mit x_i' zusammenfallen; denn die Gleichung des Systems der $n^2 - n - 2$ Tangenten vom Punkte x_i' wird nach der Methode des Art. 78. in der Form

$$k \Delta U' + Y (\Delta^2 U')^2 = 0$$

gefunden und diess System kann von $\Delta U' = 0$ in keinem andern Punkte als x_i' geschnitten werden, so dass wir durch Einsetzen von $\Delta U' = 0$ in die letzte Gleichung erkennen, dass $\Delta U' = 0$ weder $Y = 0$ noch $\Delta^2 U' = 0$ in einem andern als dem Punkte x_i' schneiden kann. Wir können daher die Methode des Art. 360. anwenden, indem wir

$$a = 1,\ a' = n - 1,\ b = (n + 2)(n - 3),$$
$$b' = (n - 2)(n - 3)$$

setzen, also

$$ab' + a'b = (n^2 + 2n - 4)(n - 3).$$

Wir erhalten somit den Grad von Π in den x_i' gleich

$$(n + 3)(n - 2)(n - 3).$$

Es ist auch vom Grade $(n + 2)(n - 3)$ in den Coefficienten von $\Delta U'$ und vom ersten Grade in denen von Y, somit vom Grade $(n + 4)(n - 3)$ in den Coefficienten der Originalgleichung. Die Doppeltangentencurve $\Pi = 0$ schneidet die Originalcurve $U = 0$ sonach in

$$n (n + 3)(n - 2)(n - 3)$$

Punkten und da zwei dieser Punkte zu je einer Doppeltangente gehören, so ist die Zahl der Doppeltangenten

$$= \tfrac{1}{2} n (n - 2)(n^2 - 9),$$

wie in anderer Art in Art. 82. gefunden ward.

362. Die Methode des Art. 360. erlaubt aber auch durch die wirkliche Durchführung der angegebenen Operationen die Bildung der Bedingung $\Pi = 0$ selbst. Sind die x_i' wie vorher die Coordinaten des Punktes der Curve, so haben wir im Falle der Inflexion zwischen

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,\ \Delta U' = 0,\ \Delta^2 U' = 0$$

zu eliminieren und die letzten Gleichungen lauten in entwickelter Form mit Weglassung der Striche bei den U_i' und U'_{ik}

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 = 0,\ U_{11} x_1^2 + U_{22} x_2^2 + U_{33} x_3^2$$
$$+ 2 U_{23} x_2 x_3 + 2 U_{31} x_3 x_1 + 2 U_{12} x_1 x_2 = 0.$$

Wir wollen dabei, um numerische Factoren zu vermeiden, die Originalgleichung $U = 0$ mit Binomialcoefficienten geschrieben und die gemeinschaftlichen Factoren nach der

Differentiation entfernt voraussetzen, so dass die U_i die ersten Differentiale von U' durch n dividiert, die U_{ik} die zweiten Differentiale von U' dividiert durch $n(n-1)$ bedeuten und die Euler'schen Gleichungen von den homogenen Functionen lauten

$$U_1 x_1' + U_2 x_2' + U_3 x_3' = U',$$
$$U_{11} x_1' + U_{12} x_2' + U_{13} x_3' = U_1, \text{ etc.}$$

Die Bedingung, unter welcher zwei Gerade von den Coordinaten U_i und ξ_i sich in einem Punkte eines Kegelschnitts von den Coefficienten U_{ik} schneiden, kann in Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_1, & \xi_1 \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23}, & U_2, & \xi_2 \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33}, & U_3, & \xi_3 \\ U_1, & U_2, & U_3, & 0, & 0 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden, weil diese Determinante identisch ist mit dem Resultate der Substitution der Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden, d. h.

$$U_2 \xi_3 - U_3 \xi_2, \; U_3 \xi_1 - U_1 \xi_3, \; U_1 \xi_2 - U_2 \xi_1,$$

in die Gleichung des Kegelschnitts. Diese Determinante kann aber nach den Euler'schen Gleichungen dadurch reduciert werden, dass man die ersten drei Reihen und Zeilen mit x_1', x_2', x_3' respective multipliciert und von der vierten Reihe respective Zeile subtrahiert. Für

$$\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' \equiv R$$

wird sie dann zu

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & 0, & \xi_1 \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23}, & 0, & \xi_2 \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33}, & 0, & \xi_3 \\ 0, & 0, & 0, & -U', & -R \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & -R, & 0 \end{vmatrix}$$

oder zu

$$-U' \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & \xi_1 \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23}, & \xi_2 \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} - R^2 \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13} \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23} \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33} \end{vmatrix};$$

und wenn wir nach Clebsch das Zeichen $\binom{\xi_i}{\xi_i}$ für die mit U' multiplicierte Determinante brauchen, in der die Gruppe der Hesse'schen Determinante mit dem Saum der ξ_i horizontal und vertical versehen ist, und in consequenter Erweiterung bei zweifachem Saum, so dass $\binom{U_i,\ \xi_i}{U_i,\ \xi_i}$ die ursprüngliche Determinante bezeichnet, so haben wir also die Gleichung begründet

$$\binom{U_i,\ \xi_i}{U_i,\ \xi_i} = -U'\binom{\xi_i}{\xi_i} - R^2 H.$$

Wenn also die x_i' das Verschwinden von U' bedingen, so folgt, dass die Gleichung $\binom{U_i,\ \xi_i}{U_i,\ \xi_i} = 0$ sich auf $H = 0$ reduciert, wie bekannt.

363. Um durch dieselbe Methode die Gleichung der Doppeltangentencurve zu finden, haben wir das Resultat der Substitution von

$$U_2\xi_3 - U_3\xi_2,\ U_3\xi_1 - U_1\xi_3,\ U_1\xi_2 - U_2\xi_1$$

für x_1, x_2, x_3 respective in die Discriminante der reducierten Gleichung $\Lambda = 0$ (Art. 359.) zu entwickeln und wir werden zu diesem Ende die Resultate dieser Substitution in die verschiedenen Coefficienten dieser Gleichung, nämlich in $\Delta^2 U'$, $\Delta^3 U'$, etc. oder wie wir abkürzend schreiben wollen, in Δ^2, Δ^3, etc. aufsuchen. Im vorigen Art. ist das Resultat der Substitution in Δ^2 entwickelt und Hesse[80]) hat gezeigt, dass das Resultat der Substitution in Δ^k von der Form

$$P_k U' + Q_k (\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^2$$

ist, welches sich für x_i' in der Curve auf $Q_k R^2$ reduciert. Seine Methode zeigt, dass, wenn diess für zwei auf einander folgende Δ^{k-1}, Δ^k gilt, es auch für Δ^{k+1} wahr ist und sie erlaubt uns P_{k+1}, Q_{k+1} mittelst der vorausgehenden Coefficienten auszudrücken. Wir erinnern, dass nach der Definition $\Delta^{k+1} = \Delta(\Delta^k)$ ist, wo Δ die Operation

$$x_1 \frac{d}{d x_1'} + x_2 \frac{d}{d x_2'} + x_3 \frac{d}{d x_3'}$$

bezeichnet, in der jedoch die x_i und die x_i' von einander unabhängige Grössen sind. In dem hier betrachteten Falle ist

$$x_i = U_j \xi_k - U_h \xi_j$$

und also eine Function der x_i'; man hat daher die Operation Δ so zu vollziehen, dass die Differentiation die x_i' nur trifft, insofern sie explicite erscheinen, und nicht insofern sie in den x_i enthalten sind. Bezeichnen wir die Operation

$$x_1 \frac{d}{d x_1'} + x_2 \frac{d}{d x_2'} + x_3 \frac{d}{d x_3'},$$

ohne diese Einschränkung durch ∇, so haben wir für die Operation an irgend einer Function S nach der allgemeinen Regel zur Ableitung der Differentiale nach den x_i' in der Voraussetzung, dass die x_i Veränderliche sind, aus den Differentialen in der Voraussetzung, dass sie Constanten sind

$$\nabla S = \Delta S + \frac{dS}{dx_1} \nabla x_1 + \frac{dS}{dx_2} \nabla x_2 + \frac{dS}{dx_3} \nabla x_3.$$

364. Der nächste Schritt ist die Berechnung der Werthe der ∇x_i. Das Ergebniss der Operation ∇ an einer Function S ist offenbar die Determinante

$$\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3 \\ U_1, & U_2, & U_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \end{vmatrix}$$

und daher für die Function x_1 oder $U_2 \xi_3 - U_3 \xi_2$ insbesondere

$$(n-1) \begin{vmatrix} U_{12}\xi_3 - U_{13}\xi_2, & U_{22}\xi_3 - U_{23}\xi_2, & U_{23}\xi_3 - U_{33}\xi_2 \\ U_1 & , \quad U_2 & , \quad U_3 \\ \xi_1 & , \quad \xi_2 & , \quad \xi_3 \end{vmatrix},$$

wo der Factor $n-1$ aus der Annahme entspringt, die wir machten, dass die Differentiale der U_i die $(n-1)$ fachen U_{ik} seien.

Wir reducieren nun die eben geschriebene Determinante in folgender Weise. Sie ist

$$\begin{vmatrix} 1, & U_{13} & , \quad U_{23} & , \quad U_{33} \\ 0, & U_{12}\xi_3 - U_{13}\xi_2, & U_{22}\xi_3 - U_{23}\xi_2, & U_{23}\xi_3 - U_{33}\xi_2 \\ 0, & U_1 & , \quad U_2 & , \quad U_3 \\ 0, & \xi_1 & , \quad \xi_2 & , \quad \xi_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_3, & U_{13}, & U_{23}, & U_{33} \\ \xi_2, & U_{12}, & U_{22}, & U_{23} \\ 0, & U_1, & U_2, & U_3 \\ 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_3 & , U_{13} & , U_{23} & , U_{33} \\ \xi_2 & , U_{12} & , U_{22} & , U_{23} \\ -(\xi_2 x_2' + \xi_3 x_3'), & U_{11} x_1', & U_{12} x_1', & U_{13} x_1' \\ 0 & , \xi_1 & , \xi_2 & , \xi_3, \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} R - \xi_1 x_1', & -U_{11} x_1', & -U_{12} x_1', & -U_{13} x_1' \\ \xi_2 \quad , & U_{12} \quad , & U_{22} \quad , & U_{23} \\ \xi_3 \quad , & U_{13} \quad , & U_{23} \quad , & U_{33} \\ 0 \quad , & \xi_1 \quad , & \xi_2 \quad , & \xi_3 \end{vmatrix}$$

$$= R \begin{vmatrix} U_{12}, & U_{22}, & U_{23} \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33} \\ \xi_1 \;, & \xi_2 \;, & \xi_3 \end{vmatrix} + x_1' \binom{\xi_i}{\xi_i}.$$

Bezeichnen wir $\binom{\xi_i}{\xi_i}$ durch Σ und durch Σ_i die halben Differentiale dieser Function nach den ξ_i, so differieren diese Letzteren nur im Vorzeichen von den als Factoren von R in den Werthen der ∇x_i auftretenden Determinanten; wir erhalten daher

$$\nabla(S) = \Delta(S) - (n-1) R \left(\Sigma_1 \frac{dS}{dx_1} + \Sigma_2 \frac{dS}{dx_2} + \Sigma_3 \frac{dS}{dx_3} \right)$$
$$+ (n-1) \binom{\xi_i}{\xi_i} \left(x_1' \frac{dS}{dx_1} + x_2' \frac{dS}{dx_2} + x_3' \frac{dS}{dx_3} \right).$$

Ist insbesondere $S = \Delta^k(V)$ für V als eine Function vom Grade n' in den x_i', so ist wegen

$$\frac{dS}{dx_1} = k \frac{d}{dx_1'} \Delta^{k-1}(V)$$

nothwendig

$$\nabla(\Delta^k V) = \Delta^{k+1}(V)$$
$$- k(n-1) R \left(\Sigma_1 \frac{d}{dx_1'} + \Sigma_2 \frac{d}{dx_2'} + \Sigma_3 \frac{d}{dx_3'} \right) \Delta^{k-1}(V)$$
$$+ k(n-1) \binom{\xi_i}{\xi_i} \left(x_1' \frac{d}{dx_1'} + x_2' \frac{d}{dx_2'} + x_3' \frac{d}{dx_3'} \right) \Delta^{k-1}(V).$$

Da aber $\Delta^{k-1} V$ eine in den x_i' homogene Function vom Grade $n' - k + 1$ ist, so reduciert sich das letzte Glied auf

$$k(n-1)(n'-k+1) \binom{\xi_i}{\xi_i} \Delta^{k-1}(V).$$

365. Es ist zweckmässig, hier die Abkürzung ψ für die Operation

$$\Sigma_1 \frac{d}{dx_1'} + \Sigma_2 \frac{d}{dx_2'} + \Sigma_3 \frac{d}{dx_3'}$$

einzuführen, und wir bemerken noch, dass

$$\psi(V) = \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & V_1 \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23}, & V_2 \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33}, & V_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix}$$

ist, wofür wir auch schreiben dürfen $\binom{V_i}{\xi_i}$.

Wenn man in der vorigen Determinante an Stelle der V_i und der 0 die Grössen

$$U_{12}\xi_3 - U_{13}\xi_2, \; U_{22}\xi_3 - U_{23}\xi_2, \; U_{23}\xi_3 - U_{33}\xi_2,$$

und $\xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_2$ einsetzt, so zerfällt sie in zwei, welche je zwei gleiche Reihen enthalten und verschwindet also, d. h. das Resultat der Operation ψ an x_1 verschwindet. Wenn man daher die Operation ψ an einer Function ausführt, die die x_i enthält, so ist das Resultat das nämliche, ob man diese Grössen als Constanten betrachtet oder nicht. Die Gleichung des letzten Art. giebt daher in ihrer Anwendung auf die Grössen Δ^k etc., welche wir zu berechnen wünschen

$$\Delta^{k+1} = \nabla(\Delta^k) + k(n-1)R\psi(\Delta^{k-1})$$
$$- k(n-1)(n-k+1)\Sigma\Delta^{k-1}.$$

366. Aus dem so eben gefundenen Ausdruck ergiebt sich nun, dass für

$$\Delta^{k-1} = P_{k-1}U + Q_{k-1}R^2 \text{ und } \Delta^k = P_k U + Q_k R^2$$

für Δ^{k+1} die gleiche Form folgt. Denn wir haben nur diese Werthe von Δ^{k-1}, Δ^k in die Gleichung des letzten Art. einzusetzen und wir müssen dabei bemerken, dass $\nabla(U)$ und $\nabla(R)$ verschwinden, wie sogleich durch Einsetzung der U_i oder der ξ_i für die S_i in

$$\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3 \\ U_1, & U_2, & U_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \end{vmatrix}$$

folgt.

Es ist also

$$\Delta(\nabla^k) = U\nabla(P_k) + R^2\nabla(Q_k).$$

Indem wir dann

$$nU_1, \; nU_2, \; nU_3 \text{ und } \xi_1, \; \xi_2, \; \xi_3$$

für S_1, S_2, S_3 in $\binom{S_i}{\xi_i}$ substituieren, folgt

$$\psi(U) = -nHR \text{ und } \psi(R) = \binom{\xi_1}{\xi_1}$$

und daher

$$\psi(\Delta^{k-1}) = U\psi(P_{k-1}) + R^2\psi(Q_{k-1})$$
$$- nP_{k-1}HR + 2R\Sigma Q_{k-1}.$$

Verbinden wir endlich die im Ausdruck des Art. 365. für Δ^{k+1} vorkommenden Glieder, so erhalten wir

$$\Delta^{k+1} = UP_{k+1} + R^2 Q_{k+1}$$

mit

$$P_{k+1} = \nabla(P_k) - k(n-1)(n-k+1)\Sigma P_{k-1}$$
$$+ k(n-1)R\psi(P_{k-1}),$$

$$\text{und } Q_{k-1} = \nabla(Q_k) - k(n-1)(n-k-1)\Sigma Q_{k-1}$$
$$+ k(n-1)R\psi(Q_{k-1}) - n(n-1)kP_{k-1}H.$$

367. Aus diesen Formeln können wir nun die Werthe von P_3, Q_3 etc. entwickeln. Man hat zuerst $P_1 = 0$ $Q_1 = 0$ und (nach Art. 362.)

$$P_2 = -\Sigma,\ Q_2 = -H;$$

also

$$P_3 = -\Delta(\Sigma),\ Q_3 = -\Delta(H).$$

Wenn die Curve eine Curve dritter Ordnung ist, so wird Δ^3 die cubische Function selbst und der so eben für Q_3 gefundene Werth erhält die folgende geometrische Bedeutung: Wenn eine Gerade

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

eine Curve dritter Ordnung schneidet, und von den Schnittpunkten aus die je vier Tangenten an die Curve gezogen werden, so liegen die zwölf Berührungspunkte derselben in der Curve vierter Ordnung

$$\begin{vmatrix} H_1, & H_2, & H_3 \\ U_1, & U_2, & U_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \end{vmatrix} = 0;$$

denn diese Bedingung muss, wie wir gesehen haben, für jeden Punkt der Curve erfüllt werden, dessen Tangente sich mit

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

in der Curve schneidet. Dasselbe Resultat folgt auch unmittelbar aus Art. 184.

Um nun zu Q_4 weiter zu gehen, so haben wir nach Art. 366.

$$Q_1 = -\nabla(\Delta H) + 3(n-1)(n-4)\Sigma H$$
$$-3(n-1)R\psi(H) + 3n(n-1)\Sigma H$$
$$= -\nabla(\Delta H) + 6(n-1)(n-2)\Sigma H - 3(n-1)R\psi H.$$

Aber in Uebereinstimmung mit dem Resultat von Ende Art. 364. erhalten wir für $k = 1$ und n' als den Grad der Hesse'schen Determinante oder $3(n-2)$

$$\nabla(\Delta H) = \Delta^2 H - (n-1)R\psi(H) + (n-1)n'\Sigma H$$

und somit

$$Q_1 = -\Delta^2 H + (n-1)n'\Sigma H - 2(n-1)R\psi H.$$

368. Damit haben wir die Mittel zur Bildung der Doppeltangentialcurve für eine Curve vierter Ordnung. Nach der in Art. 363. erklärten Methode war zuerst die Discriminante von $\Lambda = 0$ oder von

$$\frac{1}{1\cdot 2}\Delta^2\lambda^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3\lambda\mu + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4\mu^2$$

zu bilden und nach Substitution von $U_2\xi_3 - U_3\xi_2$, etc. für x_1, etc. müssen mit Hilfe der Curvengleichung die ξ_i entfernt werden. Indem man die Substitution vor der Bildung der Discriminante macht, wird die Gleichung

$$\frac{1}{1\cdot 2}Q_2\lambda^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}Q_3\lambda\mu + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}Q_4\mu^2 = 0,$$

und ihre Discriminante weicht nur durch einen numerischen Factor von $Q_3^2 - 3Q_2Q_4$ ab, einer Function, welche die ξ_i noch im zweiten Grade enthält und daher eine weitere Reduction erfordert. Dazu ist die folgende Formel nützlich.

369. Wenn wir das System der Hesse'schen Determinante mit drei Reihen und drei Zeilen säumen, so ist die entstehende Determinante offenbar dem Producte der beiden horizontal und vertical hinzugetretenen Determinanten bis auf das Zeichen gleich. Insbesondere also, wenn V, W Functionen von den Graden n', n'' sind, so ist

$$-\Delta(V)\Delta(W) = \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & \xi_1, & V_1, & U_1 \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23}, & \xi_2, & V_2, & U_2 \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33}, & \xi_3, & V_3, & U_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0, & 0, & 0 \\ W_1, & W_2, & W_3, & 0, & 0, & 0 \\ U_1, & U_2, & U_3, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & \xi_1, & V_1, & 0 \\
U_{12}, & U_{22}, & U_{23}, & \xi_2, & V_2, & 0 \\
U_{13}, & U_{23}, & U_{33}, & \xi_3, & V_3, & 0 \\
\xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0, & 0, & -R \\
W_1, & W_2, & W_3, & 0, & 0, & -n'' W \\
0, & 0, & 0, & -R, & -n' V, & -U
\end{vmatrix}
$$

oder

$$
\Delta(V)\,\Delta(W) = n' n'' \, V W \binom{\xi_i}{\xi_i} - n' V R \binom{W_i}{\xi_i}
$$
$$
- n'' W R \binom{V_i}{\xi_i} + R^2 \binom{V_i}{W_i} + U \binom{\xi_i,\ V_i}{\xi_i,\ W_i},
$$

und wenn die x_i' der Gleichung $U = 0$ genügen, so verschwindet das letzte Glied. Es ist also insbesondere

$$
(\Delta V)^2 = n'^2 V^2 \binom{\xi_i}{\xi_i} - 2 n' V R \binom{V_i}{\xi_i} + R^2 \binom{V_i}{V_i},
$$

oder in der vorher gebrauchten Bezeichnungsweise

$$
Q_3{}^2 = (\Delta H)^2 = n'^2 H^2 \Sigma - 2 n' H R \psi(H) + R^2 \binom{H_i}{H_i},
$$

wo das letzte Glied das Resultat bezeichnet, welches man erhält, indem man in Σ anstatt der ξ_i die Differentialcoefficienten von H setzt.

In ganz derselben Art erhalten wir eine Reductionsformel für $\Delta^2 V$, indem wir in der vorhergehenden Determinante

$$
\frac{d}{dx_1}, \ \frac{d}{dx_2}, \ \frac{d}{dx_3} \text{ für } V_1, \ V_2, \ V_3 \text{ und für } W_1, \ W_2, \ W_3
$$

setzen und die Operation an V vollziehen. Wir haben dann in der Reduction statt $n' V$ und $n'' V$

$$
x_1' \frac{d}{dx_1} + x_2' \frac{d}{dx_2} + x_3' \frac{d}{dx_3}
$$

und die Formel wird

$$
\Delta^2 V = n'(n'-1)\; V \binom{\xi}{\xi} - 2(n'-1)\, R \binom{V}{\xi} + R^2 \binom{d_x}{d_x} V,
$$

worin das letzte Symbol das Resultat bezeichnet, welches man erhält, indem man in Σ anstatt der ξ_i Differentiationssymbole einsetzt und die entsprechenden Operationen an V vollzieht.

Indem wir nun den so für $\Delta^2 H$ gefundenen Ausdruck in den im Art. 388. für Q_1 gegebenen Werth einsetzen, erhalten wir

$$
Q_4 = - n'(n'-n)\, \Sigma H + 2(n'-n)\, R \psi(H) - R^2 \binom{d_x}{d_x} H.
$$

Und weil $Q_2 = -H$ ist, so erhalten wir allgemein

$$(n' - n)\, Q_3{}^2 - n'\, Q_2 Q_1 = R^2 \left\{ (n' - n) \binom{H}{H} - \mu' H \binom{d_x}{d_x} H \right\}.$$

Im Falle der Curve vierter Ordnung, wo $n = 4$, $n' = 6$ ist

$$Q_3{}^2 - 3\, Q_2 Q_1 = R^2 \left\{ \binom{H}{H} - 3H \binom{d_x}{d_x} H \right\}$$

und demnach die Gleichung der durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten gehenden Curve

$$\binom{H}{H} - 3\, H \binom{d_x}{d_x} H = 0$$

d. h. für Σ als die Function — das adjungierte System der U_{ik} als U_{ik} bezeichnend —

$$\mathrm{U}_{11}\xi_1{}^2 + \mathrm{U}_{22}\xi_2{}^2 + \mathrm{U}_{33}\xi_3{}^2$$
$$+ 2\,\mathrm{U}_{23}\xi_2\xi_3 + 2\,\mathrm{U}_{13}\xi_1\xi_3 + 2\,\mathrm{U}_{12}\xi_1\xi_2$$

in entwickelter Form

$$\mathrm{U}_{11} \frac{dH^2}{dx_1{}^2} + \mathrm{U}_{22} \frac{dH^2}{dx_2{}^2} + \mathrm{U}_{33} \frac{dH^2}{dx_3{}^2}$$

$$+ 2\,\mathrm{U}_{23} \frac{dH}{dx_2}\frac{dH}{dx_3} + 2\,\mathrm{U}_{13} \frac{dH}{dx_1}\frac{dH}{dx_3} + 2\,\mathrm{U}_{12} \frac{dH}{dx_1}\frac{dH}{dx_2}$$

$$= 3H \left\{ \mathrm{U}_{11} \frac{d^2H}{dx_1{}^2} + \mathrm{U}_{22} \frac{d^2H}{dx_2{}^2} + \mathrm{U}_{33} \frac{d^2H}{dx_3{}^2} \right.$$

$$\left. + 2\,\mathrm{U}_{23} \frac{d^2H}{dx_2\, dx_3} + 2\,\mathrm{U}_{13} \frac{d^2H}{dx_1\, dx_3} + 2\,\mathrm{U}_{12} \frac{d^2H}{dx_1\, dx_3} \right\};$$

eine Curve von der Ordnung vierzehn.

370. Die erhaltene Gleichung kann mit Hilfe des in Art. 356., 1. der „Kegelsch.“ entwickelten Ausdrucks der Bedingung transformiert werden, unter welcher die Polarlinie eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt einen andern Kegelschnitt berührt. Für

$$a_{11}x_1{}^2 + \ldots\ldots = 0$$

als den einen und

$$a_{11}{}'x_1{}^2 + \ldots\ldots = 0$$

als den andern Kegelschnitt haben wir

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2)\,(a_{11}{}'x_1 + a_{12}{}'x_2 + a_{13}{}'a_3)^2 + \ldots$$
$$= \left\{ a_{11}{}'\,(a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2) + \ldots \right\} \left\{ a_{11}{}'x_1{}^2 + \ldots \right\} - F,$$

für F als einen contravarianten Kegelschnitt. Und in derselben Art ist

$$(a_{22}'a_{33}' - a_{23}'^2)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + \ldots$$
$$= \{a_{11}(a_{22}'a_{33}' - a_{23}'^2) + \ldots\}\{a_{11}x_1^2 \ldots\} - F.$$

Wenn wir nun die a_{ik} als die U_{ik} der vorigen Entwickelung und ebenso die a'_{ik} als die zweiten Differentialcoefficienten der Hesse'schen Curve denken, so sind, weil n' der Grad der letzteren Function ist, die

$$a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3, \text{ etc.}$$

die $(n' - 1)$ fachen der ersten Differentialcoefficienten und

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)(a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'a_3)^2 + \text{etc.}$$

ist das $(n' - 1)^2$ fache der Covariante, welche wir Θ genannt haben. Wir können ebenso durch Θ' die entsprechende Covariante bezeichnen, in welcher verglichen mit Θ die Differentialcoefficienten der Originalcurve und der Hesse'schen Curve derselben vertauscht sind und deren Verschwinden die Bedingung liefert, unter welcher die gerade Polare eines Punktes in Bezug auf die Curve die conische Polare desselben Punktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve berührt. In derselben Art ist

$$a_{11}'(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + \text{etc.}$$

die Grösse Φ und $a_{11}'x_1^2 + \text{etc.}$ gleich $n'(n' - 1)H$. Wir erhalten daher die identischen Relationen

$$(n' - 1)^2\,\Theta = n(n' - 1)H\Phi - F,\ \Theta' = U\Phi' - F,$$
$$\text{also } (n' - 1)^2\,\Theta - n'(n' - 1)H\Phi = \Theta' - U\Phi'.$$

In dem besondern Falle der Curven vierter Ordnung aber wegen $n' = 6$

$$25\Theta - 30H\Phi = \Theta' - U\Phi'.$$

Die Berührungspunkte der Doppeltangenten mit der Curve sind also nicht bloss ihre Schnitte mit der vorher erhaltenen Curve

$$\Theta - 3H\Phi = 0$$

sondern auch mit der Curve

$$15\Theta - \Theta' = 0$$

und mit der dritten

$$\Theta' - 45H\Phi = 0.$$

Man sieht, die Doppeltangentencurven können in Function der Covariante F ausgedrückt werden.

371. Wir wollen zur fünften Ordnung fortschreiten. Wir haben (Art. 366.)

$$Q_5 = \nabla(Q_4) - 4(n-1)(n-5)\Sigma Q_3$$
$$+ 4(n-1) R\psi(Q_3) - 4n(n-1) HP_3$$

und erhalten mit Anwendung des zuletzt erhaltenen Werthes von Q_4 und mit den Abkürzungen Θ für $\binom{H}{H}$ und Φ für $\binom{d_x}{d_x} H$

$$Q_5 = -n'(n'-n) H\Delta(\Sigma) - n'(n'-n)\Sigma\Delta(H)$$
$$+ 2(n'-n) R\Delta\psi(H) - R^2\Delta(\Phi) + 4n(n-1) H\Delta(\Sigma)$$
$$+ 4(n-1)(n-5)\Sigma\Delta H - 4(n-1) R\psi(\Delta H)$$
$$= -2(n^2 - 13n + 18) H\Delta\Sigma - 2(n^2 - 3n + 8)\Sigma\Delta(H)$$
$$+ 4(n-3) R\Delta(\psi H) - 4(n-1) R\psi(\Delta H) - R^2\Delta(\Phi).$$

Für $n = 5$ also insbesondere

$$Q_5 = 44 H\Delta(\Sigma) - 36\Sigma\Delta(H) + 8R\Delta(\psi H)$$
$$- 16 R\psi(\Delta H) - R^2\Delta(\Phi).$$

Es ist auch in diesem Falle

$$Q_4 = -36\Sigma H + 8R\psi(H) - R^2\Phi,$$
$$Q_3 = -\Delta H,\ Q_2 = -H.$$

Um dann die Gleichung der Doppeltangentencurve wirklich zu bilden, hat man den Ausdruck

$$(27 Q_2 Q_5 - 5 Q_3 Q_4)^2 = 5(4 Q_3^2 - 9 Q_2 Q_4)(5 Q_4^2 - 12 Q_3 Q_5)$$

zu berechnen, welcher die ξ_i im sechsten Grade enthält und aus welchem daher mit Hilfe der Gleichung der Curve die sechste Potenz von R herausdividiert werden muss. In Folge einer früheren Formel haben wir aber

$$4 Q_3^2 - 9 Q_2 Q_4 = R^2 (4\Theta - 9 H\Phi).$$

Man kann auch leicht zeigen, dass

$$27 Q_2 Q_5 - 5 Q_3 Q_4 \text{ und } 5 Q_4^2 - 12 Q_3 Q_5$$

je durch R theilbar sind; aber die weitere Reduction ist nicht gelungen.

Alle diese Berechnungen können übrigens durch die Methoden der Symbolik vollzogen werden.

372. Eine andere Methode[81]) zur Lösung des Problems der Doppeltangenten wird durch den in den Art. 184., 236. bewiesenen Satz an die Hand gegeben, wonach der Punkt, in welchem die Tangente einer Curve dritter Ordnung dieselbe ferner schneidet, durch den Schnitt der Tangente mit der Linie

$$x_1 H_1 + x_2 H_2 + x_3 H_3 = 0$$

bestimmt ist. Man wird in analoger Weise die Gleichung einer Curve von der Ordnung $n - 2$ zu bilden suchen, welche durch die $(n - 2)$ Punkte geht, in denen die Tangente einer Curve n^{ter} Ordnung sie noch schneidet. Wenn die Gleichung dieser Tangentialcurve bekannt wäre, so würde man nur die Bedingung zu bilden haben, unter welcher die gegebene Tangente diese Curve berührt, um darin die Gleichung der Curve durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten zu erhalten.

Das früher über die Ordnung dieser Curve Bewiesene erlaubt uns zu erkennen, welches die Ordnung der Tangentialcurve in den x_i' und in den Coefficienten sein muss. Die Bedingung, unter welcher die Linie

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 = 0$$

eine Curve $(n - 2)^{ter}$ Ordnung berührt, ist von der Ordnung $(n - 2)(n - 3)$ in den U_i und von der Ordnung $2(n - 3)$ in den Coefficienten dieser Curve. Wenn also die Coefficienten in der Gleichung der Tangentialcurve die x_i' in der Ordnung ϱ die Coefficienten der Originalgleichung in der Ordnung ϱ' enthalten, so wäre die Curve der Doppeltangenten von der Ordnung

$$(n - 1)(n - 2)(n - 3) + 2\varrho(n - 3)$$

in den x_i' und von der Ordnung

$$(n - 2)(n - 3) + 2\varrho'(n - 3)$$

in den Coefficienten der Originalgleichung. Da dieselbe nun in Wirklichkeit von der Ordnung

$$(n - 2)(n - 3)(n + 3)$$

in jenen und von der Ordnung $(n + 4)(n - 3)$ in diesen ist (Art. 361.), so folgen für ϱ, ϱ' die Werthe

$$\varrho = 2(n - 2), \quad \varrho' = 3;$$

oder die Tangentialcurve ist von der Ordnung $2(n - 2)$ in den x_i' und von der dritten Ordnung in den Coefficienten der Originalcurve.

Wir wissen ferner, dass für x_i' als einen Punkt der Hesse'schen Curve die Tangentialcurve diesen Punkt selbst enthält, so dass die Substitution der x_i' für die x_i die Gleichung

der Tangentialcurve auf $H = 0$ reducieren muss, diese Ueberlegung und die bekannte Form ihrer Gleichung in dem Falle der Curven dritter Ordnung führten zu der Vermuthung, dass dieselbe im Allgemeinen die $(n-2)^{te}$ Polare von x_i' in Bezug auf die Hesse'sche Curve oder $\Delta^{n-2} H = 0$ sein werde; denn diese Function giebt die richtigen Ordnungen in den x_i und x_i' und in den Coefficienten, und die entsprechende Curve geht durch den Punkt x_i', sobald derselbe in der Hesse'schen Curve liegt. Wir untersuchen daher im nächsten Art., ob die Curve $\Delta^{n-2}(H) = 0$ durch die Punkte geht, in welchen die Curve von ihrer Tangente ausser dem Berührungspunkte geschnitten wird; und obgleich die Antwort verneinend ausfällt, so leitet doch die Methode der Untersuchung zur wahren Form der Gleichung der Tangentialcurve.

373. Wir denken für Cartesische Coordinaten den Anfangspunkt in der Curve und die Axe der y als die entsprechende Tangente und setzen die Gleichung der Curve

$$nby + \tfrac{1}{2} n(n-1)(c_0 x^2 + 2c_1 xy + c_2 y^2)$$
$$+ \frac{1}{2\cdot 3} n(n-1)(n-2)(d_0 x^3 + 3d_1 x^2 y + 3d_2 xy^2 + d_3 y^3) + \text{etc.} = 0.$$

Wir bemerken sofort, was in der Folge nützlich sein wird, dass die Gleichungen der verschiedenen Polaren des Ursprungs in Bezug auf die Curven aus der so geschriebenen Gleichung hervorgehen, indem man einfach $n-1$, $n-2$, etc. für n in dieselbe einsetzt. Damit nun die Curve durch die Tangentialpunkte gehe, so muss ihre Gleichung von solcher Form sein, dass sie für $y = 0$ sich auf

$$\tfrac{1}{2} n(n-1) c_0 + \frac{1}{2\cdot 3} n(n-1)(n-2) d_0 x + \text{etc.} = 0$$

reduciert.

Wir bilden nun die Gleichung der Hesse'schen Curve und vernachlässigen, weil wir ihre Polarcurven für den Anfangspunkt der Coordinaten zu bestimmen und in ihren Gleichungen $y = 0$ zu setzen haben, von vorn herein diejenigen Glieder in ihr, welche y enthalten. Die zweiten Differentialcoefficienten der Originalgleichung sind

$$U_{11} = c_0 + (n-2) d_0 x + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) e_0 x^2 + \text{etc.},$$
$$U_{22} = c_2 + (n-2) d_2 x + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) e_2 x^2 + \text{etc.},$$

$$U_{33} = \qquad\qquad \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,c_0 x^2 + \text{etc.},$$
$$U_{23} = b + (n-2)\,c_1 x + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,d_1 x^2 + \text{etc.},$$
$$U_{13} = \qquad (n-2)\,c_0 x + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,d_0 x^2 + \text{etc.},$$
$$U_{12} = c_1 + (n-2)\,d_1 x + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,e_1 x^2 + \text{etc.}$$

Die Gleichung der Hesse'schen Curve ergiebt sich also in der Form

$$c_0 b^2 + (n-2)\,d_0 b^2 x + \left\{\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,c_0 b^2 \right.$$
$$\left. + (n-1)(n-2)\,P\right\} x^2 + \left\{\tfrac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)\,f_0 b^2 \right.$$
$$\left. + (n-1)(n-2)^2 Q + (n-1)(n-2)(n-3)\,R\right\} x^3 + \text{etc.} = 0,$$

wo abkürzend gesetzt ist — weil diese Werthe für unsern Zweck unwesentlich sind —

$$2P = c_2 c_0^2 - c_0 c_1^2 + 2b c_1 d_0 - 2b c_0 d_1,$$
$$2Q = d_0 c_1^2 - 2c_0 c_1 d_1 + c_0^2 d_2,$$
$$3R = c_0 c_2 d_0 - d_0 c_1^2 + 2c_0 b e_1 - 2c_0 b e_1.$$

Von Wichtigkeit ist, dass die Gleichung sich in Gruppen von Gliedern theilt, die dieselbe Function von n als numerischen Coefficienten haben, so dass wir, um die Gleichung der Hesse'schen Curve von der ersten, zweiten, etc. Polare der gegebenen Curve in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt zu bilden, nur $n-1$, $n-2$, etc. für n in der obigen Gleichung zu setzen haben.

Da nun die geradlinige Polare des Anfangspunktes für eine Curve n^{ter} Ordnung

$$u_0 + u_1 + \text{etc.} = 0 \text{ durch } n u_0 + u_1 = 0$$

dargestellt wird, so ist sie für die Hesse'sche Curve von der Ordnung $3(\mu - 2)$ nach der vorigen Gleichung durch

$$3c_0 + d_0 x = 0$$

ausgedrückt, wenn wir ein Glied in y als unwesentlich in der gegenwärtigen Frage weglassen; und da diese Gleichung n nicht enthält, so sehen wir, dass die Polaren eines Punktes der Curve in Bezug auf die Hesse'sche Curve der Curve selbst oder einer ihrer Polarcurven die Tangente in dem nämlichen Punkte schneiden. In der That ist die Polare in jedem Falle dieselbe Linie. Für $n = 3$ ist $3c_0 + d_0 x$ das Resultat der Substitution $y = 0$ in die Gleichung der Curve, d. h. die Polare in Bezug auf die Hesse'sche Curve ist die Tangential-Linie, wie wir früher gesehen haben.

Die Gleichung des Polarkegelschnitts des Anfangspunktes in Bezug auf eine Curve n^{ter} Ordnung ist

$$\tfrac{1}{2} n (n-1) u_0 + (n-1) u_1 + u_2 = 0$$

und daher die vom Polarkegelschnitt des Anfangspunktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve

$$\tfrac{3}{2} (n-2)(3n-7) c_0 b^2 + (n-2)(3n-7) d_0 b^2 x$$
$$\left\{ \tfrac{1}{2} (n-2)(n-3) e_0 b^2 + (n-1)(n-2) P \right\} x^2 = 0;$$

und man sieht sofort, dass derselbe im Falle der Curve vierter Ordnung nicht die Tangentialcurve sein kann, weil sie die Gruppe der Glieder P enthält, die in der Gleichung der Curve nicht analog auftreten.

Aber wir können leicht eine Gleichung bilden, die diese Glieder nicht enthält. Bezeichnen wir durch $\Delta^2 H = 0$ die soeben erhaltene Gleichung, und sei $\Delta^2 H_1$ der Polarkegelschnitt des Anfangspunktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve der ersten Polare des Anfangspunktes, so wird nach dem Vorhergehenden $\Delta^2 H_1$ aus $\Delta^2 H$ abgeleitet, indem man $n-1$ für n schreibt. Dann bestätigt man leicht, dass

$$(n-2)\Delta^2 H - (n-1)\Delta^2 H_1$$
$$= (n-3) b^2 \left\{ 6 c_0 + 4 d_0 x + e_0 x^2 \right\}.$$

Wenn aber die gegebene Curve von der vierten Ordnung ist, so ist die rechte Seite das Resultat der Substitution von $y = 0$ in die Gleichung derselben; und daher ist

$$\Delta^2 H - 3 \Delta^2 H_1 = 0$$

die Gleichung der Tangentialcurve der Curve vierter Ordnung.

In derselben Art finden wir die Gleichung der dritten Polare des Anfangspunktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve

$$\tfrac{1}{6} (3n-6)(3n-7)(3n-8) c_0 b^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} (n-2)(3n-7)(3n-8) d_0 b^2 x$$
$$+ \tfrac{1}{2} (n-2)(n-3)(3n-8) e_0 b^2 x^2$$
$$+ (n-1)(n-2)(3n-8) P x^2$$
$$+ \tfrac{1}{6} (n-2)(n-3)(n-4) f_0 b^2 x^3$$
$$+ (\mu-1)(n-2)^2 Q x^3 + (n-1)(n-2)(n-3) R x^3,$$

und $\Delta^3 H_1$, $\Delta^3 H_2$, etc. werden aus ihr durch die Substitution von $n-1$, $n-2$, etc. für n gebildet. Und wir bestätigen sodann, dass

$$(n-3)(n-4)\Delta^3 H - 2(n-1)(n-4)\Delta^3 H_1$$
$$+ (n-1)(n-2)\Delta^3 H_2$$
$$= 2(n-4)(10c_0 + 10d_0x + 5e_0x^2 + fx^3)$$

ist. Für $n = 5$ ist aber die rechte Seite das Resultat der Substitution von $y = 0$ in die Originalgleichung und es folgt daher, dass die Tangentialcurve für die Curve fünfter Ordnung durch

$$\Delta^3 H - 4\Delta^3 H_1 + 6\Delta^3 H_2 = 0$$

ausgedrückt wird.

Für $n = 6$ ergiebt sich in derselben Art

$$\Delta^4 H - 5\Delta^4 H_1 + 10\Delta^4 H_2 = 0.$$

Auf diese Weise gelangte der Verfasser durch Induction zu dem Schlusse, dass die Gleichung der Tangentialcurve im allgemeinen Fall sein müsste

$$\Delta^{n-2} H - (n-1)\Delta^{n-2} H_1$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\Delta^{n-2} H_2 - \text{etc.} = 0;$$

und dieser Schluss ist sodann durch Cayley unabhängig bestätigt worden.

374. Was oben gefunden wurde, dass die Polargerade des Anfangspunktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve dieselbe ist, wie die in Bezug auf die Hesse'sche Curve irgend einer der Polarcurven der Originalcurve, kann leicht direct bestätigt werden. Wir haben

$$\frac{dH}{dx_1} = \frac{dH}{dU_{11}}\frac{dU_{11}}{dx_1} + \text{etc.}$$

oder mit den Abkürzungen U_{11} für $U_{22}U_{33} - U_{23}^2$, etc.

$$\frac{dH}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left\{\mathrm{U}_{11}\frac{d^2}{dx_1^2} + \mathrm{U}_{22}\frac{d^2}{dx_2^2} + \mathrm{U}_{33}\frac{d^2}{dx_3^2} + 2\mathrm{U}_{23}\frac{d^2}{dx_2\,dx_3} + \ldots\right\} U$$

mit analogen Ausdrücken für die nach x_2 und x_3 genommenen Differentiale.

Es ist zu bemerken, dass dieselben in der abgekürzten Form

$$\frac{dH}{dx_1} = -\frac{d}{dx_1}\binom{d_x}{d_x}$$

geschrieben werden können. Nun werden die Differentialcoefficienten der ersten Polare

$$x_1' U_1 + x_2' U_2 + x_3' U_3 = 0$$

aus den correspondierenden der Originalcurve durch die an derselben zu vollziehende Operation

$$x_1' \frac{d}{dx_1} + x_2' \frac{d}{dx_2} + x_3' \frac{d}{dx_3}$$

gebildet, die bei Ersetzung der x_i durch die x_i' der Multiplication mit den Factoren $n-1$, $n-2$, etc. für jeden äquivalent ist. Da aber derselbe numerische Factor jedem Glied im Ausdruck für H_1 angehört, so repräsentiert

$$x_1 H_1 + x_2 H_2 + x_3 H_3 = 0$$

dieselbe Gerade, ob die Polare in Bezug auf die Hesse'sche Curve des Originals oder seiner ersten Polare gebildet wird. Derselbe Schluss ist auf die übrigen Polarcurven anwendbar.

Gehen wir zum Polarkegelschnitt weiter. Wenn wir die soeben für H, etc. gegebenen Ausdrücke differentiieren, so bestehen die Differentiale aus zwei Gruppen von Gliedern, nämlich dem Differential in der Voraussetzung, dass die U_{ik} constant sind, und der die Differentiale dieser Grössen enthaltenden Gruppe. Wenn wir zur Abkürzung die Differentiationssymbole nach x_1, x_2, x_3 durch ∂_1, ∂_2, ∂_3 bezeichnen, so haben wir

$$\partial_1^2 H = \partial_1^2 \left\{ U_{11} \partial_1^2 + U_{22} \partial_2^2 + \dots \right\} U$$

$$+ \partial_1 \partial_1' \left\{ U_{11} (\partial_2 \partial_3' - \partial_3 \partial_2')^2 + U_{22} (\partial_3 \partial_1' - \partial_1 \partial_3')^2 + \dots \right\} U,$$

wo die Accente in der letzteren Gruppe von Gliedern erst nach der Entwickelung anzufügen sind, und z. B. das Glied

$$\partial_1 \partial_1' U_{11} \partial_2^2 \partial_3'^2 \text{ für } U_{11} \frac{d^3 U}{dx_1 dx_2^2} \frac{d^3 U}{dx_1 dx_3^2}$$

steht. Wir können für diese Gleichung die kurze Symbolform

$$\partial_1^2 H = - \partial_1^2 \binom{\partial_1}{\partial_1} + \partial_1 \partial_1' \binom{\partial_1 \partial_1'}{\partial_1 \partial_1'}$$

anwenden. In Folge dessen kann die Gleichung des Polarkegelschnittes eines Punktes in Bezug auf die Hesse'sche Curve in der Form $V + W = 0$ geschrieben werden, für V als Zeichen einer Gruppe von Gliedern, in deren jedem ein viertes Differential mit dem Product von zwei zweiten Differentialen multipliciert ist, und W als Symbol für eine Gruppe, wo ein zweites Differential zu dem Product zweier dritten Differentiale als Factor tritt. Wenn wir nun die Hesse'sche Curve der ersten Polare nehmen, so werden, wie oben fest-

gestellt ist, die zweiten, dritten und vierten Differentiale mit $n-2$, $n-3$, $n-4$ respective multipliciert und das Ergebniss ist

$$\Delta^2 H_1 = (n-2)(n-4) V + (n-3)^2 W = 0,$$

also für $n = 4$ reduciert auf die letztere Gruppe von Gliedern. Die Gleichung der Tangentialcurve einer Curve vierter Ordnung ist also von der Form $V + kW = 0$ und kann entsprechend transformiert werden. So kann man sie in der Form schreiben

$$\left(x_1 \frac{d}{dx_1'} + x_2 \frac{d}{dx_2'} + x_3 \frac{d}{dx_3'}\right)^2 H'$$

$$+ 3 \left(x_1 \frac{d}{dx_1'} + \ldots\right)^2 \left(\mathrm{U}_{11} \frac{d^2}{dx_1'^2} + \ldots\right) U' = 0.$$

Die Gleichung der Curve durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten wird aber endlich gebildet, indem man die Bedingung schreibt, unter welcher die Tangente

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 = 0$$

den eben geschriebenen Kegelschnitt berührt, und sie enthält drei Gruppen von Gliedern, nach der Form der Berührungsbedingung

$$\Sigma + k\Phi + k^2 \Sigma' = 0$$

für die Gleichung $S + kS' = 0$. Der Function Σ entspricht hier die Covariante Θ', und es ist bestätigt, dass die beiden andern Gruppen von Gliedern auch in der Form $\Theta + kH\Phi$ ausdrückbar sind.*[2])

375. Pole und Polaren. Wir stellen hier zuerst einige Eigenschaften der Jacobi'schen Curve eines Systems von drei Curven zusammen. Dieselbe ist der Ort der Punkte, deren gerade Polaren in Bezug auf die drei Curven sich in einem Punkte schneiden, und ihre Gleichung ist daher für $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ als die Gleichungen der Curve

$$J = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In Art. 192. zeigten wir — denn die angeführten Gründe beziehen sich nicht bloss auf Curven dritter Ordnung — für Curven von einerlei Ordnungszahl, dass die Jacobi'sche

Curve der Ort der Doppelpunkte der Curven des Gebildes zweiter Stufe

$$\lambda u + \lambda' v + \lambda'' w = 0$$

ist.

Wenn die drei Curven einen gemeinsamen Punkt haben, so liegt derselbe auf ihrer Jacobi'schen Curve, und wenn sie insbesondere von einerlei Ordnungszahl sind, so ist er ein Doppelpunkt ihrer Jacobi'schen Curve.[83] Denn was das Erstere betrifft, so folgt für μ, μ', μ'' als die Ordnungszahlen aus den Gleichungen

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = \mu u,\ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \mu' v,$$
$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = \mu'' w$$

sofort

$$J x_1 = \mu u (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \mu' v\,(w_2 u_3 - w_3 u_2) + \mu'' w\,(u_2 v_3 - u_3 v_2)$$

oder schreiben wir

$$J x_1 = \mu A u + \mu' B v + \mu'' C w;$$

d. h. J verschwindet mit dem gleichzeitigen Verschwinden von U, V und W.

Und für das zweite folgt aus der Differentiation nach x_1

$$J + x_1 \frac{dJ}{dx_1} = \mu u \frac{dA}{dx_1} + \mu' v \frac{dB}{dx_1} + \mu'' w \frac{dC}{dx_1}$$
$$+ \mu A u_1 + \mu' B v_1 + \mu'' C w_1$$

und da

$$A u_1 + B v_1 + C w_1 = J$$

ist, so verschwindet für $\mu = \mu' = \mu''$ das Differential $\frac{dJ}{dx_1}$ für alle die Werthe, welche u, v, w und folglich J gleich Null machen.

So ist ferner

$$x_1 \frac{dJ}{dx_2} = \mu u \frac{dA}{dx_2} + \mu' v \frac{dB}{dx_2} + \mu'' w \frac{dC}{dx_2}$$
$$+ \mu A u_2 + \mu' B v_2 + \mu'' C w_2,$$

und da

$$A u_2 + B v_2 + C w_2 = 0$$

ist, so verschwindet diess für jede Werthegruppe, welche u, v, w, J zur Null macht, sobald $\mu = \mu' = \mu''$ ist; in derselben Art verschwindet aber auch der dritte Differentialcoefficient von J für denselben Punkt.

Wenn nur zwei der Curven von einerlei Ordnungszahl sind, so berührt die dritte Curve die Jacobi'sche Curve der drei in ihren gemeinsamen Punkten. Denn die oben geschriebene Gleichung wird für $\mu = \mu'$

$$J + x_1 \frac{dJ}{dx_1} = \mu u \frac{dA}{dx_1} + \mu v \frac{dB}{dx_1} + \mu'' w \frac{dC}{dx_1}$$
$$+ \mu J + (\mu'' - \mu)\, C w_1$$

und für einen gemeinsamen Punkt also reduciert auf

$$J_1 x_1 = (\mu'' - \mu)\, C w_1;$$

da man nun in gleicher Weise erhält

$$J_2 x_1 = (\mu'' - \mu)\, C w_2,\ J_3 x_1 = (\mu'' - \mu)\, C w_3,$$

so repräsentieren die beiden Gleichungen

$$J_1 x_1 + J_2 x_2 + J_3 x_3 = 0 \text{ und } w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0$$

die nämliche gerade Linie.

Wenn in diesem Falle der gemeinsame Punkt ein Doppelpunkt in der Curve $w = 0$ ist, so ist er auch ein solcher in der Jacobi'schen Curve des Systems und hat als solcher dieselben Tangenten wie für die Curve $w = 0$.[84])

Die für J_1, J_2, J_3 so eben erhaltenen Werthe verschwinden, wenn w_1, w_2, w_3 verschwinden. Differentiieren wir aber wiederholt, indem wir die Glieder unterdrücken, welche, weil sie u, v, w, J, J_1 oder w_1 enthalten, verschwinden, so erhalten wir

$$x \frac{d^2 J}{dx_1^2} = \mu \left(u_1 \frac{dA}{dx_1} + v_1 \frac{dB}{dx_1}\right) + (\mu'' - \mu)\, C w_{11}.$$

Aber aus den Werthen von A und B ergiebt sich

$$u_1 \frac{dA}{dx_1} + v_1 \frac{dB}{dx_1} = u\,(v_2 w_{13} - v_3 w_{12}) + v_1\,(w_{12} u_3 - w_{13} u_2);$$

durch Elimination von x_1, x_2, x_3 zwischen den Gleichungen

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,\ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$
$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = 0$$

erhält man aber

$$u_1\,(v_2 w_{13} - v_3 w_{12}) + v_1\,(w_{12} u_3 - w_{13} u_2)$$
$$= - w_{11}\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) = - C w_{11}$$

und somit

$$x_1 J_{11} = (\mu'' - 2\mu)\, C w_{11},$$

mit ähnlichen Werthen für die übrigen zweiten Differentialcoefficienten von J, die also sämmtlich zu den entsprechenden von w proportional sind. Die beiden Curven $J = 0$ und $w = 0$ haben also die nämlichen Tangenten in ihrem gemeinsamen Doppelpunkt.

376. Man beweist ferner wie in Art. 191., dass es

$$(\mu - 1)^2 + (\mu - 1)(\mu' - 1) + (\mu' - 1)^2$$

Punkte giebt, deren gerade Polaren in Bezug auf zwei Curven $u = 0$, $v = 0$ sich decken; durch diese Punkte muss offenbar die Jacobi'sche Curve gehen, welche diese beiden mit irgend einer dritten Curve bestimmen. Und in Art. 97. ward gezeigt, dass die Jacobi'sche Curve die Curve $u = 0$ in denjenigen Punkten schneidet, welche Punkte der Berührung von $u = 0$ mit Curven des Büschels

$$v + \lambda w = 0$$

sein können. Daraus folgt unmittelbar, dass der Ort von Punkten, welche Berührungspunkte der Curven des Büschels μ^{ter} Ordnung $u + \lambda u^* = 0$ mit Curven des Büschels von der μ'^{ten} Ordnung $v + \lambda' v^* = 0$ eine Curve von der Ordnung $2\mu + 2\mu' - 3$ ist, deren Gleichung in jeder der äquivalenten Formen geschrieben werden kann

$$v^* \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ u_1^*, & u_2^*, & u_3^* \\ v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix} - v \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ u_1^*, & u_2^*, & u_3^* \\ v_1^*, & v_2^*, & v_3^* \end{vmatrix} = 0,$$

$$u^* \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \\ v_1^*, & v_2^*, & v_3^* \\ u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} - u \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \\ v_1^*, & v_2^*, & v_3^* \\ u_1^*, & u_2^*, & u_3^* \end{vmatrix} = 0.$$

Ferner erhellt aus dem Vorigen, dass die Punkte, in welchen Curven der Systeme

$$u + \lambda u^* = 0, \; v + \lambda' v^* = 0, \; w + \lambda'' w^* = 0$$

sich zu dreien berühren, nur unter den Schnittpunkten zweier Curven von den Ordnungen

$$2\mu + 2\mu' - 3, \; 2\mu + 2\mu'' - 3$$

sein können; da aber unter diesen die μ^2 Punkte $u = 0$, $u^* = 0$ und die $3(\mu - 1)^2$ Punkte sind, welche die Jacobi'schen

Curven gemein haben, die das Büschel $u + \lambda u^* = 0$ mit andern Curven bestimmt, so giebt die Subtraction dieser Zahlen für die Zahl von Punkten, in welchen sich drei Curven der Büschel von den Ordnungen μ, μ', μ'' berühren,

$$4(\mu\mu' + \mu'\mu'' + \mu\mu'') - 6(\mu + \mu' + \mu'') + 6.$$

377. Wir haben im Art. 97. gesehen, dass der Grad der Bedingung, unter welcher zwei Curven $u = 0$, $v = 0$ sich berühren, — wir wollen sagen der Grad ihrer Berührungs-Invariante — in den Coefficienten von v gleich

$$\mu(\mu + 2\mu' - 3) - 2\delta - 3\varkappa$$

oder gleich $\nu + 2\mu(\mu' - 1)$ und in den Coefficienten von u gleich $\nu' + 2\mu'(\mu - 1)$ ist.

Die Berührungs-Invariante im Falle von zwei Kegelschnitten wurde in Art. 348. „Kegelschn." gebildet, indem man von der Discriminante von $u + \lambda v$ als von einer Function von λ die Discriminante bildete. Aus analogen Gründen, wie die dort entwickelten, kann man schliessen, dass die Anwendung desselben Vorgangs auf zwei Curven von der Ordnung μ ein Resultat giebt, welches die Berührungs-Invariante als Factor enthält. Ist dieselbe A und ist $B = 0$ die Bedingung, unter welcher λ so bestimmt werden kann, dass die Curve $u + \lambda v = 0$ zwei Doppelpunkte hat, und dazu $C = 0$ die Bedingung, unter welcher λ so bestimmbar ist, dass $u + \lambda v = 0$ eine Spitze hat, so ist die Discriminante der Discriminante von $u + \lambda v$ als eine Function von λ gleich AB^2C^3. Dass B und C Factoren sind, ergiebt sich, indem man $u = 0$ als eine Curve mit zwei Doppelpunkten oder als Curve mit einer Spitze annimmt. Dann verschwindet nicht nur die Discriminante von u sondern auch ihre Differentiale nach den Coefficienten von u, so dass in der Discriminante von $u + \lambda v$ die Glieder mit λ^0 und λ^1 verschwinden und λ^2 ein Factor der Discriminante ist; dann aber muss ihre Discriminante nach λ verschwinden.

Wenn z. B. $u = 0$, $v = 0$ Curven dritter Ordnung sind, so enthält die Discriminante einer jeden ihre Coefficienten im zwölften Grade und dieselben treten im Grade 132 in ihre nach λ gebildete Discriminante ein. Aber die Berührungs-

Invariante enthält die Coefficienten einer jeden im Grade 18, und die Invarianten, welche verschwinden, wenn $u + \lambda v = 0$ eine Spitze oder ein Paar von Doppelpunkten hat, enthalten die Coefficienten jeder der beiden Functionen in den Graden 24 und 21 respective. Denn der Grad in den Coefficienten stimmt mit der Zahl der Curven des Systems

$$u + \lambda v + \lambda' w = 0$$

überein, welche die fraglichen Singularitäten haben; im Falle der Spitze liefern die Invarianten-Relationen $S = 0$, $T = 0$ eine Gleichung vom sechsten und eine vom vierten Grad zur Bestimmung von λ und μ, und somit 24 Lösungen; in dem Falle von zwei Doppelpunkten aber können wir voraussetzen, dass $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ sieben Punkte gemein haben und die 21 Systeme aus einer Geraden und einem Kegelschnitt, die durch dieselben gehen, geben die Antwort. Wir haben in dieser Art $132 = 18 + 2.\ 21 + 3.\ 24$.

378. Im allgemeinen Falle, wo die Discriminante vom Grade $3(\mu - 1)^2$ ist, enthält die Discriminante derselben nach λ die Coefficienten jeder Curve im Grade

$$3(\mu - 1)^2 (3\mu^2 - 6\mu + 2)$$

und die Berührungs-Invariante enthält sie je im Grade $3\mu(\mu - 1)$ und man findet (Art. 381.), dass der Grad der Bedingung, unter welcher $u + \lambda v = 0$ ein Paar Doppelpunkte hat, oder, was dasselbe ist, die Zahl der Curven des Systems

$$u + \lambda v + \lambda' w = 0,$$

welche zwei Doppelpunkte besitzen, gleich

$$\tfrac{3}{2}(\mu - 1)(3\mu^3 - 9\mu^2 - 5\mu + 22)$$

ist und die entsprechende Zahl für den Fall der Spitze gleich $12(\mu - 1)(\mu - 2)$. In der That bestätigt man sofort

$$3(\mu - 1)^2 (3\mu^2 - 6\mu + 2) = 3\mu(\mu - 1)$$
$$+ 3(\mu - 1)(3\mu^3 - 9\mu^2 - 5m + 52) + 36(\mu - 1)(\mu - 2).$$

Wenn man sodann die Discriminante von

$$\lambda u + \lambda' v + \lambda'' w = 0$$

gebildet hat für $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ als Curven derselben Ordnung, so kann man ihre Discriminante als die einer Function von $\lambda, \lambda', \lambda''$ betrachten; sie enthält die Resultante von u, v, w als einen Factor und die Bedingungen für die

Existenz von drei Doppelpunkten, von Doppelpunkt und Spitze und für die von einem Berührungsknoten als andere Factoren. Und jede dieser Bedingungen ist in den Coefficienten jeder der Curven von einem Grade, welcher der Anzahl der Curven des Systems

$$\lambda u + \lambda' v + \lambda'' w + t = 0$$

gleich ist, die die nämliche Singularität besitzen. Wenn die Curven sämmtlich Kegelschnitte sind, so ist die Discriminante von $\lambda u + \lambda' v + \lambda'' w$ nach λ, λ', λ'' gleich AB^2, für A als Resultante von u, v, w und $B = 0$ als die Bedingung, unter welcher

$$\lambda u + \lambda' v + \lambda'' w = 0$$

zwei zusammenfallende Gerade darstellt. Die allgemeine Theorie bleibt jedoch zu entwickeln.

379. In Verbindung mit dem Vorigen mag bemerkt werden, dass die Berührungs-Invariante einer Curve und ihrer Hesse'schen Determinante, weil sie in den Coefficienten der ersten vom Grade $3(\mu - 2)(5\mu - 9)$ und vom Grade $\mu(7\mu - 15)$ in denen der letztern ist, vom Grade

$$6(6\mu^2 - 17\mu + 9)$$

in den Coefficienten der Originalcurve sein muss. Für $\mu = 3$ ist sie die sechste Potenz der Discriminante, und wenn man deshalb annimmt, dass die sechste Potenz der Discriminante stets ein Factor in ihr ist, so bleibt ein Factor vom Grade $6(\mu - 3)(3\mu - 2)$, dessen Verschwinden die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Curve einen Undulationspunkt besitzt.

Betrachten wir ferner die Bedingung, unter welcher die Curve mit ihrer Hesse'schen Determinante, und der Curve der Berührungspunkte der Doppeltangenten einen gemeinsamen Punkt hat, so ist sie, als von den Graden

$$3(\mu - 2)^2(\mu^2 - 9),\ \mu(\mu - 2)(\mu^2 - 9) \text{ und } 3\mu(\mu - 2)$$

in den Coefficienten dieser Curven, vom Grade

$$3(\mu - 2)(\mu - 3)(3\mu^2 + 8\mu - 16)$$

in den Coefficienten der Originalcurve. Für $\mu = 4$ muss man dieselbe wohl als das Produkt aus der zwölften Potenz der Discriminante in das Quadrat der vorher betrachteten Inva-

riante ansehen. Und wenn man annimmt, dass die nämlichen Factoren im allgemeinen Falle auftreten, so bleibt eine Invariante vom Grade

$$3(\mu - 4)(3\mu^3 + 5\mu^2 - 32\mu + 18),$$

welche immer dann verschwindet, wenn die Curve eine Inflexionstangente hat, die sie noch anderwärts berührt.

380. Die Betrachtung der Jacobi'schen Curve als Ort derjenigen Punkte, deren gerade Polaren in Bezug auf drei gegebene Curven sich in einem Punkte schneiden, führt naturgemäss zur Betrachtung des Ortes dieser Schnittpunkte der Polaren, oder, was dasselbe ist, auf die Untersuchung des Ortes der Punkte, deren erste Polarcurven in Bezug auf die drei gegebenen Curven einen gemeinschaftlichen Punkt haben.

Wir werden uns auf die Untersuchung des Falles beschränken, in welchem die drei gegebenen Curven die drei ersten Polaren einer gegebenen Curve sind, und in dem die Jacobi'sche Curve derselben die Hesse'sche Determinante der letztern ist, die erwähnte Ortscurve also die Steiner'sche Curve (Art. 70.). Die zu entwickelnde Theorie ist die Verallgemeinerung derjenigen, welche wir für die Curve dritter Ordnung in Art. 176 f. gegeben haben.[55])

Jedem Punkte P der Steiner'schen Curve entspricht ein Punkt Q der Hesse'schen, die erste Polare von P hat Q zum Doppelpunkt und der Polarkegelschnitt von Q besteht aus zwei geraden Linien, die sich in P durchschneiden. Betrachten wir sodann zwei aufeinanderfolgende Punkte P, P' der Steiner'schen Curve, so ist wie in Art. 179. der Durchschnitt ihrer ersten Polaren der zweifach zählende Punkt Q zusammen mit den Berührungspunkten der ersten Polare mit ihrer Enveloppe. Die in Bezug auf die Curve genommene Polargerade eines Punktes Q der Hesse'schen Curve ist somit die Tangente der Steiner'schen Curve im entsprechenden Punkte P. Wenn insbesondere Q ein Inflexionspunkt der Curve ist, so ist seine gerade Polare die entsprechende Tangente und wir lernen, dass die Steiner'sche Curve von den $3\mu(\mu - 2)$ stationären Tangenten der Curve berührt wird.

381. Wir sahen in Art. 70., dass die Ordnungen der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve durch $3(\mu-2)$ und $3(\mu-2)^2$ respective ausgedrückt sind. Da nun die Hesse'sche Curve im Allgemeinen keinen Doppelpunkt besitzt, so sind ihre Charaktere die folgenden

$$\mu_h = 3(\mu-2),\ \delta_h = 0,\ \varkappa_h = 0,\ \nu_h = 3(\mu-2)(3\mu-7),$$
$$\tau_h = \tfrac{27}{2}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(3\mu-8),$$
$$\iota_h = 9(\mu-2)(3\mu-8).$$

In Folge der (1, 1) Correspondenz zwischen der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve sind beide von demselben Geschlecht. Und wir kennen überdiess die Classe der Steiner'schen Curve; denn jede durch einen festen Punkt M gehende Tangente derselben muss ihren Pol in der ersten Polare von M und zugleich in der Hesse'schen Curve haben, d. h. derselbe muss einer der $3(\mu-1)(\mu-2)$ Schnittpunkte beider Curven sein. Die Plücker'schen Charakterzahlen der Steiner'schen Curve sind daher

$$\mu_s = 3(\mu-2)^2,\ \nu_s = 3(\mu-1)(\mu-2),$$
$$\delta_s = \tfrac{3}{2}(\mu-2)(\mu-3)(3\mu^2-9\mu-5),$$
$$\varkappa_s = 12(\mu-2)(\mu-3),$$
$$\tau_s = \tfrac{3}{2}(\mu-2)(\mu-3)(3\mu^2-3\mu-8),\ \iota_s = 3(\mu-2)(4\mu-9).$$

Das Geschlecht beider Curven ist

$$= 1 + \tfrac{3}{2}(\mu-2)(\mu-3).$$

Da ein Punkt nur dann ein Doppelpunkt oder eine Spitze der Steiner'schen Curve ist, wenn seine erste Polare zwei Doppelpunkte oder eine Spitze hat, so sind die eben gefundenen Zahlen δ_s und $\varkappa_s$ die Anzahlen von ersten Polaren der gegebenen Curve, welche die fraglichen Singularitäten haben. (Art. 378.)

382. Wenn die ersten Polaren von zwei Punkten A und B sich in einem Punkte Q berühren, wobei dann QP ihre entsprechende gemeinsame Tangente ist, so fallen zwei von den Polen der geraden Linie AB mit dem Punkte Q zusammen und die ersten Polaren aller Punkte von AB mit einziger Ausnahme des Schnittpunktes von PQ mit ihr berühren gleichfalls QP in Q. Die erste Polare des Durchschnittspunktes von AB mit PQ hat Q zum Doppelpunkt, so dass Q wirk-

lich der Hesse'schen Curve angehört und P der ihm entsprechende Punkt in der Steiner'schen Curve ist.

So ist die Steiner'sche Curve die Enveloppe einer Geraden, welche zwei zusammenfallende Pole besitzt, und die Hesse'sche Curve ist der Ort dieser zusammenfallenden Pole.

Steiner hat auch bereits die Enveloppe der Linie PQ untersucht, welche zwei entsprechende Punkte P und Q verbindet, oder welche die gemeinschaftliche Tangente von zwei sich berührenden ersten Polaren ist; eine Curve, die wir wie im Falle der Curven dritter Ordnung (Art. 178.) die Cayley'sche Curve nennen wollen. Auch sie hat mit der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve eine (1, 1) Correspondenz und somit das nämliche Geschlecht wie diese. Um ihre Classe zu bestimmen, benutzen wir das in Art. 353. und Art. 344. der „Kegelschn.“ begründete Princip, dass in zwei in einander liegenden geradlinigen Punktreihen oder Strahlenbüscheln zwischen deren Elementen eine (m, m') Correspondenz besteht, $(m + m')$ Elemente existieren, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Betrachten wir nämlich die geraden Linien, welche einen angenommenen Punkt M mit zwei correspondierenden Punkten P, Q verbinden, so werden, weil die Steiner'sche Curve von der Ordnung $3(\mu - 2)^2$ ist, mit der fest gedachten Linie MP $3(\mu - 2)^2$ Lagen von P und ebenso viele von Q fixiert und in gleicher Art entsprechen jeder Lage von MQ $3(\mu - 2)$ Lagen von P. Es giebt somit

$$3(\mu - 2)^2 + 3(\mu - 2) \quad \text{d. h.} \quad 3(\mu - 1)(\mu - 2)$$

durch M gehende Gerade, welche zwei correspondierende Punkte P und Q enthalten, und diese Zahl drückt daher die Classe der Cayley'schen Curve aus. Sie berührt offenbar die Inflexionstangenten der gegebenen Curve. Inflexionen sind in ihr im Allgemeinen nicht vorhanden und ihre Charakterzahlen sind somit

$$\mu_c = 3(\mu - 2)(5\mu - 11), \quad \nu_c = 3(\mu - 1)(\mu - 2),$$
$$\delta_c = \tfrac{9}{2}(\mu - 2)(5\mu - 13)(5\mu^2 - 19\mu + 16),$$
$$\varkappa_c = 18(\mu - 2)(2\mu - 5),$$
$$\tau_c = \tfrac{9}{2}(\mu - 2)^2(\mu^2 - 2\mu - 1), \quad \iota_c = 0.$$

383. Die vorher gegebenen Definitionen erfahren ihre naturgemässe Erweiterung, wenn wir die Doppelpunkte nicht ausschliesslich in den ersten Polaren, sondern in irgend bestimmten andern Polarcurven untersuchen.

Der Ort eines Punktes, dessen r^{te} Polare einen Doppelpunkt hat, ist eine Curve von der Ordnung $3r(\mu - r - 1)^2$, die r^{te} Steiner'sche Curve der gegebenen; und der Ort des Doppelpunktes ist dann eine Curve von der Ordnung $3r^2(\mu - r - 1)$, die r^{te} Hesse'sche Curve derselben. Wir wissen, dass wenn die r^{te} Polare eines Punktes P durch den Punkt Q geht, auch die $(\mu - r)^{te}$ Polare von Q den Punkt P enthält und finden leicht, dass auch, wenn die r^{te} Polare des Punktes P einen Punkt Q als Doppelpunkt enthält, die $(\mu - r - 1)^{te}$ Polare von Q einen Doppelpunkt P hat. Daher ist die r^{te} Steiner'sche Curve mit der $(\mu - r - 1)^{ten}$ Hesse'schen identisch und die r^{te} Hesse'sche mit der $(\mu - r - 1)^{ten}$ Steiner'schen — wie im Falle $r = 1$ bei den Curven dritter Ordnung. In gleicher Weise entsteht die r^{te} Cayley'sche Curve als Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte der r^{ten} Steiner'schen und r^{ten} Hesse'schen Curve und die drei Curven haben auch im allgemeinen Falle dasselbe Geschlecht. Von dem Falle $r = 1$ abgesehen sind diese Curven wohl noch nicht studiert worden.

384. Wir haben in Art. 185. die Enveloppe der in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung genommenen Polargeraden der Punkte einer geraden Linie untersucht und sie als die Polare dieser Geraden bezeichnet. Wenn sodann allgemein ein Punkt P sich längs einer Curve S von der Ordnung μ' bewegt, so ist die Enveloppe seiner r^{ten} Polare in Bezug auf eine gegebene Curve U von der Ordnung μ eine Curve, welche wir als die r^{te} Polare von S in Bezug auf U bezeichnen können. In Art. 98. sahen wir aber, dass die Enveloppe einer Curve, deren Gleichung die Coordinaten eines in einer andern Curve S bewegten Punktes als Parameter enthält, gefunden werden kann, indem man diese Parameter als Coordinaten betrachtet und die Bedingung ausdrückt, unter welcher die bewegliche Curve die Leitcurve S berührt. Demnach ist die r^{te} Polare von S auch der Ort derjenigen Punkte, deren $(\mu - r)^{te}$ Polaren die Curve S berühren.

Wenn wir dann den Ausdruck des Art. 97. für den Grad einer Berührungs-Invariante anwenden, so finden wir, dass die r^{te} Polare von S eine Curve von der Ordnung

$$\mu' (\mu' + 2r - 3) (\mu - r)$$

ist, und dass diese Zahl für jeden Doppelpunkt von S um $2 (\mu - r)$ und für jede Spitze um $3 (\mu - r)$ vermindert wird; wenn also die Classe von S durch ν' bezeichnet wird, so ist die Ordnung der besprochenen r^{ten} Polare

$$\mu'' = (\mu - r) \left\{ \nu' + 2\mu' (r - 1) \right\}.$$

Ihre Gleichung ist vom Grade $r (2\mu' + r - 3)$ in den Coefficienten der Gleichung von S. So ist in dem besondern Falle $r = 1$ die Enveloppe der ersten Polaren der Punkte einer Curve S identisch mit dem Ort der Pole der Tangenten von S und ihre Ordnung ist $\nu' (\mu - 1)$. Für $\mu' = 1$ reduciert sich wegen $\nu' = 0$ diese Ordnung auf Null, wie bekannt, weil die Enveloppe dann in die $(\mu - 1)^2$ Pole der Geraden S degeneriert.

Für den allgemeinen Fall ergiebt sich, dass jede Doppeltangente von S durch ihre $(\mu - 1)^2$ Pole ebenso vielen Doppelpunkten in der Enveloppe den Ursprung giebt, und ebenso jede stationäre Tangente von S ebenso $(\mu - 1)^2$ Spitzen in der Enveloppe. Wir erhalten daher für die Classe der Enveloppe den Ausdruck

$$(\mu - 1)^2 \mu' - (\mu - 1) \nu' - 2 (\mu - 1)^2 \tau' - 3 (\mu - 1)^2 \iota',$$

und weil

$$\nu' (\nu' - 1) - 2\tau' - 3\iota' = \mu'$$

ist, die Classe der ersten Polare

$$\nu'' = (\mu - 1) (\mu - 2) \nu' + (\mu - 1)^2 \mu'.$$

So ist in Bezug auf eine allgemeine Curve dritter Ordnung die erste Polare eines Kegelschnitts eine Curve vierter Ordnung zwölfter Classe; die einer andern allgemeinen Curve dritter Ordnung aber zwölfter Ordnung und 24ter Classe, weil die 94 Spitzen derselben eine Reduction der Classe um 108 hervorbringen.

Für $r = \mu - 1$ sodann ist die Enveloppe der Polarlinien der Punkte einer Curve S oder der Ort der Punkte, deren erste Polaren S berühren, eine Curve von der Ordnung

$$\mu' (\mu' + 2\mu - 5) \text{ oder } \nu' + 2\mu' (\mu - 2).$$

Und weil die Zahl der Polargeraden durch einen beliebigen Punkt M ebenso gross ist, wie die Zahl der Durchschnitte von S mit der ersten Polare von M, so ist die Classe der Enveloppe gleich $(\mu - 1)\mu'$.

Und im Allgemeinen ist die Zahl der Doppelpunkte der r^{ten} Polare von S gleich der $(\mu - r)^2$ fachen Anzahl der $(\mu - 1)^{ten}$ Polaren eines Punktes, welche die Curve zweifach berühren, und die Zahl ihrer Spitzen die $(\mu - r)^2$ fache Anzahl solcher Polaren, welche die gegebene Curve osculieren.

385. Wenn die r^{te} Polare einer Curve S eine Curve R ist, so muss die $(\mu - r)^{te}$ Polare von R als einen Theil die Curve S enthalten. So ist für $r = \mu - 1$ die Curve R die Enveloppe der geraden Polare eines Punktes P, welcher sich in S bewegt; weil aber der Pol dieser Polargeraden nicht nur der Punkt P ist, sondern $(\mu - 1)^2 - 1$ andere Punkte die gleiche Rolle spielen, so folgt, dass wir, wenn wir den Ort der Pole der Tangenten von R suchen, oder was dasselbe ist, die Enveloppe der ersten Polaren der Punkte von R, die Curve S zusammen mit einer andern Curve erhalten, welche der Ort der übrigen Punkte ist, die mit den Punkten von S dieselben geraden Polaren haben. In diesem Falle $r = \mu - 1$ sahen wir, dass die Classe von R gleich $\mu' (\mu - 1)$ ist und schliessen nach Art. 384., dass die Enveloppe der ersten Polaren der Punkte von R von der Ordnung $\mu' (\mu - 1)^2$ ist, d. h. dass ausser der Curve S eine Curve von der Ordnung $\mu' \mu (\mu - 2)$ zu ihr gehört — sagen wir als eine begleitende Curve. Wir sahen, dass jeder Punkt der Hesse'schen Curve ein Punkt ist, in welchem zwei Pole einer Tangente der Steiner'schen Curve zusammen fallen; es werden folglich die Punkte, in denen S die Hesse'sche Curve schneidet, Punkte in dieser begleitenden Curve sein, welche ausserdem S in $\frac{1}{2} \mu' (\mu - 2) (\mu - 3)$ Paaren von copolaren Punkten trifft.

Wenn $r = 1$ ist, so ist R der Ort der Pole der Tangenten von S, und weil ein gegebener Punkt eine Polare hat, so müssen wir als Enveloppe der Polargeraden der Punkte von R die Curve S wieder finden, ohne eine begleitende

Curve zu erhalten. Es ist jedoch zu bemerken, dass die gemeinsamen Tangenten der Curve S und der Steiner'schen Curve einen Theil der Enveloppe bilden. Nun haben wir gesehen, dass jeder dieser gemeinsamen Tangenten zwei zusammenfallende Punkte in R entsprechen, und schliessen, dass bei Anwendung des umgekehrten Verfahrens diesen zwei Punkten zwei zusammenfallende Linien entsprechen, deren Punkte sämmtlich als zur Enveloppe gehörig gezählt werden müssen. Ferner muss die Curve S in dieser Enveloppe $(\mu - 1)^2$ fach gerechnet werden, weil jeder Tangente von S Pole in R in der Zahl $(\mu - 1)^2$ entsprechen und daher, wenn wir umgekehrt von den Punkten von R zu ihren Polargeraden gehen, jede Tangente von S uns $(\mu - 1)^2$ mal begegnen wird. Und wenn μ'' und ν'' Ordnung und Classe von R bezeichnen, so ist die Ordnung der $(\mu - 1)^{ten}$ Polare nach dem Vorigen $\nu'' + 2(\mu - 2)\mu''$, aber auch

$$\nu'' = (\mu - 1)(\mu - 2)\nu' + (\mu - 1)^2 \mu', \quad \mu'' = \nu'(\mu - 1);$$

die Ordnung der Polare ist also

$$3(\mu - 1)(\mu - 2)\nu' + (\mu - 1)^2 \mu'$$

in Uebereinstimmung mit den vorigen Erörterungen, weil die Zahl der gemeinschaftlichen Tangenten von S mit der Steiner'schen Curve nach der Classe $3(\mu - 1)(\mu - 2)$ der Letztern gleich $3(\mu - 1)(\mu - 2)\nu'$ ist.

Es muss eine gleiche allgemeine Theorie der Reciprocität bestehen für R als die r^{te} Polare von S und S als die $(\mu - r)^{te}$ Polare von R; dieselbe ist aber noch ununtersucht.

386. Osculierende Kegelschnitte. Die Form einer Curve in der Nachbarschaft eines Punktes P derselben wird durch den Krümmungskreis angegeben, aber sie gestattet noch eine andere Bestimmung. Wir denken parallel der Tangente im Punkte P eine unendlich kleine Sehne QR und die Normale in P, welche ihr in N begegnet, und bezeichnen den Mittelpunkt der Sehne durch M; dann sind die Bögen PQ und und PR und die Geraden NQ, NR als Grössen erster Ordnung einander gleich, aber um Grössen zweiter Ordnung verschieden, insbesondere differieren NQ, NR um eine Grösse zweiter Ordnung, oder die Entfernung NM ist von der zweiten Ordnung. Indem wir aber bemerken, dass PN auch von der

zweiten Ordnung ist, erkennen wir, dass der Winkel MPN, d. h. $\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{MN}{PN}\right)$, im Allgemeinen ein endlicher Winkel ist; d. h. die Gerade, welche den Berührungspunkt P mit dem Mittelpunkt M der zur Tangente parallelen Sehne QR verbindet, ist unter einem endlichen Winkel gegen die Normale in P geneigt. Im Falle des Kreises fällt PM mit der Normale zusammen, und der bezeichnete Winkel ist daher ein Maass für die Grösse der Abweichung der Curve von der Kreisform an der betrachteten Stelle. Wir können ihn als die Abweichung und die Gerade PM als die Axe der Abweichung bezeichnen.[86])

Im Falle des Kegelschnittes ist die Axe der Abweichung der durch P gehende Durchmesser und die Abweichung selbst die Neigung desselben gegen die Normale. Und wenn man zu einer gegebenen Curve einen im Punkte P vierpunktig berührenden Kegelschnitt zeichnet, so haben beide — dieser Kegelschnitt und die Curve — dieselbe Axe der Abweichung, d. h. die Centra aller in P die Curve vierpunktig berührenden Kegelschnitte liegen in der Axe der Abweichung für diesen Punkt. Ferner wird die Axe der Abweichung im Punkte P von der Axe der Abweichung im nächstfolgenden Punkt der Curve in einem Punkte geschnitten, welcher der Mittelpunkt desjenigen Kegelschnitts ist, der in P eine fünfpunktige Berührung mit der Curve hat, wir nennen ihn den Mittelpunkt der Abweichung. Dieser Kegelschnitt ist vollständig bestimmt durch dieses Centrum, durch die Berührung mit der Curve in P und dadurch, dass er hier dieselbe Krümmung mit der Curve besitzt.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Abweichung in P durch Formel

$$\tan \delta = p - \frac{(1+p^2)r}{3q^2}$$

ausgedrückt wird, in welcher p, q, r den ersten, zweiten und dritten Differentialcoefficienten von y in Bezug auf x bezeichnen.

387. Die Axe der Abweichung ist eine Gerade, welche von der unendlich fernen Geraden der Ebene, aber nicht von den in derselben liegenden nicht reellen Kreispunkten

abhängig ist; die Sehne QR wird durch den Schnittpunkt O der Tangente in P mit der unendlich fernen Geraden oder überhaupt mit der geraden Linie IJ gezogen und M ist der vierte harmonische Punkt zu O in Bezug auf die Endpunkte Q und R derselben.

Der Satz von der Lage der Centra der in P vierpunktig berührenden Kegelschnitte in einer Geraden ist, weil die fraglichen Kegelschnitte nicht bloss vier Punkte, sondern auch vier Tangenten (in der Tangente von P) gemeinsam haben, gleichbedeutend mit dem allgemeinen Satze, dass die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar, d. h. die von vier festen Geraden berührten Kegelschnitte, in einer Geraden liegen; dem reciproken von dem noch bekannteren, dass die Polaren eines Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt eines Büschels selbst ein Büschel bilden.

Wenn die unendlich fernen Kreispunkte durch einen Kegelschnitt ersetzt werden, so existiert eine analoge Theorie der Abweichung nicht.

388. Die in Art. 237. gegebene Untersuchung der Gleichung des Kegelschnitts, der eine Curve dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte fünfpunktig berührt, kann auf Curven beliebiger Ordnung ausgedehnt werden. Sei $S = 0$ der Polarkegelschnitt und $T = 0$ die Tangente in diesem Punkte, so ist die Gleichung eines in demselben Punkte berührenden Kegelschnitts $S - PT = 0$ für

$$P \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

mit noch zu bestimmenden Coefficienten ξ_i. Dann wird die Gleichung der geraden Linien, welche den Punkt x_i' mit den Durchschnittspunkten des Kegelschnitts mit der Curve verbinden, erhalten, indem man in die Gleichung jeder Curve $x_i' + \lambda x_i$ für x_i setzt und λ zwischen beiden so entstandenen Gleichungen eliminiert. Das Resultat der Substitution in die erste Gleichung ist

$$T + \tfrac{1}{2}\lambda S + \tfrac{1}{6}\lambda^2 \Delta^3 + \tfrac{1}{24}\lambda^3 \Delta^4 + \text{etc.},$$

das Resultat der Substitution in die Gleichung des Kegelschnitts dagegen

$$2(\mu - 1) T - P'T + \lambda (S - PT);$$

und wenn wir das Letztere in der Form $\theta T + \lambda V$ schreiben, so ist das Resultat der Elimination von λ zwischen beiden Gleichungen durch T theilbar und der Quotient giebt

$$V^{\mu-1} - \tfrac{1}{2}\theta V^{\mu-2} S + \tfrac{1}{6}\theta^2 V^{\mu-3} \Delta^3 T - \text{etc.} = 0$$

als Gleichung der $2(\mu - 1)$ Verbindungslinien von x_i' mit den $2(\mu - 1)$ andern dem Kegelschnitt und der Curve gemeinschaftlichen Punkten. Damit der Kegelschnitt eine dreipunktige Berührung mit der Curve habe, muss eine dieser Linien mit T zusammen fallen, oder die eben geschriebene Gleichung d. h. die Verbindung ihrer beiden ersten Glieder muss durch T theilbar sein, eine Bedingung, welche $\theta = 2$ fordert, und da $\theta = 2(\mu - 1) - P'$ ist, $P' = 2(\mu - 2)$. Hierher gehört das Problem der Bestimmung des Osculationskreises, als des durch zwei gegebene Punkte gehenden osculierenden Kegelschnittes. Wenn wir im allgemeinen Falle den erhaltenen Werth von θ einsetzen und die Division durch T vollziehen, so erhalten wir

$$- T V^{\mu-2} + \tfrac{2}{3} V^{\mu-3}\Delta^3 - \tfrac{1}{3} V^{\mu-4} T \Delta^4 + \text{etc.} = 0,$$

als Gleichung der $2\mu - 3$ Geraden vom Punkte x_i' nach den übrigen Durchschnittspunkten des Kegelschnitts mit der Curve.

Die Berührung wird eine vierpunktige, wenn diese Gleichung, d. h. wenn $\tfrac{2}{3}\Delta^3 - PS$ durch T weiter theilbar ist; und die entsprechende Bedingung wird wie in Art. 362. gefunden, indem man in diese Grösse die Coordinaten eines willkürlichen Punktes in T, nämlich

$$U_2\xi_3 - U_3\xi_2,\ U_3\xi_1 - U_1\xi_3,\ U_1\xi_2 - U_2\xi_1$$

einsetzt und sie mit Null identisch vergleicht; wir finden so, dass P von der Form

$$\mu T + \frac{2}{3H}\left(x_1 \frac{dH}{dx_1} + x_2 \frac{dH}{dx_2} + x_3 \frac{dH}{dx_3}\right)$$

sein muss für μ als noch zu bestimmende Grösse. Darum schneidet die Sehne der Schnittpunkte des Polarkegelschnitts und eines jeden vierpunktig berührenden Kegelschnittes die Tangente in dem festen Punkte X, welcher in Art. 373. bestimmt wurde, wo die Tangente sowohl die Polarcurve dritter Ordnung als auch die gerade Polare von x_i' in Bezug auf die

Hesse'sche Curve der Curve selbst oder eine ihrer Polarcurven trifft.

Bezeichnen wir dann die Gerade

$$\frac{1}{H}\left(x_1 \frac{dH}{dx_1} + x_2 \frac{dH}{dx_2} + x_3 \frac{dH}{dx_3}\right) = 0$$

durch Π und erinnern die identische Gleichung

$$\Delta^3 - \Pi S = JT,$$

so wird durch Einführung des Werthes $P = \frac{2}{3}\Pi + \mu T$ die Gleichung durch T theilbar und giebt als Gleichung der $2\mu - 4$ Verbindungslinien von x_i' mit den übrigen Schnittpunkten der Curve und des Kegelschnitts

$$(\tfrac{2}{3}J + P^2 - \mu S)\, V^{\mu-3} - \tfrac{1}{3}V^{\mu-4}\Delta^4 + \text{etc.} = 0.$$

Die Bedingung der fünfpunktigen Berührung ist dann die Theilbarkeit dieser Gleichung durch T und wir bestimmen den einer solchen Berührung entsprechenden Werth von μ durch Substitution von

$$U_2\xi_3 - U_3\xi_2,\ U_3\xi_1 - U_1\xi_3,\ U_1\xi_2 - U_2\xi_1$$

für x_1, x_2, x_3 in die vorstehend geschriebenen Glieder. Aus der identischen Gleichung des Art. 236. können wir J ermitteln und finden, dass durch die erwähnte Substitution J den Ausdruck erhält

$$-3(\mu - 1)(\mu - 2)\Sigma + \frac{2(\mu - 1)}{H} R\psi(H)$$

für Σ, R und $\psi(H)$ als die in Art. 365. ebenso bezeichneten Grössen. Die Resultate der Substitution in S, T und in Δ^4 sind respective Q_2, $\frac{2}{3H}Q_3$ und Q_4. Wenn wir dann die Werthe des Art. 369. anwenden, so erhalten wir

$$\mu H^2 = \tfrac{2}{3}\left\{3(\mu - 1)(\mu - 2)\Sigma H - 2(\mu - 1)R\psi(H)\right\}$$

$$-\tfrac{4}{9}\left\{9(\mu - 2)^2 H\Sigma - 6(\mu - 2)R\psi(H) + \frac{1}{H}R^2\Theta\right\}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left\{-6(\mu-2)(\mu-3)\Sigma H + 4(\mu-3)R\psi(H) - \frac{1}{H}R^2\Phi\right\},$$

woraus durch Reduction hervorgeht

$$\mu = -\frac{1}{9H^3}(4\Theta - 3H\Phi),$$

die vollständige Bestimmung des fünfpunktig berührenden Kegelschnitts.

389. Die Untersuchung ist von Cayley zur Ermittelung der Bedingung fortgesetzt worden, welche die Coordinaten x_i' erfüllen müssen, damit die Berührung eine sechspunktige sei[87]), und wir geben, weil die Untersuchung selbst zu lang ist, das Ergebniss an, welches dahin geht, dass die x_i' der Gleichung

$$(\mu - 2)(12\mu - 27)\, HJ(U, H, \Phi) - 3(\mu - 1)\, HJ'(U, H, \Phi) + 40(\mu - 2)^2 J(U, H, \Theta) = 0$$

genügen müssen, in welcher $J(U, H, \Phi)$ die Jacobi'sche Determinante dieser drei Functionen bezeichnet und der dem J beigefügte Strich bedeuten soll, dass bei Bildung der Jacobi'schen Determinante Φ in der Voraussetzung zu differentiieren ist, dass die in der Function Φ auftretenden zweiten Differentialcoefficienten von H constant sind. Die geschriebene Gleichung repräsentiert eine Curve von der Ordnung $12\mu - 27$, deren Durchschnittspunkte mit $U = 0$ die $\mu(12\mu - 27)$ Punkte sind, in denen sechspunktige Berührung mit einem Kegelschnitt stattfindet.

390. Systeme von Curven. Die Bestimmung der Anzahl von Kegelschnitten, welche mit einer gegebenen Curve eine sechspunktige Berührung haben, gehört zu einer Classe von Fragen, welche auf die Eigenschaften solcher Systeme von Curven führen, die einer Bedingung weniger unterliegen, als zu ihrer vollständigen Bestimmung erforderlich sind; also für Curven von der Ordnung m der Zahl von

$$\tfrac{1}{2} m(m + 3) - 1$$

Bedingungen. Ein solches System oder eine solche Curvenreihe wird durch den Index N charakterisiert, wenn N die Zahl von Curven der Reihe ist, welche durch einen willkürlich angenommenen Punkt gehen;[88]) so dass z. B., wenn die Gleichung der Curve einen Parameter algebraisch enthält, N der Grad ist, in welchem dieser Parameter eintritt — ohne dass umgekehrt immer die Gleichung einer Curve des Systems oder der Reihe vom Index N stets in dieser Form ausgedrückt werden kann.[89]) Oder man kann sie durch zwei Charakteristiken[90]) definiren, nämlich durch die Zahl μ von Curven der Reihe, welche durch einen willkürlichen Punkt gehen und die Zahl ν derselben, welche eine willkürlich gewählte Gerade berühren. Durch die Symmetrie der Resultate,

welche sie in dem Falle von Kegelschnitten als von Curven derselben Ordnung und Classe liefert, ist diese Methode besonders beachtenswerth.[91])

391. Der Ort der Pole einer gegebenen Geraden in Bezug auf die Curven der Reihe ist eine Curve von der Ordnung ν. Denn diess ist offenbar die Zahl der Punkte, in denen die Linie selbst den Ort schneiden kann. Die Enveloppe der Polaren eines gegebenen Punktes in Bezug auf die Curven des Systems ist in gleicher Art eine Curve der μ^{ten} Classe.

Der Ort eines Punktes, dessen Polare in Bezug auf eine feste Curve von der Ordnung m' und Classe n' mit seiner Polare in Bezug auf eine Curve des Systems zusammenfällt, ist eine Curve von der Ordnung $\nu + \mu\,(m' - 1)$. Denn wir bestimmen die Zahl der in einer gegebenen Geraden liegenden Punkte des Ortes, indem wir zwei Punkte A, A' dieser Geraden betrachten, welche so liegen, dass die Polare von A in Bezug auf die feste Curve mit der Polare von A' in Bezug auf eine Curve des Systems zusammenfällt; es ist zu ermitteln, in wie vielen Fällen A und A' zusammenfallen können. Denken wir dabei zuerst A fest, so dass seine Polare in Bezug auf die gegebene Curve auch fest ist und der Ort der Pole dieser Geraden in Bezug auf die Curven des Systems nach dem ersten Satze von der Ordnung ν ist, so sehen wir, dass jeder Lage von A Lagen von A' in der Zahl ν entsprechen. Setzen wir sodann aber A' als fest voraus, so dass seine Polaren in Bezug auf die Curven des Systems eine Curve von der Classe μ umhüllen, während nach Art. 384. die Polaren der Punkte der gegebenen Geraden in Bezug auf die feste Curve eine Curve von der Classe $(m' - 1)$ umhüllen, so folgt, dass $\mu\,(m' - 1)$ gemeinsame Tangenten der beiden Enveloppen und daher ebenso viele dem festen A' entsprechende Lagen von A vorhanden sind. Die Anzahl der Coincidenzen von A und A' ist daher $\nu + \mu\,(m' - 1)$ und eben diess ist die Ordnungszahl des in Frage stehenden Ortes.

Dieser Ort schneidet offenbar die gegebene Curve in denjenigen Punkten, in welchen sie von Curven des Systems berührt wird und daher ist die Zahl solcher Curven

$$m'\,\{\nu + \mu\,(m' - 1)\} \text{ oder } m'\nu + n'\mu.$$

392. Im Allgemeinen wird die Zahl der Curven des Systems, welche irgend einer andern Bedingung genügen, von der Form $\mu\alpha + \nu\beta$ sein und die Zahlen α, β können als Charakteristiken dieser Bedingung angesehen werden. Wenn eine Curve durch eine hinreichende Anzahl von Bedingungen bestimmt ist, und diese Charakteristiken für jede Bedingung bekannt sind, so kann die Zahl der Curven bestimmt werden, die den vorgezeichneten Bedingungen genügen. Wir erörtern diess an dem Falle der Kegelschnitte. Die Zahl der durch fünf Punkte, durch vier Punkte und eine Tangente, durch drei Punkte und zwei Tangenten, durch zwei Punkte und drei Tangenten, einen Punkt und vier, endlich durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitte ist respective

$$1, 2, 4, 4, 2, 1$$

und die Charakteristiken der durch jene Bedingungen respective bestimmten Systeme sind daher

$$(1, 2), (2, 4), (4, 4), (4, 2), (2, 1).$$

Die Zahl der Kegelschnitte, welche einer Bedingung von den Charakteristiken α, β genügen und zugleich durch vier Punkte gehen oder drei Punkte enthalten und eine Gerade berühren, etc. ist daher

$$\alpha + 2\beta,\ 2\alpha + 4\beta,\ 4\alpha + 4\beta,\ 4\alpha + 2\beta,\ 2\alpha + \beta.$$

Wenn wir diese Zahlen durch $\mu''', \nu''', \varrho''', \sigma''', \tau'''$ respective bezeichnen, so erkennen wir, dass dieselben nicht unabhängig von einander sind, sondern den Relationen

$$\nu''' = 2\mu''',\ \sigma''' = 2\tau''',\ \varrho''' = \tfrac{2}{3}(\nu''' + \sigma''')$$

genügen.

Die Charakteristiken der Systeme, welche mit der Bedingung α, β zusammen mit der von drei Punkten oder mit zwei Punkten und einer Tangente, etc. gebildet werden, sind dann offenbar

$$(\mu''', \nu'''),\ (\nu''', \varrho'''),\ (\varrho''', \sigma'''),\ (\sigma''', \tau''')$$

und die Zahl der Kegelschnitte dieser Systeme, welche einer neuen Bedingung α', β' genügen, ist daher

$$\mu'''\alpha' + \nu'''\beta',\ \nu'''\alpha' + \varrho'''\beta',\ \text{etc.}$$

In entwickelter Form erhalten wir für die Anzahlen μ'', ν'', ϱ'', σ'' der Kegelschnitte, welche zwei Bedingungen von den

Charakteristiken (α, β), (α', β') erfüllen und zugleich durch drei Punkte gehen, oder zwei Punkte enthalten und eine Gerade berühren, etc.

$$\begin{aligned}
\mu'' &= \alpha\alpha' + 2(\beta\alpha' + \alpha\beta') + 4\beta\beta', \\
\nu'' &= 2\alpha\alpha' + 4(\beta\alpha' + \alpha\beta') + 4\beta\beta', \\
\varrho'' &= 4\alpha\alpha' + 4(\beta\alpha' + \alpha\beta') + 2\beta\beta', \\
\sigma'' &= 4\alpha\alpha' + 2(\beta\alpha' + \alpha\beta') + \beta\beta';
\end{aligned}$$

und wir bemerken, dass diese Zahlen durch die identische Relation

$$\mu'' - \tfrac{3}{2}\nu'' + \tfrac{3}{2}\varrho'' - \sigma'' = 0$$

verbunden sind.

In derselben Art sind die Charakteristiken des Systems der Kegelschnitte, welche zwei Bedingungen (α, β) und (α', β') genügen und zugleich durch zwei Punkte gehen, oder einen Punkt enthalten und eine Gerade berühren, oder zwei Gerade berühren, (μ'', ν''), (ν'', ϱ''), (ϱ'', σ'') und die Anzahlen solcher Kegelschnitte, die einer dritten Bedingung (α'', β'') genügen, sind daher respective $\mu''\alpha'' + \nu''\beta''$, etc. Also in entwickelter Form für μ', ν', ϱ' als die Zahlen der Kegelschnitte, welche drei Bedingungen (α, β), (α', β'), (α'', β'') genügen und überdiess durch zwei Punkte gehen, etc.

$$\begin{aligned}
\mu' &= \alpha\alpha'\alpha'' + 2\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 4\beta\beta'\beta'', \\
\nu' &= 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta'' + 2\beta\beta'\beta'', \\
\varrho'' &= 4\alpha\alpha'\alpha'' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 2\Sigma\alpha\beta'\beta' + \beta\beta'\beta''.
\end{aligned}$$

Dann sind die Charakteristiken des Systems, das man bildet, indem man den drei vorigen Bedingungen eine vierte (α''', β''') hinzufügt, $\mu'\alpha''' + \nu'\beta'''$, $\nu'\alpha''' + \varrho'\beta'''$ oder in entwickelter Form

$$\begin{aligned}
\mu = \alpha\alpha'\alpha''\alpha''' &+ 2\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta''' \\
&+ 4\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta''' + 2\beta\beta'\beta''\beta''', \\
\nu = 2\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' &+ 4\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta''' \\
&+ 2\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta''' + \beta\beta'\beta''\beta'''.
\end{aligned}$$

Und wenn wir endlich eine fünfte Bedingung (α'''', β'''') hinzufügen, so ist die Zahl der Kegelschnitte, welche allen genügen $\mu\alpha'''' + \nu\beta''''$ oder

$$\begin{aligned}
&\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha'''' + 2\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\beta'''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\alpha''\beta'''\beta'''' \\
&+ 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta'''\beta'''' + 2\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta'''\beta'''' + \beta\beta'\beta''\beta'''\beta''''.
\end{aligned}$$

Diess giebt z. B. die Zahl der Kegelschnitte, welche fünf gegebene Curven berühren, indem man für α, β, etc. die Classen und Ordnungszahlen dieser Curven substituiert. Und in derselben Weise würden wir die Zahl von Curven irgend einer Ordnung finden, welche durch die Bedingung der Berührung mit gegebenen Curven bestimmt sind, wenn wir die Anzahl derselben in jedem Falle wüssten, wo die Bedingungen nur das Hindurchgehen durch Punkte und das Berühren mit geraden Linien vorschreiben.

393. Die im vorigen Art. betrachteten Bedingungen waren unabhängig von einander oder einfache Bedingungen; aber wir können Bedingungen bilden, die zwei oder mehreren einfachen äquivalent sind, wie z. B. die Bedingung, dass ein Kegelschnitt eine Curve zweimal oder öfter berühren soll, oder die, dass eine Curve eine andere osculieren oder nach einer andern höheren Ordnung berühren soll. Eine solche Bedingung, welche zwei andern äquivalent ist, können wir als eine doppelte, oder genauer die Vereinigung von beiden als zwei untrennbare Bedingungen bezeichnen. Man findet, dass die im letzten Art. erhaltenen Formeln für u n a b h ä n g i g e Bedingungen unter geeigneten Modificationen für u n t r e n n b a r e Bedingungen gültig bleiben.

So sind für zwei untrennbare Bedingungen die Charakteristiken μ'', ν'', ϱ'', σ'' die Zahlen der Kegelschnitte, welche durch die Combination der gegebenen zweifachen Bedingung respective mit der durch drei Punkte zu gehen, oder zwei Punkte zu enthalten und eine Gerade zu berühren, etc. erhalten werden, und diese Zahlen sind immer durch die Relation

$$\mu'' - \tfrac{3}{2}\nu'' + \tfrac{3}{2}\varrho'' - \sigma'' = 0$$

verbunden.

Wir gehen dann genau so wie vorher zur Aufsuchung der Zahl von Kegelschnitten weiter, welche durch Combination der zweifachen Bedingung mit irgend drei andern bestimmt werden und erhalten so die folgenden Formeln. Wenn m'', n'', r'', s'' die Charakteristiken einer zweiten zweifachen Bedingung sind, so werden die Charakteristiken des durch beide Paare zweifacher Bedingungen gegebenen Kegelschnittsystems respective

$$m''\mu'' - \tfrac{3}{2}(\mu''n'' + m''\nu'') + (r''\mu'' + \varrho''m'')$$
$$+ \tfrac{7}{4}n''\nu'' - \tfrac{1}{2}(r''\nu'' + n''\varrho''),$$
$$\sigma''s'' - \tfrac{3}{2}(\sigma''r'' + s''\varrho'') + (\nu''s'' + n''\sigma'')$$
$$+ \tfrac{7}{4}\varrho''r'' - \tfrac{1}{2}(\varrho''n'' + r''\nu'').$$

Und für μ', ν', ϱ' als die Charakteristiken einer dreifachen Bedingung ist die Zahl von Kegelschnitten, die durch diese dreifache und die zweifache Bedingung (μ'', ν'', ϱ'', σ'') bestimmt werden, gleich

$$\tfrac{1}{4}\mu'(2\sigma'' - \varrho'') + \tfrac{1}{4}\varrho'(2\mu'' - \nu'')$$
$$+ \tfrac{1}{16}\nu'\{5(\mu'' + \varrho'') - 6(\mu'' + \sigma'')\}.$$

394. Zwischen den beiden Charakteristiken μ, ν einer Reihe von Curven m^{ter} Ordnung, welche einer Bedingung weniger unterworfen sind als der zur Bestimmung derselben hinreichenden Zahl, besteht eine Relation, die wir im Folgenden untersuchen. Betrachten wir die Punkte A, A', etc., in welchen eine Curve der Reihe eine gegebene gerade Linie schneidet, so entsprechen, weil jede durch A gehende Curve die Gerade in $(m-1)$ andern Punkten schneidet, dem Punkte A die Zahl von $\mu(m-1)$ Punkten A' und umgekehrt; die Zahl der Doppelpunkte dieser beiden entsprechenden Reihen ist daher $2\mu(m-1)$. Dieselbe würde mit der Zahl ν übereinstimmen, wenn die Doppelpunkte **nur** aus der Berührung einer Curve der Reihe mit der Geraden AA' entspringen könnten. Da es aber Curven der Reihe geben kann, welche zusammengesetzt sind aus einem einfach und einem doppelt zählenden Theile, so sind die aus ihnen durch die letzteren entspringenden Doppelpunkte von $2\mu(m-1)$ abzuziehen, um die Zahl ν der eigentlichen Berührungen zu erhalten. In dem speciell betrachteten Falle der Kegelschnitte erhält man für λ als die Zahl der Kegelschnitte der Reihe, die sich auf zwei zusammenfallende Gerade reducieren

$$\nu = 2\mu - \lambda.$$

395. Ein Kegelschnitt kann als Curve zweiter Ordnung in ein Linienpaar degenerieren, so dass seine Gleichung in Liniencoordinaten ein vollständiges Quadrat wird und jede durch den gemeinschaftlichen Punkt des Linienpaares gehende Gerade als eine Doppeltangente der Curve zu betrachten ist.

Ebenso kann ein Kegelschnitt als Curve zweiter Classe in ein Paar von Punkten degenerieren, und jeder Punkt in der Geraden, welche dieselben verbindet, gehört in gewissem Sinne doppelt zur Curve. Das Punktepaar kann als Grenzform des Kegelschnittes betrachtet werden und die durch die Punkte gehenden Geraden insbesondere als seine Tangenten; der Kegelschnitt ist unter Festhaltung seiner Hauptaxe durch fortschreitende Verkürzung seiner Nebenaxe in die Grenzform übergegangen, in welcher nun alle seine Tangenten unendlich nahe den zwei festen Punkten vorbeigehen.

Bezeichnen wir durch λ die Zahl der Punktpaare im System und durch ω die der Linienpaare desselben, so ist

$$\mu = 2\nu - \omega, \quad \nu = 2\mu - \lambda, \quad 3\mu = 2\lambda + \omega, \quad 3\nu = 2\omega + \lambda.$$

Weil die Zahlen der Kegelschnitte eines Systems, welche in Linien- oder Punkten-Paaren degenerieren, in der Regel leichter zu erkennen sind, als die Zahlen der Kegelschnitte desselben, welche einen beliebigen Punkt enthalten, oder eine beliebige Gerade berühren, so konnten sie in der Theorie der Kegelschnittsysteme von Zeuthen mit Vortheil statt der Chasles'schen Charakteristiken μ, ν benutzt werden. Ein besonderer Fall bietet sich dar, wenn die zwei Punkte eines Punktpaares zusammenfallen, ohne dass darum ihre Verbindungslinie aufhört bestimmt zu sein, oder wenn die zwei Linien eines Paares vereinigt sind ohne dass ihr Schnittpunkt unbestimmt wird; man kann ihn als den des Linien-Paar-Punktes bezeichnen.

396. Im Falle der Kegelschnitte hat das Linienpaar in Punktcoordinaten eine Gleichung $x_1 x_2 = 0$ und das Punktepaar in Liniencoordinaten reciprok $\xi_1 \xi_2 = 0$. Wenn wir aber nach der Gleichung des Letztern in Punktcoordinaten fragen, so ist dieselbe nicht $x_3^2 = 0$, welches vielmehr nur die doppelt zählende Verbindungslinie der Punkte des Paares darstellt, in gewissem Sinne einen Kegelschnitt — ebenso wie

$$(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 = 0$$

— welcher jede beliebige gerade Linie berührt. Die Anschauung der Grenzform oder des unendlich flachen Kegelschnitts führt zur richtigen Darstellung. Denken wir die Kegelschnitte, welche zwei gegebene Punkte in der Geraden $x_1 = 0$ nämlich

$$x_2 - \alpha x_3 = 0 \text{ und } x_2 - \beta x_3 = 0$$

enthalten und zwei gegebene Gerade $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren, so lassen sich dieselben durch die Gleichung mit dem willkürlichen Parameter θ darstellen

$$x_1^2 + 2\theta x_1 x_2 + 2\theta \sqrt{\alpha\beta}\, x_1 x_3 + \theta^2 (x_2 - \alpha x_3)(x_2 - \beta x_3) = 0,$$

oder

$$\{x_1 + \theta x_2 + \theta \sqrt{\alpha\beta}\, x_3\}^2 - \theta^2 (\alpha + \beta)\, x_2 x_3 = 0$$

und für θ als ein unendlich kleines, sagen wir der ersten Ordnung, repräsentiert diese Gleichung den unendlich flachen Kegelschnitt oder das gegebene Punktepaar. Der Vergleich mit der allgemeinen Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

giebt

$$a_{11} = 1,\ a_{22} = \theta^2,\ a_{33} = \theta^2\alpha\beta,\ a_{23} = -\tfrac{1}{2}\theta^2(\alpha + \beta),$$
$$a_{13} = \theta\sqrt{\alpha\beta},\ a_{12} = \theta,$$

also für ein endliches a_{11} unendlich kleine Werthe erster Ordnung für a_{12} und a_{13}, aber unendlich kleine Werthe der zweiten Ordnung für a_{22}, a_{33}, a_{23}; wobei dann die Verhältnisse

$$\sqrt{a_{22}} : \sqrt{a_{33}} : \sqrt{a_{23}} : a_{13} : a_{12}$$

so zu bestimmen sind, dass den vorgeschriebenen Bedingungen genügt wird. Insofern θ unendlich klein ist, erscheint die Gleichung somit vollkommen bestimmt. Die in der Grenze verschwindenden Coefficienten der Gleichung des Kegelschnitts sind also als unendlich kleine von verschiedener Ordnung zu betrachten.

Gehen wir zur Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung weiter, so wird diese, wenn sie gewisse unendlich kleine Coefficienten enthält, mit dem Verschwinden derselben sich in eine zusammengesetzte Gleichung $P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$ verwandeln und in ihrer ursprünglichen Gestalt eine Grenzform der Curve darstellen. Betrachten wir die von einem willkürlichen Punkt zu dieser Grenzform gehenden Tangenten, so bestehen dieselben 1) aus den Tangenten von ihm zu den verschiedenen componierenden Curven $P = 0$, $Q = 0$, etc. 2) aus den nach den singulären Punkten dieser Curven gehenden Geraden; 3) aus den nach den Durchschnittspunkten der Curven $P = 0$,

$Q=0$; etc. unter einander gehenden Geraden; 4) aus den geraden Linien nach gewissen bestimmten Punkten in den verschiedenen Curven $P=0$, $Q=0$, etc. respective, die wir als „freie Scheitel" bezeichnen wollen, indess die Punkte unter 4) als „feste Scheitel" bezeichnet werden sollen. Wir haben so eine Degenerationsform der Curve n^{ter} Ordnung, die als zusammengesetzt angesehen werden kann aus den componierenden Curven in ihren etwaigen Graden der Vielfachheit und aus den als Scheitel bezeichneten Punkten, und die daher nur unvollständig durch die Endgleichung $P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$ dargestellt wird. Die Zahl und Vertheilung der Scheitel ist nicht willkürlich, sondern durch Gesetze bestimmt, die sich aus der Betrachtung der Grenzform ergeben. Entsprechend verschiedenen Formen der Endgleichung

$$P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$$

und der Zahl und Vertheilung der Scheitel in den componierenden Curven giebt es für einen gegebenen Werth von n verschiedene Degenerationsformen der Curve. Im Falle einer Curve vierter Ordnung mit der Endgleichung $x^2y^2=0$ hat sich ergeben[92]), dass neun freie und drei feste Scheitel existieren. Die letzteren liegen im Schnittpunkt der beiden Geraden $x=0$, $y=0$; von den ersteren liegen drei in einer der Geraden, sagen wir in $y=0$, und sind drei von den Schnittpunkten der Curve vierter Ordnung mit ihr, indess der vierte dem Punkt $x=0$, $y=0$ unendlich nahe liegt; die sechs andren liegen willkürlich in der Geraden $x=0$. Die Zahl der untersuchten Fälle ist jedoch klein[93]) und die Frage nach diesen Degenerationsformen daher wohl weiterer Untersuchung bedürftig.

Auf Grund der Betrachtung der Degenerationsformen der Curven dritter und vierter Ordnung sind durch Maillard und Zeuthen[94]) die Anzahlen solcher Curven bestimmt worden, welche gegebenen Elementarbedingungen genügen.

397. Für ein System von Kegelschnitten, welche vier Bedingungen der Berührung genügen, ist ziemlich leicht zu erkennen, welches die Punktepaare und Linienpaare des Systems sind. Um aber die Werthe von λ und ω zu finden, ist jedes dieser Paare nicht einfach, sondern in bestimmter

Vielfachheit zu zählen und die Bestimmung dieser Vielfachheiten bildet die eigentliche Schwierigkeit des Problems.

Zeuthen gebraucht zu diesem Zwecke die folgende Ueberlegung: In dem elementaren System der durch vier Punkte bestimmten Kegelschnitte ist offenbar die Anzahl der Linienpaare drei und die der Punktepaare Null und wegen $\mu = 1$, $\nu = 2$ erhalten wir $\lambda = 0$, $\omega = 3$ und erkennen, dass ein Linienpaar, welches vier gegebene Punkte zu zwei mit einander verbindet, in der Zahl der Linienpaare einfach zählt.

Nehmen wir aber ein durch drei Punkte und eine Tangente bestimmtes System von Kegelschnitten, so haben wir drei Linienpaare, nämlich je eine Verbindungslinie von zweien der gegebenen Punkte und die von ihrem Schnittpunkt mit der gegebenen Tangente nach dem dritten Punkte gehende Gerade; auch hier sind keine Punktepaare vorhanden und weil $\mu = 2$, $\nu = 4$ sind, so werden $\lambda = 0$, $\omega = 6$ und wir erkennen, dass ein Linienpaar doppelt zählt, wenn es wie hier aus der Verbindungslinie von zwei gegebenen Punkten und der Linie vom dritten Punkt nach ihrem Durchschnitt mit einer gegebenen Geraden besteht.

Nehmen wir endlich das durch zwei Punkte und zwei Tangenten bestimmte System, so ist nur ein Linienpaar vorhanden, welches vom Durchschnittspunkt der beiden Tangenten nach den gegebenen Punkten geht und ein Punktepaar in der Verbindungslinie der Punkte auf den Tangenten; wegen $\mu = \nu = 4$ ist also $\lambda = \omega = 4$, oder ein Linienpaar zählt vierfach, wenn es zwei gegebene Punkte mit dem Schnittpunkt von zwei gegebenen Geraden verbindet. Wir können es ersparen, auf die reciproken Singularitäten weiter einzugehen.

Die Bewegung eines Kegelschnitts, welcher eine gegebene Curve berührt, kann als eine Drehung um den Berührungspunkt oder als eine Verschiebung längs der Tangente desselben bis zum Eintritt der Berührung betrachtet werden; man schliesst hieraus im Falle eines Kegelschnitts, welcher eine gegebene Curve berühren soll, dass unter den Linienpaaren diejenigen (A') einfach zu zählen sind, welche aus zwei gemeinschaftlichen Tangenten von zweien der Curven bestehen; dass wir die andern (B') zweifach zählen müssen,

welche aus einer gemeinschaftlichen Tangente von zwei Curven und einer von ihrem Schnittpunkte mit der dritten Curve an die vierte Curve gehenden Tangente bestehen; und endlich vierfach diejenigen (C'), welche aus Tangenten an zwei der Curven aus einem Durchschnittspunkte der beiden andern Curven bestehen. Und ebenso zählen wir unter den Punktepaaren diejenigen (A) einfach, welche aus Durchschnittspunkten von zwei der Curven bestehen; sodann zweifach die andern (B), wo eine Tangente der einen Curve durch einen Schnittpunkt zweier andern Curven und die vierte Curve begrenzt wird; endlich vierfach diejenigen (C), welche Paare von Begrenzungspunkten einer gemeinschaftlichen Tangente von zwei Curven in den beiden andern Curven sind. Dabei kann an Stelle des Durchschnitts von zwei Curven der Durchschnitt einer Curve mit sich selbst, also ein Knotenpunkt und an Stelle der gemeinsamen Tangente von zwei Curven eine Doppeltangente einer Curve treten.

398. Wir erörtern das Beispiel von der Zahl der Linienpaare in dem System von Kegelschnitten, welche vier feste Curven berühren.

Wir haben $nn'n''n'''$ Linienpaare, welche aus einer der nn' gemeinsamen Tangenten der beiden ersten und einer der $n''n'''$ gemeinsamen Tangenten der beiden letzten Curven bestehen, und weil wir die vier Curven in drei Arten zu Paaren verbinden können, so ist die Zahl A' gleich $3nn'n''n'''$.

Ferner giebt es $nn'n''m'''$ Paare aus einer gemeinsamen Tangente der beiden Curven und einer aus einem Schnittpunkte derselben mit der vierten an die dritte gezogenen Tangente; und da wir dieselbe Anzahl erhalten, wenn wir von einer gemeinsamen Tangente der zweiten und dritten oder der dritten und ersten Curve ausgehen, so wird

$$B' = 3\Sigma nn'n''m'''.$$

Endlich giebt es offenbar $\Sigma nn'm''m'''$ Paare von Tangenten der mit C' bezeichneten Gruppe. Wir haben also

$$\omega = 3nn'n''n''' + 6\Sigma nn'n''m''' + 4\Sigma nn'm''m'''$$

und erhalten in gleicher Art

$$\lambda = 4\Sigma nn'm''m''' + 6\Sigma nm'm''m''' + 3mm'm''m''';$$

und leiten endlich aus diesen Zahlen dieselben Werthe für μ und ν ab, welche wir früher in anderer Weise erhielten.

399. Wir verfahren in analoger Weise, wenn die Bedingungen des Problems fordern, dass der Kegelschnitt dieselbe Curve mehr als einmal oder nach einer höhern Ordnung berühren soll. Dabei benutzen wir die zweckmässige Bezeichnung von Cayley, in welcher (1) die einfache Berührung, (1, 1) die einfache Berührung mit derselben Curve in zwei verschiedenen Punkten, (2) die dreipunktige oder die Berührührung zweiter Ordnung etc. bedeuten, so dass das bisher untersuchte Problem von der einfachen Berührung mit vier verschiedenen Curven durch (1), (1), (1), (1) bezeichnet wird. Wir betrachten nun das System (1, 1), (1), (1), also dasjenige, dessen Kegelschnitte eine Curve doppelt und zwei andere Curven einfach berühren. In diesem Falle ergiebt sich genau wie vorher

$$A' = \tau n' n'' + nn' . nn'';$$

ferner

$$B' = \tau (n' m'' + n'' m') + nn' (m - 2) n'' + nn'' (m - 2) n' \\ + nn' m'' (n - 1) + nn'' m' (n - 1) + n' n'' m (n - 2);$$

$$C' = \delta n' n'' + mm' (n - 2) n'' + mm'' (n - 2) n' \\ + m' m'' \tfrac{1}{2} n (n - 1)$$

für τ und δ als die Anzahlen der Doppeltangenten und Doppelpunkte der doppelt berührten Curve. Wir müssen aber hierzu noch die Zahl (D') von $\varkappa n' n''$ Linienpaaren fügen, welche aus einem Paar von Tangenten der zweiten und dritten Curve bestehen, die von einem Rückkehrpunkt der ersten Curve ausgehen — für $\varkappa$ als die Zahl derselben. Dass diese D' dreifach zu zählen sind, hat Zeuthen dadurch ermittelt, dass er sie zuerst mit dem unbekannten Factor x in die Formeln einführte und sodann diess x durch Untersuchung der elementaren Fälle bestimmte, in denen die zweite und dritte Curve sich auf Punkte oder Linien reducieren. Durch Verbindung der Zahlen

$$A' + 2B' + 4C' + 3D'$$

erhalten wir dann

$$\omega = n' n'' (n^2 + 6mn - 8n - 4m + \tau + 4\delta + 3\varkappa) \\ + 2 (m' n'' + m'' n') (n^2 + 2mn - n - 4m + \tau) + 2 m' m'' n (n - 1)$$

mit einem entsprechenden Ausdruck für λ. Mittelst dieser Formeln bildet man sodann die Werthe von μ und ν, nämlich

$$\mu = \mu''' m' m'' + \mu'' (m' n'' + m'' n') + \mu' n' n'',$$
$$\nu = \nu''' m' m'' + \nu'' (m' n'' + m'' n') + \nu' n' n'',$$

für

$$\mu' = 2m(m + n - 3) + \tau,$$
$$\mu'' = \nu' = 2m(m + 2n - 5) + 2\tau,$$
$$\mu''' = \nu'' = 2n(2m + n - 5) + 2\delta,$$
$$\nu''' = 2n(m + n - 3) + \delta.$$

Diese Zahlen drücken die Anzahl von Kegelschnitten aus, welche bestimmt sind respective durch die Bedingungen der zweifachen Berührung einer Curve und drei Punkte, oder zwei Punkte und eine Tangente, einen Punkt und zwei Tangenten, oder endlich drei Tangenten.

Es ist unnöthig, den Fall (1, 1), (1, 1) besonders zu betrachten (vergl. Art. 392.) und wir bemerken nur, dass dieselben Principien auf die Fälle (3), (1) und (4) anwendbar sind.

Wir verweisen für weitere Details auf die Abhandlungen von Zeuthen und Cayley[95]) und theilen nur noch die folgende Tafel mit, in welcher Cayley die einfacheren Resultate mit Hilfe der Charaktere m, n und α $(= 3m + \iota = 3n + \varkappa$, Art. 83.) zusammengestellt hat.

(1, 1, 1)
$$\mu' = \tfrac{2}{3} m^3 + 2m^2 n + mn^2 + \tfrac{1}{6} n^3 - 2m^2 - 3mn - \tfrac{1}{2} n^2 - \tfrac{20}{3} m - \tfrac{29}{3} n + \alpha\left(-3m - \tfrac{3}{2} n + 13\right),$$

$$\nu' = \tfrac{1}{3} m^3 + 2m^2 n + 2mn^2 + \tfrac{1}{3} n^3 - m^2 - 4mn - n^2 - \tfrac{46}{3} m - \tfrac{46}{3} n + \alpha(-3m - 3n + 20),$$

$$\varrho' = \tfrac{1}{6} m^3 + m^2 n + 2mn^2 + \tfrac{2}{3} n^3 - \tfrac{1}{2} m^2 - 3mn - 2n^2 - \tfrac{29}{3} m - \tfrac{20}{3} n + \alpha\left(-\tfrac{3}{2} m - 3n + 13\right);$$

(1, 1, 1, 1)
$$\mu = \tfrac{1}{12} m^4 + \tfrac{2}{3} m^3 n + m^2 n^2 + \tfrac{1}{3} mn^3 + \tfrac{1}{24} n^4 - \tfrac{1}{2} m^3 - 3m^2 n - 2mn^2 - \tfrac{1}{4} n^3 - \tfrac{181}{12} m^2 - 21mn - \tfrac{229}{24} n^2 + \tfrac{191}{2} m + \tfrac{403}{4} n + \alpha\left(-\tfrac{3}{2} m^2 - 3mn - \tfrac{3}{4} n^2 + \tfrac{43}{2} m + \tfrac{55}{4} n - \tfrac{357}{4}\right) + \tfrac{9}{8} \alpha^2,$$

$$\nu = \tfrac{1}{24} m^4 + \tfrac{1}{3} m^3 n + m^2 n^2 + \tfrac{2}{3} mn^3 + \tfrac{1}{12} n^4 - \tfrac{1}{4} m^3 - 2m^2 n - 3mn^2 - \tfrac{1}{2} n^3 - \tfrac{229}{24} m^2 - 21mn - \tfrac{181}{12} n^2 + \tfrac{403}{4} m + \tfrac{191}{2} n + \alpha\left(-\tfrac{3}{4} m^2 - 3mn - \tfrac{3}{2} n^2 + \tfrac{55}{4} m + \tfrac{43}{2} n - \tfrac{357}{4}\right) + \tfrac{9}{8} \alpha^2;$$

$$(2)\qquad \mu'' = \alpha,\ \nu'' = 2\alpha,\ \varrho'' = 2\alpha,\ \sigma'' = \alpha;$$

$$(2, 1)\qquad \mu' = 12m + 12n + \alpha(2m + n - 14),$$
$$\nu' = 24m + 24n + \alpha(2m + 2n - 24),$$
$$\varrho' = 12m + 12n + \alpha(m + 2n - 14);$$

$$(2, 1, 1)\qquad \mu = 24m^2 + 36mn + 12n^2 - 168m - 168n$$
$$+ \alpha(m^2 + 2mn + \tfrac{1}{2}n^2 - 25m - \tfrac{29}{2}n + 138) - \tfrac{3}{2}\alpha^2,$$
$$\nu = 12m^2 + 36mn + 24n^2 - 168m - 168n$$
$$+ \alpha(\tfrac{1}{2}m^2 + 2mn + n^2 - \tfrac{29}{2}m - 25n + 138) - \tfrac{3}{2}\alpha^2;$$

$$(2, 2)\qquad \mu = 27m + 24n - 20\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$
$$\nu = 24m + 27n - 20\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha^2;$$

$$(3)\qquad \mu' = -4m - 3n + 3\alpha,$$
$$\nu' = -8m - 8n + 6\alpha,$$
$$\varrho' = -3m - 4n + 3\alpha;$$

$$(3, 1)\qquad \mu = -8m^2 - 12mn - 3n^2 + 56m + 53n$$
$$+ \alpha(6m + 3n - 39),$$
$$\nu = -3m^2 - 12mn - 8n^2 + 53m + 56n$$
$$+ \alpha(3m + 6n - 39);$$

$$(4)\qquad \mu = -10m - 8n + 6\alpha,\ \nu = -8m - 10n + 6\alpha.$$

400. Es bleibt noch übrig, Formeln für die Zahl von Kegelschnitten zu geben, welche fünf untrennbaren Bedingungen genügen, wie z. B. (5), d. h. die Zahl von Kegelschnitten, die eine Berührung fünfter Ordnung mit einer gegebenen Curve haben. Diese Zahlen werden durch Untersuchung des Falles bestimmt, in welchem eine von den Kegelschnitten des Systems berührte Curve in zwei andere Curven zerfällt. So z. B. werden die in-Berührung fünfter Ordnung mit einer in zwei Curven zerfallenen Curve stehenden von den Kegelschnitten gebildet, welche die gleichartige Berührung mit der einen respective der andern Theilcurve eingehen und der Ausdruck für (5) muss daher eine solche Function von m, n und α sein, dass man hat

$$\Phi(m + m', n + n', \alpha + \alpha') = \Phi(m, n, \alpha) + \Phi(m', n', \alpha'),$$

d. h. von der Form

$$am + bn + c\alpha.$$

Nun muss aus Gründen der Symmetrie $a = b$ sein und aus der Zahl der sechspunktig berührenden Kegelschnitte für die

Curven dritter Ordnung können a und c bestimmt werden; man findet

$$(5) = -15m - 15n + 9\alpha.$$

Die Kegelschnitte (4, 1) für die zusammengesetzte Curve werden von denen, welche dieselbe Art der Berührung mit den Theilcurven haben, und von den anderen gebildet, welche mit der einen von diesen eine Berührung vierter Ordnung und mit der andern eine einfache Berührung haben. Da die Zahl der Kegelschnitte der letzten Gruppe durch die Formeln des vorigen Art. bestimmt ist, so ist

$$\Phi(m + m', n + n', \alpha + \alpha') - \Phi(m, n, \alpha) - \Phi(m', n', \alpha')$$

eine bekannte Function von m, n, α.

Mittelst des so erläuterten Verfahrens wurde von Cayley die folgende Tafel begründet

$$\begin{aligned}
(4, 1) &= -8m^2 - 20mn - 8n^2 + 104(m + n) \\
&\qquad + 6\alpha(m + n - 11); \\
(3, 2) &= 120(m + n) + \alpha(-4m - 4n - 78) + 3\alpha^2; \\
(3, 1, 1) &= -\tfrac{3}{2}m^3 - 10m^2n - 10mn^2 - \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{109}{2}m^2 \\
&\quad + 116mn + \tfrac{109}{2}n^2 - 434(m + n) \\
&\quad + \alpha(\tfrac{3}{2}m^2 + 6mn + \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{69}{2}m - \tfrac{69}{2}n + 291) - \tfrac{9}{2}\alpha^2; \\
(2, 2, 1) &= 24m^2 + 54mn + 24n^2 - 468(m + n) \\
&\quad + \alpha(-8m - 8n + 327) + \alpha^2(\tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}n - 12); \\
(2, 1, 1, 1) &= 6m^3 + 30m^2n + 30mn^2 + 6n^3 \\
&\quad - 17n(m + n)^2 + 1320(m + n) \\
&\quad + \alpha\{\tfrac{1}{6}m^3 + m^2n + mn^2 + \tfrac{1}{6}n^3 - \tfrac{15}{2}m^2 - 26mn \\
&\quad - \tfrac{15}{2}n^2 + \tfrac{358}{3}(m + n) - 960\} \\
&\quad + \alpha^2(-\tfrac{3}{2}m - \tfrac{3}{2}n + 28); \\
(1, 1, 1, 1, 1) &= \tfrac{1}{120}(m^5 + n^5) + \tfrac{1}{12}mn(m^3 + n^3) + \tfrac{1}{3}m^2n^2(m + n) \\
&\quad - 2m^2n^2 - \tfrac{1}{12}(m^4 + n^4) - \tfrac{5}{6}mn(m^2 + n^2) \\
&\quad - 2m^2n^2 - \tfrac{113}{25}(m^3 + n^3) - \tfrac{209}{12}mn(m + n) \\
&\quad + \tfrac{1267}{12}(m^2 + n^2) + \tfrac{593}{3}mn - \tfrac{3159}{5}(m + n) \\
&\quad + \alpha(-\tfrac{1}{4}m^3 - \tfrac{3}{2}m^2n - \tfrac{3}{2}mn^2 - \tfrac{1}{4}n^3 + \tfrac{29}{4}m^2 \\
&\quad + 23mn + \tfrac{29}{4}n^2 - \tfrac{337}{4}m - \tfrac{337}{4}n + 486) \\
&\quad + \alpha^2\{\tfrac{9}{8}(m + n) - 15\}.
\end{aligned}$$

Von Zeuthen und Cayley sind auch Formeln gebildet worden für die Fälle, in welchen die Berührung mit einer Curve in gegebenem Punkte vorgeschrieben ist. Cayley's

Abhandlung enthält endlich Untersuchungen über eine Formel von de Jonquières[96]), welche die Zahl von Curven der r^{ten} Ordnung angiebt, die mit einer gegebenen Curve m^{ter} Ordnung t Berührungen von den respectiven Ordnungen a, b, c eingeht und überdiess p Punkte der Curve enthält. Der Gegenstand kann seiner Ausdehnung wegen hier nicht wohl weiter entwickelt werden.

Literatur-Nachweisungen und Zusätze.

Zu Kap. I. S. 1—14.

1) S. 12, Art. 22 u. 23. Für diese Coordinaten-Entwickelung vergleiche man die Abhandlung des Herausgebers in „Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft zu Zürich" Bd. 15, p. 152 f., sowie seine „Darstellende Geometrie" Art. 133 f. und Art. 141. Dazu für die Grundidee v. Staudt „Beiträge" 2. Heft (1857) § 29, p. 261—267 und W. Hamilton „Elements of Quaternions" (London 1866) p. 24 u. 62.

Ein Beispiel für den Gebrauch der allgemeinen Transformationsgesetze findet man im Text, p. 50 unter 2.

Sonst ist das Kapitel „Von den Coordinaten" im Wesentlichen ein Beitrag von Prof. A. Cayley zum Original.

Zu Kap. II. S. 15—78.

Zu Art. 31 mag ausser Art. 32 das folgende Beispiel angeführt werden. In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Achteck 12..8 schneiden sich die zwei Reihen abwechselnder Seiten 12, 34, 56, 78 und 23, 45, 67, 81 ausser in den Ecken in acht Punkten eines neuen Kegelschnitts.

2) S. 25, Art. 34. Euler (vgl. Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1748 „Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes") scheint zuerst die Paradoxie bemerkt zu haben, dass zwei Curven n^{ter} Ordnung sich in einer grössern Zahl von Punkten schneiden, als zur Bestimmung einer solchen Curve nöthig sind. Cramer hat dieselbe Bemerkung in seiner im Jahre 1750 veröffentlichten „Introduction à l'Analyse des Lignes courbes algébriques". Aber man hat erst in viel späterer Zeit die wichtigen geometrischen Sätze erkannt, welche daraus entspringen. Von Lamé ward der Begriff des Curvenbüschels durch n^2 Grundpunkte gebildet. („Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problémes de géométrie" 1818 p. 28.) 1827 gab Gergonne den Satz des Art. 31 („Annales" Bd. 17, p. 220); um dieselbe Zeit Plücker („Entwickelungen" Bd. 1, p. 228 und „Gergonne's Annalen" Bd. 19, p. 97, 129) den allgemeinen Satz des Art. 30. Einige Jahre später wurden die Fälle der Beziehung erörtert, welche zwischen den Durchschnittspunkten von Curven und Flächen verschiedener Ordnungen besteht wie in Art. 33; es geschah in zwei gleichzeitig zur Veröffentlichung eingesendeten Arbeiten durch Jacobi („Crelle's Journal" Bd. 15, p. 285) und Plücker (ibid. Bd. 16, p. 47). Ausser diesen Arbeiten mag man eine Abhandlung von Cayley im „Cambridge Math. Journ.", Bd. 3, p. 211 zu Rathe ziehen.

2*) S. 31, Art. 40; der Abriss von den Formen der dreifachen Punkte rührt von A. Cayley her.

3) S. 34, Art. 43. In der ersten Ausgabe war die Zahl $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ als Grenze angegeben. Anstatt das allgemeine Kriterium anzuwenden, wurde die Frage direct untersucht wie folgt: Durch den gegebenen vielfachen Punkt und $\frac{1}{2}n(n-3)-1$ andre Punkte der Curve kann eine Curve von der Ordnung $n-3$ gelegt werden, für welche der vielfache Punkt als $n-2$ gezählt und die angenommenen Punkte $\frac{1}{2}(n+2)(n-3)$ Durchschnitte mit der Originalcurve ausmachen, so dass durch Subtraction von $n(n-3)$ andre Durchschnittspunkte in Zahl $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ übrig bleiben, welches eine Grenze für die Zahl angenommener Punkte ist, die Doppelpunkte sein können. Wir erhalten aber nach dem allgemeinen Kriterium die niedrigere Grenze, indem wir eine Curve von der Ordnung $n-3$ beschreiben, welche den gegebenen vielfachen Punkt als $(n-4)$ fachen Punkt enthält, so dass er nach Art. 41 für sie $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ Bedingungen repräsentiert und noch $2(n-3)$ Punkte zur Bestimmung der Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung anzunehmen bleiben.

Und da der vielfache Punkt unter den Schnittpunkten dieser und der ursprünglichen Curve $(n-2)(n-4)$ fach zählt, so bleiben ausser den angenommenen Punkten nur $n-2$ andere Durchschnittspunkte übrig.

S. 34, Art. 44. Vergl. die Abhandlungen von Clebsch „Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie“ in „Crelle's Journal“ Bd. 53, p. 189 f. und ibid. Bd. 54, p. 43 f. (über die Curven vom Geschlecht Null). Hierzu auch Haase in Bd. 2, p. 515 der „Mathemat. Annalen“. Die Ausdrücke Defect und Unicursalcurve führte Cayley ein in seiner Abhandlung „On the Transformation of plane Curves“ „London Mathem.-Society“ Oct. 1865. Siehe Note 14 unten.

S. 39, Art. 47 entwickelt Ansichten A. Cayley's.

4) S. 47, Art 54. Vergl. Gregory's Examples, p. 170 f.

5) S. 50, Art. 55. Vergl. Gregory's Examples, chap. XI; oder die ursprüngliche Quelle: Cramer's „Introduction“. Zu Aufg. 5 vergleiche man Sidler „Trisection eines Kreisbogens und die Kreisconchoide“ in den „Mittheilungen der naturforsch. Gesellschaft von Bern“ 1873.

Das Beispiel 6, p. 52 ist von Cayley. Das Beispiel zeigt sehr deutlich den Formenwandel einer Curve vierter Ordnung. Geht man von Figur 22 aus, so kann man durch Auflösung der Knoten die übrigen Figuren ableiten; wir wollen bemerken, dass die Fig. 21 mit etwas mehr nach den Coordinatenaxen hinreichenden Ovalen uns ein Bild von einer Curve vierter Ordnung mit 28 reellen Doppeltangenten geben würde (vergleiche p. 269); die gegen den Punkt O hinliegenden Concavitäten der vier Ovale sind in der vorliegenden Figur nicht erkennbar. In ähnlicher Weise kann man die Formen der Curven dritter Ordnung schematisch ableiten aus der Figur von einem Kegelschnitt und einer ihn schneidenden Geraden.

6) S. 53, Art. 56. Vergl. in „Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum“ (Opuscul. ed. Castillon, Bd. 1, p. 37) den Abschnitt „De reductione affectarum equationum“. Newton giebt jedoch die Regel in einer von der des Textes abweichenden Form. Man sehe auch eine Abhandlung von de Morgan in „Quarterly Journal“ Bd. 1, p. 1 oder „Transactions of the Cambridge Philos. Society“ Bd. 11, p. 608.

7) S. 56, Art. 58. Cayley „Quarterly Journal“ Bd. 7, p. 212 und „Crelle's Journal“ Bd. 64, p. 369. Die Art. 56—58 rühren von ihm her.

8) S. 60, Art. 59—62. Für die Theorie der Polaren vergleiche man Grassmann „Theorie der Centralen“ im 24. Bd. von „Crelles' Journal“ und Bobillier, „Théorèmes sur les polaires successives“ in „Gergonnes' Annalen“ Bd. 19, p. 305. Von dem Letzteren rührt z. B. der Satz über die $(n-1)^2$ Pole einer Geraden her. Mit dem unendlich fernen Punkt der Axe y als Pol finden wir die Polaren der verschiedenen Ordnungen als Diameter bei Cramer (1750) wie schon die gerade Polare bei Newton. Vgl. Kap. IV, Note 21. Unter den neueren Darstellungen heben wir hervor den 2. Abschn. in Cremona's „Introduzione ad una Teoria geom. delle curve piane“.

9) S. 63, Art. 67. Nach Poncelet ist Waring der Erste gewesen, der die Frage nach der Zahl von Tangenten untersucht hat, welche von einem Punkte aus an eine Curve n^{ter} Ordnung gehen. („Miscellanea Analytica“ p 100.) Poncelet selbst zeigte im 8. Bd. von „Gergonne's Annalen“ p. 213, dass die Berührungspunkte auf einer Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung liegen und dass ihre Anzahl nicht grösser sein kann als $n(n-1)$. Daraus entsprang das Poncelet'sche Paradoxon oder die Frage, wie die Reciproke der Reciproken einer Curve n^{ter} Ordnung von der Ordnung

$$n(n-1)\left\{n(n-1)-1\right\}$$

auf die n^{te} Ordnung zurückkäme? oder, wie an die Reciproke einer Curve n^{ter} Ordnung, obwohl dieselbe von der Ordnung $n(n-1)$ ist, nur n Tangenten von einem Punkte aus möglich sind? Plücker gab darauf zuerst die vollständige Antwort (vergl. „Crelle's Journal“ Bd. 12, p. 107 von 1834; oder seine „Theorie der algebraischen Curven“ 1839), indem er die Zahl der Wendepunkte direct bestimmte und den Einfluss der Doppel- und Rückkehrpunkte feststellte; in Verbindung mit dem Princip der Dualität war damit die Gruppe der Plücker'schen Gleichungen in Art. 81 begründet.

10) S. 66, Art. 70. Nach dem Vorschlage von Sylvester „On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions“ in „Philosoph. Transact.“ Bd. 143 p. 545.

11) ibid. Nach dem Vorschlage von Cremona in seiner „Introduzione“ p. 68. Steiner selbst brauchte den Namen Kerncurve. Siehe „Allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven“ „Crelle's Journal“ Bd. 47, p. 1—6. Wir heben hervor, wie in den Definitionen der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve durch das eindeutige Entsprechen ihrer Punkte auf die birationalen Transformationen hingewiesen ist, die wir später entwickeln. Vergl. Clebsch „Ueber einige von Steiner behandelte Curven“ in Bd. 64 p. 288 von „Crelles' Journal“.

12) S. 69, Art. 74. Vergl. Hesse „Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung“ in „Crelle's Journal“ Bd. 28, p. 104. Den Einfluss eines Rückkehrpunktes auf die Zahl der Inflexionen (Art. 77) bestimmte Cayley in „Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes“ in „Crelle's Journal“ Bd. 34, p. 43.

13) S. 76, Art. 81. Man vergleiche Plücker's „Theorie der algebraischen Curven“ 2. Abschn., insbesondere § 4. Für das Poncelet'sche Paradoxon giebt Plücker hier das Beispiel einer Curve siebenter Ordnung mit drei Doppelpunkten und vier Spitzen; sie ist von der Classe 24 und hat 55 Inflexionen und 190 Doppeltangenten, aus denen 55 Spitzen und 190 Doppelpunkte der reciproken Curve hervorgehen, deren Ordnung dadurch von 24. 23 oder 552 auf 552 — 2. 190 — 3. 55 = 552 — 545 = 7 erniedrigt wird.

14) S. 78, Art. 83. Der Satz über die Unveränderlichkeit des Geschlechts ist enthalten in Riemann's „Theorie der Abel'schen

Functionen" § 12 („Crelle's Journal" Bd. 54, p. 133. 1857); ward aber erst durch Clebsch „Ueber die Singularitäten algebraischer Curven" (ibid. Bd. 64, p. 98. 1864) für die Curventheorie fruchtbar gemacht.

Der hier mitgetheilte Beweis ist zuerst von Bertini in „Battaglini's Giornale" Bd. 7, p. 105, bald nachher wesentlich gleichartig von Zeuthen in „Mathem. Annalen" Bd. 2, p. 150 gegeben worden. Zeuthen bewiess in derselben Art die allgemeinere Relation

$$t - t' = 2\alpha' (D - 1) - 2\alpha (D' - 1)$$

für den Fall, dass α Punkte der Curve S einem Punkte in S' und α' Punkte der Curve S' einem Punkte der Curve S entsprechen und dass t, t' die respectiven Anzahlen der Punkte bezeichnen, in welchen zwei von diesen α oder α' Punkten vereinigt sind.

Einen directen Beweis für den Fall, wo die Curven des einen Systems, die den geraden Linien des andern entsprechen, keine andern vielfachen Punkte als Doppelpunkte enthalten, findet man in Clebsch-Gordan's „Theorie der Abel'schen Functionen" p. 54.

Zu Kap. III. S. 79—127.

Für Kap. III ist ein Manuscript von Cayley über die Enveloppen mit Einschluss der Theorie der Evoluten, Quasi-Evolnten und Parallelcurven benutzt worden.

15) S. 84, Art. 86. Vergl. meine Ausgabe von Salmon's „Analyt. Geometrie des Raumes" Bd. 2, Art. 319. In dem hier discutirten Beispiele bestätigt

$$\delta + \varkappa = (n-2)\left\{2(n-3)+3\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{2(n-1)-1\right\}\left\{2(n-1)-2\right\},$$

dass die Enveloppe vom Geschlecht Null ist.

Art. 87—89, S. 85—88 rühren von Cayley her.

15*) S. 89, Art. 90. Die Reciproke der Reciproken ist die ursprüngliche Curve mit einem Factor multipliciert, dessen Bedeutung Plücker nachgewiesen hat. Ersetzt man aber in der Gleichung der Reciproken die Variabeln durch die Differentialquotienten der Originalcurve, so ist auch diess Resultat durch die ursprüngliche Function theilbar und giebt das dualistisch entsprechende Resultat, dass die durch den andern Factor dargestellte Curve die dreifach zu rechnenden Wendepunkte und die Berührungspunkte der Doppeltangenten aus der ursprünglichen Curve herausschneidet. Pasch hat diess in einer Note im 74. Bd. p. 92 von „Crelle's Journal" algebraisch dargestellt. Vergleiche auch Cayley's Abhandlung zur Theorie der Doppeltangenten in „Philosophical Transactions" Bd. 149, p. 193.

15**) S. 96, Art. 98. Wir citieren hier zur Vergleichung Bischoff's Abhandlung im 56. Bd. von „Crelle's Journal" p. 166 und dazu Gundelfinger's Durchführung einzelner unerledigt gebliebener Punkte ibid. Bd. 73, p. 171.

15***) S. 114, Art. 114. Die Bedingung für die concyklische Lage von vier aufeinanderfolgenden Punkten einer Curve kann direct aus dem Werthe des Krümmungsradius in Art. 102 abgeleitet werden, indem man ihr Differential unter der Bedingung

$$U_1 dx + U_2 dy = 0$$

bildet und mit Null gleichsetzt.

16) S. 115, Art. 115. Die Theorie der Brennlinien wurde zuerst aufgestellt von Tschirnhausen „Acta Eruditorum" 1682. Die in Art. 116 entwickelte Idee von Quetelet siehe zuerst in „Nou-

veaux Mémoires de l'académie de Bruxelles" Bd. 3 u. 5. Vergl. auch Cayley's „Memoir upon Caustics" im 147. Bd. der „Philosophical Transactions" p. 273, und Emil Weyr „Ueber die Identität der Brennlinien mit den Evoluten der Fusspunktcurven" in „Zeitschrift f. Mathem." 1869, p. 376 und „Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven" in „Wiener Berichte" 1869, p. 169.

17) S. 118, Art. 117. Der mitgetheilte Beweis ist von Dr. Atkins.

18) S. 126, Art. 123. Für eine Lösung desselben Problems von A. Cayley vergleiche man die „Analyt. Geom. des Raumes" Bd. 2.

Zu Kap. IV. S. 128—153.

19) S. 128, Art. 124. Der Satz ist von Newton zuerst gegeben in seiner „Enumeratio linearum tertii ordinis".

20) S. 131, Art. 126. Carnot „Géométrie de position" p. 437. Vergl. Plücker's „System der analytischen Geometrie" p. 44 f. Wir wollen anmerken, dass der Satz von Carnot uns Mittel bietet zur Construction des Krümmungskreises einer Curve.

21) S. 133, Art. 128. In „Enumeratio linearum tertii ordinis" 1706.

21*) S. 137, Art. 132. Wir nennen hier die wichtige Abhandlung Steiner's „Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven sowie über geradlinige Transversalen der Letzteren" im 47. Bd. von „Crelle's Journal" p. 7—108. Verschiedene Gruppen der Steiner'schen Resultate sind abgeleitet in de Jonquières' Abhandlung in Bd. 59, p. 313, und besonders in Güssfeldt's Arbeit im 2. Bd. der „Mathemat. Annalen" p. 65—127. Für das auf Curven 3. Ordnung Bezügliche vergleiche Art. 171 f. des Textes.

22) S. 137, Art. 133. Cotes „Harmonia mensurarum" 1722.

23) S. 139, Art. 137. Mac Laurin „De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus"; mit der 5. Ausgabe seiner Algebra veröffentlicht.

24) S. 141, Art. 138. Vergl. „Quetelet, Correspondence" Bd. 6, p. 8.

25) S. 141, Art. 139. Vergl. Plücker in „Crelle's Journal" Bd. 10, p. 84.

Die Art. 138, 139, 151 rühren von Cayley her.

26) S. 153, Art. 147. Dieser Beweis des Miquel'schen Satzes ist von Clifford gegeben worden. Vergleiche „Messenger of Mathem." Bd. 5, p. 137, und „Educational Times" December 1870. Die Reihe dieser Sätze ist unbegrenzt: Einem System von $2\mu + 1$ Geraden entspricht in dieser Weise ein Kreis.

Zur analytischen Behandlung der Brennpunkte vergleiche man die Abhandlung von Siebeck im 64. Bd. von „Crelle's Journal" p. 178.

Zu Kap. V. S. 154—260.

27) S. 159, Art. 152. Mac Laurin „De linearum geometricarum etc." (Note 23). Eine französische Uebersetzung des „Tractatus" mit Noten und Zusätzen findet man in E. de Jonquières „Mélanges de géométrie pure" 1856, p. 197—261.

Sylvester's Theorie der Reste ist dem Autor durch ein Manuscript von Cayley bekannt geworden. Vergleiche den Zusatz auf S. 469.

28) S. 168, Art. 162. Siehe „Cambridge and Dublin Mathem. Journal" Bd. 6, p. 181 (1851). Das Kegelschnittbüschel $S - \lambda S' = 0$ und das Strahlenbüschel $A - \lambda A' = 0$ erzeugen die Curve dritter Ordnung $A'S - AS' = 0$ durch den Schnitt ihrer entsprechenden

Elemente; daraus entspringt die Construction der Curve durch 9 gegebene Punkte 1, 2, . . . 9: Man legt durch 1, 2, 3, 4 die Kegelschnitte nach 5, 6, 7, 8, 9 und bestimmt einen Punkt P so, dass das Strahlenbüschel (P. 5 6 7 8 9) dem Büschel jener fünf Kegelschnitte projectivisch ist — als den vierten Schnittpunkt von zwei Kegelschnitten, wie leicht ersichtlich. Für 1, 2, . . . 9 als Schnittpunkte zweier Curven dritter Ordnung wird die Construction unbestimmt, indem diese Kegelschnitte sich decken. Sind acht dieser Punkte gegeben, so bestimmen wir die Doppelverhältnisse der zwei Gruppen von vier Kegelschnitten 1 2 3 4 (5, 6, 7, 8) und 1 2 3 5 (4, 6, 7, 8) und dann den Punkt 9 so, dass die Strahlenbüschel 9 (5, 6, 7, 8) und 9 (4, 6, 7, 8) respective die nämlichen Doppelverhältnisse haben, denn dann liegen 1, 2, 3, 4, 5 und 9 auf demselben Kegelschnitt.

Für die linearen Constructionen algebraischer Curven vergleiche man Chasles' Abhandlungen in den „Comptes rendus", Bd. 36, 36, 41, 45; und E. de Jonquières darauf gegründeten „Essai urs la génération des Courbes géométriques" (1858) sowie die schon genannten „Mélanges" von 1856, p. 182 f. Zu den allgemeinen Eigenschaften, auf denen sie beruhen, die Note von Olivier im 70. Bd. von „Crelles Journal" p. 156.

29) S. 176, Art. 168. Vergleiche „Théorèmes sur les courbes de troisième degrés" im 42. Bd. von „Crelle's Journal" p. 274 (1851). Für

$$ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4 = 0$$

als die kanonische Form der biquadratischen Gleichung ist die Discriminante $S^3 - 27T^2$ (vergl. „Vorlesungen" Art. 138, p. 209) $ae(ac - 9e^2)^2$, und da das Zeichen der Discriminante durch lineare Transformationen nicht geändert wird, so sind nothwendig das a und e der kanonischen Form bei positiver Discriminante von gleichem und bei negativer von ungleichem Zeichen. Aber

$$ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$$

zerfällt offenbar in Factoren von der Form

$$(x^2 + \lambda y^2)(x^2 + \mu y^2) \text{ oder } (x^2 - \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2)$$

d. h. die biquadratische Gleichung hat entweder vier imaginäre oder vier reelle Wurzeln. Dagegen giebt die Zerfällung von

$$ax^4 + 6cx^2y^2 - ey^4 \text{ stets } (x^2 + \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2)$$

oder zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Diess letztere findet also immer statt, wenn $S^3 < 27T^2$ und das erstere Entwederoder im entgegengesetzten Falle. Vergl. Art. 230 des Textes. Cremona hat in einem Beitrag zum 2. Bd des „Giornale Battaglini" (1864) p. 78 diese characteristischen Unterschiede zwischen den Formen der Curven dritter Ordnung entwickelt.

30) S. 177, Art. 169. Die betreffenden Entwickelungen trug Dr. Hart zur ersten Originalausgabe dieses Werkes bei.

31) S. 178, Art. 171. Es ist der 9. Satz des 3. Abschnittes des Tractatus.

32) S. 180, Art. 174. Die im Texte befolgte Beweismethode ist von Dr. Hart. Der wichtige Satz rührt von Hesse her, welcher zeigte, dass für $U = 0$ als Gleichung einer Curve dritter Ordnung und $H = 0$ als ihre Inflexionsdeterminante (Art. 70) für alle Curven des Büschels $aU + bH = 0$ die Inflexionsdeterminante in der gleichen Form ausdrückbar ist. Siehe „Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung" in „Crelle's Journal" Bd. 28, p. 104 (1844).

Der Satz über die Gruppirung der Inflexionspunkte in Art. 175 ist ebenfalls von Hesse gegeben; siehe „Eigenschaften der Wende-

punkte der Curven dritter Ordnung“ in „Crelle's Journal“ Bd. 38, p. 257.

33) S. 184, Art. 178. Cayley selbst bezeichnete sie mit dem Buchstaben P und nannte sie die Pippian. Vergl. seine wichtige Abhandlung „A Memoir on Curves of the third order“ im 147. Bd. der „Philosophical Transactions“ p. 415–446 (1857) und dazu die Vorläufer derselben „Mémoire sur les Courbes du troisième ordre“ und „Nouvelles Remarques sur les Courbes du troisième ordre“ im 9. und 10. Bd. von „Liouville's Journal“ (1844–1845).

34) S. 199, Art. 194. Für eine vollständigere Entwickelung dieser Theorie sehe man Cayley's Abhandlungen „On a case of the involution of cubic curves“ und „On the classification of cubic curves“ in „Transactions of Cambridge Philosoph. Society“ Bd 11, p. 39–128.

34*) S. 199, Art. 196. Dem in Note 28) Erwähnten fügen wir hier am Eingang der Classification und Formenübersicht noch Folgendes über die Literatur der geometrischen Constructionen der Curven dritter Ordnung hinzu: 1. Grassmann über die lineale Erzeugung der Curven dritter Ordnung in Bd. 52, p. 254 von „Crelle's Journal“ (1856). Ein Punkt bewegt sich so, dass seine Verbindungslinien mit drei festen Punkten A, B, C drei feste Gerade a, b, c respective in Punkten schneiden, welche in einer geraden Linie liegen.

2. Zwei involutorische Strahlenbüschel, deren Paare sich projectivisch entsprechen, erzeugen als Ort der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen eine durch ihre Scheitel gehende Curve dritter Ordnung, wenn ihr gemeinschaftlicher Strahl zu zwei entsprechenden Paaren gehört. Diese zu sehr bequemen Constructionen führende Erzeugungsweise wurde durch die Untersuchung der besonderen Curve dritter Ordnung zuerst erhalten, welche die Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bilden, zuerst von Cremona in einer im 23. Bd. der „Nouvelles Annales“ p. 23 (1864) mitgetheilten Note; vergleiche Siebeck's in Note 26) oben citierte Abhandlung (1865), besonders p. 178; sodann vom Herausgeber in der 2. Ausgabe der „Kegelschnitte“. Neuerdings ist sie ausführlich behandelt worden von Schröter „Mathemat. Annalen“ Bd. 5, p. 50 und Bd. 6, p. 85. und von Durège ibid Bd. 5, p. 83. Siehe endlich auch die vergleichende kurze Darstellung von Clebsch ibid. Bd. 5, p. 423.

35) S. 202, Art. 197. Newton „Enumeratio linearum tertii ordinis“ (1706) p. 19.

36) S. 202, Art. 198. Chasles (Deutsche Ausgabe des „Aperçu historique“.) „Geschichte der Geometrie“ p. 143 und Note XX, p. 367.

37) S. 211, Art. 206. Newton benannte die erste als inscribed, die zweite circumscribed und die dritte ambigenous hyberbola.

38) S. 217, Art. 211. Die Newton'sche Classification ist in der unter 34) citierten Abhandlung Cayley's neuerdings gründlich dargestellt und namentlich auch mit Plücker's Gruppeneintheilung verglichen worden.

39) S. 220, Art. 212. Wir nennen als von selbständiger Bedeutung in der Reihe der Classificationen die Abhandlung von G. Bellavitis „Sulla classificazione delle curve del terzo ordine“ im 25. Bd. (2. Thl.) der Abhandlungen der „Società italiana delle scienze residente in Modena“ 1851, und Möbius „Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung“ in den „Abhandlungen der k. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften“ eine Begründung der übersichtlichen Eintheilung Salmon's — obwohl aus demselben Jahre — aus der Natur einfacher Lagenverhältnisse. Vergl. zu derselben Cayley's Abhandlung „On cubic cones and curves“ in „Trans-

actions of Cambridge Philosoph. Society" Bd. 11, p. 129 – 144 (1865).

40) S. 226, Art. 215. S. Lardner's „Algebraic Geometry" p. 196, 472.

40*) S. 228, Art. 217. Ausführungen in einer Abhandlung von Durège im 1. Bd. der „Mathemat. Annalen" p. 509.

41) S. 229, Art. 218. In den Abhandlungen von Cayley sind die Coefficienten von y^2z, z^2x, x^2y, yz^2, zx^2, xy^2 respective durch f, g, h, i, j, k bezeichnet, in neueren deutschen Arbeiten ist die Indicesbezeichnung bei den Variabeln und den Coefficienten consequent durchgeführt, sodass die in Rede stehenden heissen

$$a_{223},\ a_{331},\ a_{112},\ a_{233},\ a_{311},\ a_{122}.$$

Jenes ist kürzer, dieses bezeichnet ohne Belastung des Gedächtnisses den Platz jedes Coefficienten im entwickelten Ausdruck der Function. Für unsern Text erschien ein Mittelweg empfehlenswerth; die gewählte Bezeichnung stimmt für die hervorgehobenen Glieder mit der der deutschen Arbeiten überein, wenn man a_{11}, a_{22}, a_{33} durch a, b, c ersetzt und den dritten Index anhängt; und die Coefficienten von x_1^3, x_2^3, x_3^3 lassen sich nach demselben Princip durch a_1, b_2, c_3 oder zu noch weiterer Verkürzung durch a, b, c darstellen.

42) S. 232, Art. 221. In der That sind die Methoden von Aronhold und von Cayley nicht im Wesen, sondern nur in der Ausdrucksform verschieden. Wir wollen diess hier kurz ausführen. Wenn die ternären Functionen dritten, vierten, etc. Grades durch

$$\Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l,\ \Sigma a_{iklm} x_i x_k x_l x_m,$$

etc. bezeichnet werden, wo i, k, l, m alle Werthe 1, 2, 3 erhalten, so dass wegen $a_{iik} = a_{iki} = a_{kii}$, die Function mit den numerischen Coefficienten des Binominaltheorems erscheint, so kann man mit Aronhold und Clebsch sie als die Potenz des linearen Polynoms $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots)^n$ symbolisch darstellen; symbolisch in dem Sinne, dass nach der Entwickelung die Producte $a_i a_k a_l$, etc. durch die a_{ikl} etc. ersetzt werden. Dieselbe cubische Form kann aber gleichmässig auch durch

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^3,\ (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^3,$$

etc. ausgedrückt werden, wenn man für die $b_1 b_1 b_1$, $c_1 c_1 c_2$, etc. ebenfalls die a_{111}, a_{112}, etc. nach der Entwickelung substituiert. Nun geht die Regel zur Bildung von Invarianten von Aronhold dahin, dass man das Product einer Anzahl von Determinanten bilde, deren Elemente die Zeichen a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, etc. sind, und nach der Multiplication für die $a_i\, a_k\, a_l$, $b_m\, b_n\, b_p$, etc. die Coefficienten a_{ikl}, a_{mnp}, etc. ansetze; so bildete er zuerst die Fundamental-Invariante S der ternären cubischen Form durch das Product der vier Determinanten

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3,\ \Sigma \pm b_1 c_2 d_3,\ \Sigma \pm c_1 d_2 a_3,\ \Sigma \pm d_1 a_2 b_3.$$

Nach der Cayley'schen Bezeichnung muss aber diese Invariante in der That durch das Symbol 123 . 234 . 341 . 412 bezeichnet werden. Denn nach dem Theoreme von den homogenen Functionen ist für eine Form u vom Grade n die Function

$$\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + x_3 \frac{d}{dx_3}\right)^n u$$

von u selbst nur durch einen numerischen Factor verschieden, so dass für die Symbolform $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n$ die a_i nur durch einen numerischen Factor von den Differentialsymbolen $\frac{d}{dx_i}$ ver-

schieden sind; und somit dieselben Resultate erhalten werden müssen, wenn wir mit Cayley Determinanten aus den Elementen $\frac{d}{dx_i}$ oder wenn wir mit Aronhold solche aus den a_i bilden. In beiden Methoden wird auch von demselben Kunstgriff Gebrauch gemacht. Wenn mit dem Product einer Anzahl von Differentialsymbolen

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda \frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d}{dx} + \mu \frac{d}{dy}\right) \text{ etc.}$$

an der Function U operiert wird, so ist das Resultat eine lineare Function der Differentiale von U von einer der Zahl der Factoren gleichen Ordnung; wird also für eine Function der symbolische Ausdruck erfordert, welche Potenzen der Differentialcoefficienten enthält, so bildet man nach Cayley zuerst mit verschiedenen Reihen von Veränderlichen eine Function wie

$$\left(\frac{d}{dx_1} + \lambda \frac{d}{dy_1}\right)\left(\frac{d}{dx_2} + \mu \frac{d}{dy_2}\right) U_1 U_2$$

und macht nach der Differentiation die Veränderlichen identisch. Diess entspricht offenbar genau den Aronhold'schen Reihen der a_i, b_i, etc. Für den Beweis, dass jede Invariante in solcher Weise ausgedrückt werden kann, darf hier auf die Quellen verwiesen werden.

43) S. 234, Art. 222. Der Beweis für binäre Formen kann wie folgt geführt werden. Wir denken durch lineare Transformation die biquadratische Form in $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$ übergeführt und bemerken zuerst, dass jede Invariante, welche für $m = 0$ verschwindet, auch für $m = \pm 1$ verschwinden muss. Denn das Binom $x^4 + y^4$ wird durch Ueberführung von x und y in $x + y$ und $x - y$ in $x^4 + 6x^2y^2 + y^4$ und durch die von x und y in $x + yi$, $x - yi$ in $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ umgeformt, so dass, wenn m ein Factor einer Invariante ist, auch $(m^2 - 1)$ ein solcher sein muss und also die Invariante mit $(m - m^3)$ oder mit T theilbar wird. Ist dann eine Invariante in Function der allgemeinen Coefficienten a, b, c, d, e ausgedrückt, so muss sie, falls sie nicht für $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ verschwindet, sich auf eine Potenz von ae reducieren, weil sie eine symmetrische Function von a und e sein muss und nach dem Gesetze vom gleichen Gewicht aller Glieder sich nicht auf die Form $a^k + e^k$ reducieren kann. Ist nun der so bleibende Theil $a^k e^k$, so subtrahieren wir von der gegebenen Invariante S^k oder

$$(ae - 4bd + 3c^2)^k,$$

so muss der Rest für $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ nothwendig verschwinden oder für die kanonische Form mit $m = 0$ stets Null werden, er muss also nach dem Vorigen durch T theilbar sein oder die Invariante muss von der Form $S^k + T\varphi$ sein. In derselben Weise zeigt man nun, dass φ von der Form $S^{k'} + T\psi$ ist u. s. w., so dass durch Wiederholung des Verfahrens die Invariante mittelst der Fundamental-Invarianten S und T rational ausgedrückt werden kann.

44) S. 239, Art. 226. In der ersten Ausgabe wurde diess durch directe Berechnung bewiesen und so die Werthe von S und T gebildet.

45) S. 240, Art. 228. Vergl. Todhunter's „Theory of Equations" 13. Kap., p. 104 f. Zu der hier gegebenen Darstellung der Reduction auf die kanonische Form kann man vergleichen die Darstellungen derselben, welche Clebsch und Gundelfinger in Bd. 2, p. 382 und Bd. 5, p. 442 der „Mathemat. Annalen" gegeben haben.

46) S. 248, Art. 233. Die schiefe Invariante der Functionen fünften Grades von Hermite ist als Resultante der kanonischen Form $ax^5 + by^5 + cz^5$ mit $x + y + z = 0$ und ihrer Kanonizante $abcxyz$ von der 18. Ordnung; denn die Substitution der drei Wurzeln der Letztern in die Erste und die Multiplication der Resultate mit einander giebt

$$a^5 b^5 c^5 (b - c)(c - a)(a - b).$$

Dieselbe ist vom Verfasser in den „Philosoph. Transactions“ von 1858, p. 455 in vollständiger Berechnung mitgetheilt worden. Ihr Quadrat ist in den Fundamental-Invarianten von der 4., 8. und 12. Ordnung rational ausdrückbar.

47) S. 253, Art. 237. Vergleiche des Verfassers Abhandlung in „Philosophical Transactions“ 1858 p. 535.

48) S. 257, Art. 240. Für die übrigen Covarianten und Contravarianten der in dieser Form geschriebenen Gleichung siehe „Philosophical Transactions“ 1860, p. 252. Einige Bemerkungen über die Art der Bildung der Invarianten, etc. für die mit einer additionellen mit den ursprünglichen durch eine lineare Relation verbundenen Variabeln, findet man im 2. Bd. der „Analyt. Geom. des Raumes“ in dem von den Invarianten der Flächen dritter Ordnung handelnden Kapitel.

49) S. 260, Art. 243. Zur allgemeinen Theorie der ternären cubischen Formen sind die Abhandlungen von Aronhold in den Bänden 39 (p. 140) und 55 (p. 97) (1850 und 1858) und Cayley's „Third and Seventh Memoirs on Quantics“ in den „Philosophical Transactions“ von 1856 und 1861, und von Clebsch und Gordan im 1. Bd. der „Mathemat. Annalen“ p. 56, 1869, endlich von Gundelfinger im 4. Bd. derselben Annalen (p. 144) zu Rathe zu ziehen. Wir verweisen auch auf Clebsch's Abhandlung über eine Classe von Eliminationsproblemen und zur Theorie der Polaren in Bd. 58 von „Crelle's Journal“ p. 273, besonders p. 284 und 291.

Die Ausartungen der Curven dritter Ordnung — die aus Kegelschnitt und Gerade bestehenden und die aus drei Geraden — sind von Gordan und von Gundelfinger in den „Mathemat. Annalen“ respective Bd. 3, p. 631 und Bd. 4, p. 561 algebraisch behandelt worden.

Zu Kap. VI. S. 261—336.

S. 261, Art. 244 ist wesentlich Beitrag von Prof. Cayley.

50) S. 278, Art. 256. Für die Theorie der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung hat dem Verfasser ein Manuscript von Cayley zu Gebote gestanden.

Plücker hat zuerst die Möglichkeit bemerkt, die Gleichung einer Curve vierter Ordnung auf die Form $wxyz = V$ zu bringen; indem er aber als allgemeingültig ansah, dass die sechs Berührungspunkte von je drei Doppeltangenten in einem Kegelschnitt liegen, gelangte er zu einem irrigen Schluss über die Gesammtzahl der Kegelschnitte, welche durch acht Berührungspunkte von Doppeltangenten hindurch gehen. Siehe „Theorie der algebraischen Curven“ p. 245 f.

51) S. 282, Art 260. Hesse „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung“ „Crelle's Journal“ Bd. 59, p. 243 (1855), und vorher Bd. 55, p. 83 und Bd. 49; Cayley ibid. Bd. 68, p. 176.

52) S. 283, Art. 260. Eine von der Hesse'schen abweichende Methode der Verbindung der Theorie der 28 Doppeltangenten mit der Geometrie von drei Dimensionen hat Geiser im 1. Bd. der „Mathem.

Annalen“ p. 129 gegeben: Von einem Punkte der Fläche dritten Grades geht ein allgemeiner Berührungskegel vierter Ordnung an dieselbe, dessen 28 Doppeltangentialebenen aus der Tangentialebene der Fläche im Scheitel und den 27 Ebenen bestehen, welche ihn mit den 27 geraden Linien der Fläche verbinden. Vergleiche auch Bd. 72 von „Crelle's Journal“ speciell hierzu p. 376.

53) S. 287, Art. 263. Vergleiche seine Abhandlung „Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades“ in den „Berliner Monatsberichten“ von 1864, p. 499.

54) S. 296, Art. 270. Vergleiche jedoch die Noten von Brioschi und Cremona in Bd. 4 der „Mathemat. Annalen“ p. 95 und p. 99. Die 16 Doppeltangenten der Curve erkennt man nach der Methode von Geiser durch die Voraussetzung, dass das Projectionscentrum in einer der 27 Geraden der Fläche liegt; der Durchstosspunkt derselben in der Projectionsebene ist der Doppelpunkt, die Spuren der beiden Ebenen durch die Gerade, deren Kegelschnitte sie berühren, geben die Tangenten der Umrisscurve im Knotenpunkt; die Spuren der fünf dreifach berührenden Ebenen durch die Gerade und der Tangentialebene der Fläche im Projectionscentrum liefern die von ihm ausgehenden Tangenten der Curve. Die 16 von der gewählten Geraden nicht geschnittenen Geraden der Fläche bezeichnen durch ihre Bilder die Doppeltangenten der Umrisscurve. Siehe auch eine Abhandlung von Brill im 6. Bd. der „Mathemat. Annalen“ p. 66.

55) S. 296, Art. 270. Vergleiche Casey's Abhandlung „On bicircular Quartics“ in den „Transactions of the Royal Irish Academy“ Bd. 24, p. 457 (1869), und Siebeck's „Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen“ im 57. und 59. Bd. von „Crelle's Journal“, p. 359 und 173 respective (1860).

56) S. 296, Art. 270. Man sehe Chasles' „Aperçu historique“ p. 369 der deutschen Ausgabe; Quetelet „Nouveaux Mémoires de Bruxelles“ Bd. 5; Cayley im 15. Bd. von „Liouville's Journal“ p. 354.

57) S. 298, Art. 272. In der That ward dieser von Dr. Hart herrührende Satz die Quelle für den allgemeineren des Art 271. Der für diesen gegebene Beweis ist im Wesentlichen identisch mit dem von Cayley in der Abhandlung „On polyzomal Curves“ in den „Edinburgh Transactions“ für 1869 mitgetheilten.

58) S. 300, Art. 274. Diess bewies Dr. Casey.

59) S. 315, Art. 283. Vergleiche Steiner's „Geometrische Lehrsätze“ im Bd. 32 von „Crelle's Journal“ p. 184 (1846).

Dieser und die folgenden Artikel bis mit Art. 292, S. 324 wesentlich nach einem Manuscript von Cayley.

60) S. 327, Art. 295. Diese Classe von Curven vierter Ordnung ist von Lüroth betrachtet worden im Bd. 1 der „Mathemat. Annalen“ p. 37. Vergleiche die Abhandlung von Clebsch „Ueber Curven vierter Ordnung“ im Bd 59, p. 125 von „Crelle's Journal“.

61) S. 335, Art. 303. Die Werthe dieser und der beiden nächstfolgenden Invarianten sind von Walker für den Verfasser berechnet worden.

Zu Kap. VII. S. 337—357.

62) S. 340, Art. 305. Die Eigenschaften der Cycloide wurden während der ersten Hälfte des 17. Jahrh. von den hervorragendsten Mathematikern vielfach studiert. Mersenne lenkte zuerst die Aufmerksamkeit auf sie, aber auch Galilei scheint unabhängig ihre Ver-

zeichnung erdacht zu haben. Galilei verglich, nachdem es ihm nicht gelungen war, die Quadratur der Curve geometrisch zu entwickeln, ihre Fläche mit der des erzeugenden Kreises und kam zu dem Schluss, dass sie nahe aber nicht genau das Dreifache der Letzteren sei. Das Problem der Quadratur wurde dann durch Roberval 1634 direct gelöst: die Methode der Tangentenbestimmung durch Descartes, die Rectification durch Wren, die Evolute durch Huyghens und verschiedene andere wichtige Eigenschaften durch Pascal entdeckt.

63) S. 342, Art. 307. Siehe Euler „De duplici genesi Epicycloidum" „Acta Petrop." 1784.

64) S. 346, Art. 311, 5. Man vergleiche die Abhandlungen von Cremona und Clebsch im Bd. 64 von „Crelle's Journal" p. 102 und p. 124; dazu Siebeck „Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes" ibid. Bd. 66, p. 344. Die Steiner'schen Sätze findet man im 53. Bd. desselben Journals p. 231.

65) S. 347, Art. 312. Die Erfindung der Epicycloiden wird dem dänischen Astronomen Roemer beigelegt, der 1674 veranlasst war, diese Curven bei Untersuchung der besten Form der Zähne gezahnter Räder zu betrachten. Ihre Rectification wurde durch Newton im 1. Buche seiner „Principia" Prop. 49 gegeben.

66) S. 348. Art. 313. Siehe „Liouville's Journal" Bd. 10, p. 150. Vergleiche hierzu die Note von Hennig im 65. Bd. von „Crelle's Journal" p 52 unter Rücksicht auf die Schlussnotiz des 66. Bd. desselben Journals.

67) S. 351, Art. 315. Die hier angewendete Erläuterung rührt von Dr. Hart her.

68) S. 352, Art. 317. Die Gleichgewichtsform eines biegsamen Fadens wurde zuerst von Galilei untersucht, der die Curve für eine Parabel ansah. Ein deutscher Geometer Joachim Jungius zeigte 1669 experimentell, dass diess ein Irrthum war; die wahre Form der Kettenlinie entdeckte aber erst 1691 Jakob Bernoulli. Eine beachtenswerthe Arbeit von Wallace über dieselbe findet man im 14. Bd. der „Edinburgh Transactions" p. 625.

69) S. 353, Art. 319. Siehe Bouguer in „Memoires de l'Academie" 1732, „Correspondence sur l'école polyt." Bd. 2, p. 275; St. Laurent in „Gergonne's Annalen" Bd. 10, p. 145.

70) S. 356, Art. 322. Vergleiche Cotes' „Harmonia mensurarum" p. 85 (1722).

71) S. 357, Art. 323. Die logarithmische Spirale ist durch Descartes erdacht und einige ihrer Eigenschaften sind durch ihn entdeckt worden. Die im Texte hervorgehobenen Sätze über die verschiedenen Arten der Selbst-Reproduction der Curve fand Jakob Bernoulli und sie erregten seine Bewunderung.

Zu Kap. VIII. S. 358—397.

72) S. 358, Art. 324. Es ist die Steiner'sche Projection — vergleiche Steiner „Systemat Entwickelung der Abhäng. geometr. Gestalten von einander" (1832) p. 251 f. — dazu Magnus' vorhergegangene Arbeit im 8. Bd. von „Crelle's Journal" p. 51, sowie dessen Aufgaben und Lehrsätze, p. 229 f. Diese Construction wurde von Cremona in seiner ersten Abhandlung „Sulle Trasformazioni geometriche delle figure piane" im 2. Bd. (2. Serie) der „Mem. dell' Academia delle Scienze dell' Instituto di Bologna" (1863) verallgemeinert. (Siehe auch Note 76.)

72*) S. 363, Art. 328. Vergleiche Hirst „Sull' Inversione quadrica delle Curve piane" übersetzt von Cremona in Bd. 7 der „Annali di Matematica", oder in Bd. 4, p. 278 von „Battaglini's Giornale".

73) S. 365, Art. 330, 1. Der hier gegebene Beweis dieses Steiner'schen Satzes (vergl. „Kegelschnitte" Art. 252, 3) rührt von Ingram her.

74) S. 365, Art. 330, 6. Diess Beispiel ist entnommen aus einer Abhandlung von Stubbs' im 23. Bde. des „Philosoph. Magazine" p. 18.

75) S. 367, Art. 332. Siehe „Liouville's Journal" Bd. 13, p. 209. Vergleiche die allgemeinere Auffassung in der Abhandlung von Klein und Lie im 4. Bd. der „Mathemat. Annalen" p. 50, bes. p. 76.

76) S. 370, Art. 334—343. Man verdankt diese Theorie Cremona, siehe die unter Note 72) angeführte Abhandlung und deren Fortsetzung vom Jahre 1865 im 5. Bd. derselben „Memorie". Beide Abhandlungen sind abgedruckt in „Battaglini's Giornale" Bd. 1, p. 305 und Bd. 3, p. 269 und 363.

Der wichtige Satz von der Summe der drei höchsten Ordnungszahlen der vielfachen Punkte der Transformation ist wohl zuerst von Noether ausgesprochen und sofort auch zu der Folgerung des Art. 343 benutzt worden, dass jede Cremona'sche Transformation durch eine Reihenfolge von quadratischen Transformationen ersetzt werden kann. Vgl. dessen Abhandlung „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen" im 3. Bd. der „Mathemat. Annalen" p. 167 (1870) und vorher (Januar) „Göttinger Nachrichten", und verbinde damit die Note im 5. Bd. p. 635, welche auch den Text vervollständigt. Unabhängig und gleichzeitig ist derselbe Satz von Clifford entdeckt worden, siehe Cayley's Abhandlung „On the Rational Transformation between two spaces" im 3. Bd. der „Proceedings of the London Mathemat. Society" p. 161, wo auch in Art. 72 die Reductionen für alle Fälle der Cremona'schen Transformationen bis mit $n=8$ mitgetheilt sind. Später erschien ein Aufsatz von Rosanes im 73. Bd. von „Crelle's Journal" p. 97, dem die Literatur der Frage bis auf die grundlegende Arbeit von Cremona unbekannt geblieben war; er enthält denselben Satz mit selbständigem Beweis und überdiess den neuen Satz, dass die eindeutig umkehrbaren algebraischen Transformationen der Ebene nothwendig Cremona'sche sein müssen. Zur allgemeinen Theorie der Cremona'schen Transformationen vergleiche man auch Clebsch's Note im 4. Bd. der „Mathemat. Annalen" p. 490.

77) S. 386, Art. 345. Diese Angabe rührt von Jung und Armenante her, siehe „Battaglini's Giornale" Bd. 7, p. 235 f. Sie ist nicht erschöpfend, wie der Vergleich mit S. 471 lehren wird.

78) S. 386, Art. 346. Vergleiche Clebsch's Abhandlung: „Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen eines Parameters sind" in Bd. 64 von „Crelle's Journal" p. 210 f. besonders p. 224. Als Hauptbeispiel dienen die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten p. 250—270. Vergleiche auch Note 59). Als eine Fortsetzung dieser Abhandlung ist Brill's Arbeit „Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters ausdrücken lassen" in Bd. 65, p. 269 zu nennen — also Art. 347 betreffend.

79) S. 397, Art. 350—358. Die Darstellung folgte hier genau einem Manuscripte von Cayley und auch in den früheren Theilen dieses Kapitels verdankt der Verfasser Vieles den Beiträgen dieses Gelehrten.

Zu den hier hervorgehobenen Artikeln nennen wir die folgende Literatur; sie beginnt mit Chasles' Abhandlung „Betrachtungen über eine allgemeine Methode" in den „Comptes rendus" vom Sommer 1864, Bd. 58, p. 1167 und Bd. 59, p. 7, wo das Princip der

Correspondenz für die Punkte der geradlinigen Reihe begründet, und mit einer Abhandlung über Curven, deren Punkte sich individuell bestimmen ibid. Bd. 62, p. 579 (1866), wo es auf Curven vom Geschlecht Null ausgedehnt ward. Um diese Zeit hatte sich Cayley der Frage bemächtigt und gab gleichzeitig mit der vorigen in demselben Bande p. 586 in der Abhandlung über das Entsprechen bei Unicursalcurven schon die Modification des Gesetzes der Correspondenz, welche erforderlich ist, um es für Curven von allgemeinem Geschlecht gültig zu machen; sodann aber (Mai 1867) in der Abhandlung: „Second Memoir on the Curves which satisfy given conditions; the Principle of Correspondence", siehe „Philosophical Transactions" Bd. 158, p. 145, reiche Anwendungen des Princips auf die Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen; später „Philosophical Transactions" Bd. 161, p. 369—412 (1871) fügte er die Anwendung „On the Problem of the In- and Circumscribed Triangle (Polygon)" hinzu.

Mit Uebergehung einer Anzahl von Arbeiten, die sich auf jene stützen, heben wir die Abhandlung von Brill im 6. Bd. der „Mathemat. Annalen" p. 33 hervor, in welcher der allgemeine Correspondenzsatz bewiesen ist; wir verweisen auf denselben, da er leicht zugänglich ist.

Für die Steiner'schen Polygone auf Curven dritter Ordnung und der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten vergleiche man insbesondere Clebsch im 63. Bd. von „Crelle's Journal" und Ed. Weyr ibid. Bd. 73, p. 87; zu dem ersten auch Durège im 17. Bd. der „Zeitschrift f. Mathem." p. 433.

Zu Kap. IX. S. 398—452.

80) S. 403, Art. 363. Siehe „Crelle's Journal" Bd. 36, p. 143 und für Curven vierter Ordnung ibid. Bd. 41, p. 285. Die directe Lösung bezeichnete zuerst Cayley im 34. Bd. desselben Journals, p. 30.

81) S. 412, Art 372. Der Verfasser gab diese Methode im October 1858 im „Philosophical Magazine" und im 3. Bd. des „Quarterly Journal" p. 317. Vergleiche auch Abhandlungen von Cayley in „Philosophical Transactions" Bd. 149, p. 193 und Bd. 151, p. 357 (1859 und 1861).

Wir erwähnen noch einer Abhandlung von Jacobi über die directe Bestimmung der Zahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung im 40. Bd. von „Crelle's Journal" p. 237 und der Vereinfachung, welche der Jacobi'sche Beweis durch Clebsch ibid. Bd. 63, p. 186 erhalten hat.

82) S. 419, Art. 374. Ich habe versucht, in gleicher Art die Doppeltangentencurve für die Curve fünfter Ordnung zu bilden, indem ich für die Curve, deren Gleichung in Art. 373 gegeben ist, eine Covariante von der richtigen Ordnung und von der Beschaffenheit aufstellte, dass das absolute Glied verschwindet, wenn die Axe der x die gegebene Curve ein zweites mal berührt; wie denn z. B. für $\psi = 4\Theta - 9H\Phi$ die Functionen

$$U_{11}\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)^2 + \text{etc., und } \psi\left(U_{11}\frac{d^2\psi}{dx_1^2} + \text{etc.}\right)$$

solche Covarianten der Ordnung nach sind. Es mag, obwohl der Versuch nicht gelang, doch vielleicht nützlich sein, die Werthe mitzutheilen, die für die Covarianten erhalten wurden. Wenn wir, wie ohne Verlust an Allgemeinheit zulässig ist, c_1 und c_2 verschwinden lassen, so haben wir

$$H = b^2 c + 3 b^2 (d_0 x + d_1 y) + 3 (b^2 c_0 - 4 b c d_1) x^2 + 3 (2 b^2 e_1 - 5 b c d_2) x y$$
$$+ 3 (b^2 c_2 - b c d_3) y^2 + (b^2 f_0 - 16 b c e_1 + 18 c^2 d_2) x^3$$
$$+ 3 (b^2 f_1 - 39 b c e_2 - 9 b d_0 d_2 + 9 b d_1^2 + 18 c^2 d_3) x^2 y$$
$$+ (- 6 b c f_1 - 12 b d_0 c_1 + 12 b c_0 d_1 + 18 c^2 c_2 + 24 c d_0 d_2 - 18 c d_1^2) x^1 + \text{etc.},$$

$$\Theta = 9 b^2 \{ (b^4 d_0^2 + 6 b^3 c^2 d_1) + (4 b^4 d_0 e_0 + 12 b^3 c^2 e_1 - 6 b^3 c d_0 d_1 - 57 b^2 c^3 d_2) x$$
$$+ (4 b^4 d_0 e_1 + 12 b^3 c^2 e_2 - 28 b^3 c d_0 d_2 + 31 b^3 c d_1^2 - 39 b^2 c^3 d_3) y$$
$$+ (2 b^4 d_0 f_0 + 4 b^4 e_0^2 + 6 b^3 c^2 f_1 + 6 b^3 c d_0 c_1 - 48 b^3 c d_1 e_0 - 105 b^2 c^3 c_2$$
$$- 293 b^2 c^2 d_0 d_2 + 269 b^2 c^2 d_1^2 + 36 b c^4 d_3) x^2 + \text{etc.} \},$$

$$\Phi = 6 b [(b^3 e_0 + 4 b^2 c d_1) + (b^3 f_0 - 8 b^2 c c_1 - 38 b c^2 d_2) x$$
$$+ \{ b^3 f_1 - 2 b^2 c e_2 + 27 b^2 (d_1^2 - d_0 d_2) - 41 b c^2 d_3 \} y$$
$$+ (- 12 b^2 c f_1 - 12 b^2 d_0 c_1 + 12 b^2 c_0 d_1 + 6 b c^2 e_2 - 162 b c d_0 d_2$$
$$+ 168 b c d_1^2 - 6 c^3 d_3) x^2 + \text{etc.}].$$

Von den Grössen U_{11}, U_{22}, .. sind die einzigen, welche von x und y unabhängige Glieder enthalten $U_{11} = b^2$, $U_{23} = bc$, so dass für eine Function ψ von der Form $\Theta + kH\Phi$, die wir darstellen durch

$$A + B_0 x + B_1 y + C_0 x^2 + \text{etc.}$$

der Grad von ψ gleich 22 ist, und das absolute Glied in der Covariante $U_{11} \left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)^2 + \text{etc.}$ gleich $b^2 B_0^2 + 44 bcAB_1$ und in der Covariante $\dot{U}_{11} \frac{d^2\psi}{dx_1^2} + \text{etc.}$ gleich $2 b^2 C_0 + 42 bcB_1$ ist.

83) S. 420, Art. 375. Vergleiche „Vorlesungen" Art. 51, p. 89 oder Hesse's „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes" 2. Aufl., p. 101.

84) S. 421, Art. 375. Siehe auch Clebsch-Gordan's „Abel'sche Functionen" p. 62.

S. 423, Art. 376. Steiner hat im 47. Bd. von „Crelle's Journal" p. 6, wo er diese Relationen giebt, auch bemerkt, dass die Zahl der Curven des Büschels $u + \lambda u^* = 0$, welche Curven des Büschels $v + \lambda' v^* = 0$ osculieren, durch

$$3 \{ (\mu + \mu')(\mu + \mu' - 6) + 2\mu\mu' + 5 \}$$

ausgedrückt wird. Wir erinnern, dass wir in Art. 102 gesehen haben, wie die Bedingung für die Osculation von zwei Curven aus der der gewöhnlichen Berührung durch die weitere Forderung hervorgeht, dass für die beiden Curven das Verhältniss $H : U_1^3$ den nämlichen Werth habe.

85) S. 426, Art. 380. Die Hauptsätze dieses Abschnittes sprach zuerst Steiner in einer der Berliner Akademie August 1848 gelesenen Abhandlung aus, welche im 47. Bd. von „Crelle's Journal" p. 1—6 wieder abgedruckt ward. Die auf Curven dritter Ordnung bezügliche Theorie gab der Verfasser ohne von Steiner's Arbeit Kenntniss zu haben — er lernte sie erst durch den Abdruck in „Crelle's Journal" 1854 kennen — in der 1. Ausgabe dieses Werkes 1852.

Die Entwickelungen der Art. 380—385 nach einem Manuscript von Cayley.

86) S. 433, Art. 386. Vergleiche Transon „Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces" im 6. Bd. von „Liouville's Journal" (1841).

Art. 386 und 387 nach einem Manuscript von Cayley.

87) S. 437, Art. 389. Siehe „Philosophical Transactions" Bd. 155, p. 545.

88) S. 437, Art 390. Vergleiche de Jonquières' Arbeit in „Liouville's Journal" Bd. 6, p. 113 (1861).

89) S. 437, Art. 390. Diess hat Cayley in der weiter unten angeführten Arbeit bemerkt. Der Index ist z. B. gleich N, wenn die Gleichung die Coordinaten eines parametrischen Punktes linear enthält, der eine ebene Curve von der Ordnung N durchläuft, während doch, so lange diese Curve nicht unicursal ist, die Gleichung nicht ohne Erhöhung des Grades zu einer algebraischen Function eines Parameters gemacht werden kann; allgemeiner kann die Gleichung die Coordinaten eines Punktes linear enthalten, der einer Curve im Raum von k Dimensionen angehört.

90) S. 437, Art. 390. Die Abhandlungen von Chasles findet man in den „Comptes rendus" von 1864—1867, Bd. 58—65. Vergl. Note 79).

91) S. 438, Art. 390. Eine Darstellung der Theorie gab Cremona im 6. Bd. p. 179 der „Annali di Matematica"; sie ist der deutschen Ausgabe seiner „Einleitung in die geometrische Theorie der ebenen Curven" beigefügt.

92) S. 445, Art 396. Vergleiche Cayley's Note in „Comptes rendus" Bd. 74, p 708 (1872).

93) S. 445, Art. 396. Vergleiche noch Zeuthen ibid. Bd. 75, p. 703 und 950.

94) Maillard's Doctorats-These über die Systeme von Curven dritter Ordnung erschien 1871 (Paris); Zeuthen veröffentlichte seine Untersuchungen hierüber in „Comptes rendus" Bd. 74, p. 521, 604, 726; und analoge über Curvensysteme vierter Ordnung ibid. Bd. 75, p. 703, 950.

95) S. 449. Art. 339. Zeuthen's Untersuchungen über Kegelschnitte, welche vier Bedingungen genügen, findet man in den „Nouvelles Annales de Mathém." von 1866.

Cayley hat die Untersuchungen von Chasles, Zeuthen und de Jonquières mit seinen eigenen dargestellt in der Abhandlung „On the Curves which satisfy given conditions" im 158. Bd. der „Philosoph. Transactions" p. 75. Clebsch hat im 6. Bd. der „Mathemat. Annalen" p. 1 einen Beitrag zur Theorie der Charakteristiken gegeben, auf den wir verweisen.

96) S. 452, Art. 400. Die Arbeit von de Jonquières über die vielfachen Berührungen findet man im 66. Bd. von „Crelle's Journal" p. 289. Dazu sind zu studieren die algebraischen Untersuchungen von Brill in Bd. 4 der „Mathemat. Annalen" p. 527 und vorher p. 510.

Ueber den Inhalt der Note „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie" von Brill und Noether in „Göttinger Nachr." 1873, p. 116. (Nach einer brieflichen Mittheilung von Herrn Noether unter Anpassung der Terminologie an den vorstehenden Text.)

In dieser kurz vor dem Erscheinen der Originalausgabe dieses Werks veröffentlichten Note sind die Verfasser durch ähnliche Betrachtungen wie sie nach Art. 159 f. Sylvester über die Reste von Schnittpunktsystemen auf Curven dritter Ordnung angestellt hat, zum Beweis von allgemeinen algebraischen Sätzen gelangt, die bisher nur durch Abel'sche Functionen bewiesen werden konnten.

Den Ausgangspunkt bildet dabei ein dem Satz des Art. 160 entsprechender Satz über Punktsysteme auf einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung $f=0$ mit beliebigen doppelten und vielfachen Punkten. Als Schnittcurven werden nur solche betrachtet, welche durch jeden $i$fachen Punkt von $f=0$ $(i-1)$fach hindurchgehen. Solche Curven mögen „f adjungierte" genannt werden. Wenn nun die Definitionen des Art. 159 über Restgruppen und beigeordnete Restgruppen (residuale und coresiduale Gruppen) auch für $f=0$ gelten, sodass nur α und β zusammen den vollständigen Schnitt einer f adjungierten Curve mit $f=0$ ausmachen, so gilt der Satz des Art. 160 auch für $f=0$ („Aequivalenzsatz" der Note). Denn wie dort kann $U_p U_r$ in die Form

$$A.\,U_q + B.\,f$$

gesetzt werden, wo $A=0$, $B=0$ die Gleichungen von zwei Curven sind.*)

Da durch diesen Satz der Begriff der beigeordneten Restgruppen von dem besondern Rest unabhängig gemacht wird, in Bezug auf welchen die Gruppen als beigeordnet erkannt worden sind, so scheidet derselbe aus vollständigen Schnittpunktsystemen Punktgruppen als selbständige Gebilde aus, die unter Umständen noch directer durch eine noch nähere Beziehung zur Curve definiert werden können. Wir betrachten nun solche „specielle" Punktgruppen.

Unter den f adjungierten Curven spielen die Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung C_{n-3} eine hervorragende Rolle. So werden z. B. Punktgruppen auf f, die durch C_{n-3} ausgeschnitten werden, bei rationaler Transformation von f in eine Curve f' von der Ordnung n' in solche Punktgruppen von f' übergeführt, die wiederum durch f' adjungierte Curven $C_{n'-3}$ aus dieser ausgeschnitten werden — auf Grund gewisser Invarianten-Eigenschaften der adjungierten C_{n-3}.

---

*) Diese für den Fall, dass $U_p.\ U_r$, U_q durch die singulären Punkte von $f=0$ nicht hindurchgehen, bekannte Darstellung bleibt auch bestehen (Noether in „Göttinger Nachr." 1872, p. 490), wenn $U_q=0$ in jedem $i$fachen Punkte von $f=0$, in welchem $U_p U_r$ einen $k$fachen Punkt hat, höchstens einen $(k-i+1)$fachen Punkt besitzt, was hier wo $k=2(i-1)$ der Fall ist.

Während sodann für alle f adjungierten Curven höherer Ordnung das Schnittpunktsystem so beschaffen ist, dass für D als das Geschlecht von f im Allgemeinen D Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt sind, sind es für adjungierte C_{n-3} erst $D-1$ durch die übrigen, oder sogar sowohl bei speciellen f als bei speciellen C_{n-3}, die der allgemeinen Curve f adjungiert sind, weniger als $D-1$ Punkte durch die übrigen.

Z. B. die adjungierte Curve C_{n-3} für eine Curve f_6 von der sechsten Ordnung mit fünf Doppelpunkten, also $D=5$ ist eine C_3, von welcher vier Punkte durch die Doppelpunkte und durch eine Gruppe G_4 von vier beliebigen weiteren Punkten bestimmt sind. Nimmt man aber diese Gruppe G_4 auf f_6 so an, dass durch sie noch einfach unendlich viele (∞^1) adjungierte C_3 gehen, so giebt es ∞^1 Restgruppen Γ_4 zu einer solchen Gruppe.

Diese Gruppen Γ_4 haben nach einem Satze von Riemann („Abel'sche Functionen" § 5), der von Roch („Crelle's Journal" Bd. 64, p. 372) auf dem von Riemann angegebenen Wege allgemein bewiesen ist, und den die oben genannte Note algebraisch beweist (siehe p. 125 f.), die Eigenschaft, dass jede von ihnen mit den Doppelpunkten zusammen wiederum die Basispunkte eines Büschels von C_3 liefert, dass also zu jeder von ihnen eine einfach unendliche Anzahl — und zwar nach dem Aequivalenzsatz dieselbe für alle Γ_4 — von Gruppen G_4 gehört.

Der bezeichnete Satz lautet allgemein so: Schneidet eine f adjungierte Curve C_{n-3} aus f eine Gruppe G_M von M Punkten aus, deren Restgruppen Γ_N von je $N = 2(D-1) - M$ Punkten eine ∞^q Schaar für

$$(q \geq N - D + 1)$$

bilden, so sind umgekehrt die Restgruppen jeder solchen Gruppe Γ_N eine ∞^r Schaar von Gruppen G_M für

$$r = q - (N - D + 1)$$

oder

$$M + N = 2(D-1), \quad M - N = 2(r - q).$$

Die Beweise der vorhergehenden Sätze sind von der besonderen Gestalt der Curve f, so lange sie nicht zerfällt, ganz unabhängig; sie setzen selbst nicht nothwendig voraus, dass die Curve keine andern Singularitäten als doppelte und vielfache Punkte besitzt, weil man eine Curve mit höhern Singularitäten durch eine rationale Transformation, deren Fundamentalpunkte in die singulären Punkte gelegt sind, in eine Curve mit gewöhnlichen Singularitäten transformieren und die höheren durch das definieren kann, was ihnen in derselben entspricht. (Siehe Noether in „Göttinger Nachr." 1871, p. 267; man kommt zu denselben Resultaten wie nach den Cayley'schen Definitionen in Art. 58.) Hieraus folgt, dass die obigen Sätze noch für Curven mit beliebig speciellen Moduln gelten; ebenso der Zusatz zu dem letzten derselben, welcher in Verbindung mit dem oben erwähnten Transformationssatz über die Curven C_{n-3} den Geschlechtssatz liefert, dass es immer ∞^{D-1} adjungierte Curven C_{n-3} giebt.

Die in dem obigen Satze vorkommenden Gruppen G_M oder Γ_N sind für sich definierbar und algebraisch bestimmbar. Man kann z. B. für eine Curve siebenter Ordnung f mit $p=6$ die speciellen ∞^1 Gruppen G_4 von je vier Punkten, durch welche noch je ∞^2 adjungierte C_4 gelegt werden können, auf algebraischem Wege finden (Brill in Bd. 6, p. 62 der „Mathemat. Annalen"); man kann ebenso die ∞^2 Gruppen Γ_6 von je sechs Punkten ermitteln, durch welche noch ∞^1 Curven C_4

gehen (Brill ibid. Bd. 2, p. 471). Die beiden Probleme werden aber durch den Satz auf einander zurückgeführt.

Wendet man die angegebenen ∞^2 Curven C_4 zur Transformation von f an, so wird sie in eine Curve sechster Ordnung mit vier Doppelpunkten übergeführt, während nach Art. 345 eine Normalcurve siebenter Ordnung erhalten würde.

Auf ähnliche Weise kann man mittelst Transformation durch specielle C_{n-3} im Allgemeinen die Curve vom Geschlecht D für

$$3(i+1) > D \geqq 3i$$

in eine Curve von der Ordnung $(D - i + 2)$ überführen.

Berichtigungen.

Seite 11 Zeile 14 v. o. lies ε_i statt ε_1.
„ 12 „ 3 v. u. lies $a_{i3} x_3$ statt $a_{i3} + x_3$, und $\varrho \xi_k = a_{1k} \xi_1' +$ statt $\varrho \xi_{1k} = a_k \xi_1' +$.
„ 13 „ 11 v. o. lies $= \mu x_i'$ statt μx_i.
„ 13 „ 14 v. o. lies h_i' statt h_k'.
„ 13 „ 11 v. u. lies ε_i' statt ε_k'.
„ 16 „ 17 v. u. lies $S - kS' = 0$ statt $S' - kS' = 0$.
„ 16 „ 16 v. u. lies welcher statt welchen.
„ 16 „ 13 v. u. lies Kegel- statt Kugel-.
„ 37 „ 8—10 v. o. streiche die Worte: Man — annehmen.
„ 41 „ 8 v. o. lies h statt b.
„ 83 „ 4 v. o. lies Art. 348 statt 342.
„ 97 „ 13 v. o. lies af^2 statt cf^2 und $2e^2$ statt $2c^2$.
„ 102, 116, 117, 118 müssen die Nummern der Figuren statt 24—27 vielmehr heissen 27, 28, 29, 30 respective.
„ 105 „ 16 v. u. lies $64 X_2^3 + 27 a^2 X_1 X_3^2 = 0$.
„ 106 „ 6 v. u. lies $27 \Delta S^2 x_3^2 = \Theta^3$ statt $27 \Delta^2$.
„ 123 „ 7 v. u. lies 116 statt 114.
„ 139 „ 7 v. u. lies Geraden aus O.
„ 154 „ 2 v. o. lies keinen statt keine.
„ 155 „ 18 v. o. lies 149 statt 148.
„ 174 „ 6 v. o. lies Art. 156 statt 56.
„ 176 „ 6 v. o. lies sie statt ihn.
„ 248 „ 4 v. o. fehlt hinter ist die verweisende Ziffer [46]).
„ 258 „ 3 u. 6 v. u. in der letzten Reihe der Determinante setze satt c und c respective m und m.
„ 264 „ 9 v. o. lies bx^2y statt bx^3y.
„ 272 „ 17 v. u. lies 252 statt 253.
„ 325 „ 6 v. u. lies $J_{1,2}$ statt $S_{1,2}$.
„ 331 „ 3 v. o. Die Coefficienten der drei letzten Glieder heissen respective $6f$, $6g$, $6h$ statt 6.
„ 336 „ 5 v. u. lies litterale statt lineare.
„ 353 „ 14 v. o. streiche das Zeichen $=$.
„ 361 „ 9 v. u. fehlt die Artikel-Nummer 327. Auf Seite 362—364 folgen dann 328—330 statt 327—329.
„ 380 „ 4 v. o. am Ende lies $- b_3$ statt $- b_2$.
„ 382 „ 1 v. u. am Ende lies $x_1 x_3$ statt $x_1 x_2$.
„ 384 „ 15 v. u. lies 334 statt 335.
„ 410 „ 2 v. o. lies im letzten Glied n' statt μ'.
„ 415 „ 12 v. u. lies n statt μ.
„ 418 „ 2 v. o. lies denselben.









